Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Es ist zu zeigen, dass $|n^k a^n - 0| = |n^k| \cdot |a^n| = n^k |a|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Daher genügt es zu zeigen, dass $n^k r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$ (der Fall $r = 0$ und damit $a = 0$ ist klar). Sei $\varepsilon > 0$. Wir betrachten ab nun den Kehrwert und zeigen $n^{-k}(l+1)^n > \frac{1}{\varepsilon}$ für $l = 1/r - 1 > 0$. Sei $n > \max\{2k+2, \frac{(l/2)^{k+1}}{\varepsilon\cdot(k+1)!}\}$. Mit der binomischen Formel gilt

$$\begin{aligned}\frac{(1+l)^n}{n^k} &= n^{-k}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} l^j \geq n^{-k}\binom{n}{k+1} l^{k+1} \\ &= \frac{l^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k-1)}{n^k} \\ &= \frac{l^{k+1}}{(k+1)!}\cdot n\cdot\prod_{j=1}^{k+1}(1-\frac{j}{n}) \\ &\overset{n\geq 2(k+1)}{\geq} \frac{l^{k+1}}{(k+1)!}\cdot n\cdot 2^{-k-1} = \frac{(\frac{l}{2})^{k+1}}{(k+1)!}\cdot n > \frac{1}{\varepsilon},\end{aligned} \tag{1}$$

wobei im ersten Schritt die nur nichtnegative Summanden enthaltende Summe durch den $(k+1)$-ten Term nach unten abgeschätzt wurde. Damit ist also $n^k r^n = n^k(l+1)^{-n} < \varepsilon$, was die Behauptung zeigt.

Alternativer Beweis:
Wir zeigen wieder $n^k r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$, diesmal jedoch via Induktion über k.
Hierfür machen wir einen doppelten Induktionsanfang. Für $k = 0$ ist zu zeigen, dass $r^n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dies gilt nach einem Beispiel aus der Vorlesung. Betrachte nun $k = 1$ und beliebiges $\varepsilon > 0$. Setze $l := 1/r > 1$ und sei weiter $n > \frac{1}{\varepsilon(\sqrt{l}-1)^2}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{n}{l^n} &= \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{l}-1+1)^n}\right)^2 \overset{\text{Bernoulli-Ungl.}}{\leq} \left(\frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{l}-1)n+1}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{(\sqrt{l}-1)\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{(\sqrt{l}-1)\sqrt{n}}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(\sqrt{l}-1)^2\cdot n} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Sei nun $k \geq 1$ und gelte die Aussage für alle $0 < r < 1$ und alle $0 \leq j \leq k$. Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$n^{k+1}r^n = (n^k\sqrt{r}^n)(n\sqrt{r}^n) \tag{2}$$

und nach Induktionsvoraussetzung gibt es $m_1 \in \mathbb{N}_0$ und nach dem Induktionsanfang für $k = 1$ gibt es $m_2 \in \mathbb{N}_0$, sodass $n^k\sqrt{r}^n < \sqrt{\varepsilon}$ für alle $n > m_1$ und $n\sqrt{r}^n < \sqrt{\varepsilon}$ für alle $n > m_2$. Hierbei wird benutzt, dass die Induktionsvoraussetzung auch für $0 < \sqrt{r} < 1$ angewendet werden kann. Für alle $n > \max\{m_1, m_2\}$ gilt somit also $n^{k+1}r^n < \varepsilon$.
Bemerkung: Statt eines doppelten Induktionsanfangs kann auch mit einer Hilfsbehauptung gezeigt werden, dass $n\sqrt{r}^n$ durch $s \in \mathbb{R}$ beschränkt ist (dieser Beweis ist einfacher als die Konvergenz gegen Null, vgl. den nächsten Alternativbeweis). In (**??**) wird dann mit der Induktionsvoraussetzung n so groß gewählt, dass $n^k\sqrt{r}^n < \varepsilon/s$, was ebenfalls zum Ziel führt.

Alternativer Beweis:
Wir zeigen zuerst als Hilfsbehauptung, dass $1 \leq \frac{(n+1)^k}{n^k} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ für $k \in \mathbb{N}_0$ via Induktion über k. Für $k = 0$ ist $|(n+1)/n - 1| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und damit die Aussage klar. Sei nun $k \geq 0$ und $\varepsilon > 0$. Nach IV können wir m_1 so wählen, dass $(n+1)^k/n^k < 1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{4}$ für alle $n > m_1$ und mit $\bar{\varepsilon} := \min\{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}\}$. Sei nun $n > \max\{m_1, \frac{4}{\bar{\varepsilon}}\}$. Dann ist

$$\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{4}\right)^2 = 1 + \frac{\bar{\varepsilon}}{2} + \frac{\bar{\varepsilon}^2}{16} < 1 + \varepsilon$$

was die Hilfsbehauptung zeigt. Sei nun $\delta := (1-r)/2$. Wähle n_0 so groß, dass $(n+1)^k/n^k < 1 + \delta/r$. Dann ist für $n > n_0$

$$(n+1)^k r^n = r \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^k n^k r^n < (r+\delta) n^k r^n < (r+\delta)^{n-n_0} n_0^k r^{n_0} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

da $|r + \delta| < 1$ und $n_0^k r^{n_0}$ ein von n unabhängiger reeller Wert ist.

Aufgabe 2

(a) Es ist b ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} \; \exists m > n : a_m \in U_\varepsilon(b).$$

(b) Die komplexe Zahl $z = 1 + i$ hat die Polarkoordinaten (PK) $(\sqrt{2}, \pi/4)$. Damit hat z^n die PK $(2^{n/2}, (\pi n)/4)$ und demnach a_n die PK

$$\left(\frac{1+n}{n}, \frac{\pi n}{4}\right).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ von der Form, dass $n = 8k+2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die φ-Koordinate von a_n genau $(8k+2)\pi/4 = 2k\pi + \pi/2 = \pi/2$ und somit $a_n = \frac{(1+n)}{n} i$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wähle $m > \max\{1/\varepsilon, n\}$ von der Form $m = 8k + 2$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $a_m = \frac{(1+m)}{m} i$ und

$$|a_m - i| = |i/m| = 1/m < \varepsilon.$$

Es ist also i ein Häufungspunkt von a_n.

Aufgabe 3

Wir definieren zur Abkürzung $A_n := \{a_m \mid m \geq n\}$. Falls $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, so ist A_n für alle $n \in \mathbb{N}$ unbeschränkt und damit auch $\inf_{m\in\mathbb{N}} \sup A_m = \infty$. Sei also $\mathbb{R} \ni \bar{a} := \limsup_{n\to\infty} a_n$. Wir zeigen in zwei Schritten '$\leq$' und '$\geq$'.

'$\leq$' Sei $m \in \mathbb{N}$. Nehme an, dass $\bar{a} - \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup A_m = \varepsilon > 0$. Da $A_{m_1} \supseteq A_{m_2}$ für alle $m_1 \leq m_2$ ist $\sup A_m$ monoton fallend in m und es gibt ein $M \in \mathbb{N}$, sodass $\sup A_m \leq \bar{a} - \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m > M$.

Da allerdings $\bar{a}$ ein Häufungspunkt ist, gibt es ebenso ein $n > M$, sodass $\sup A_n > \bar{a} - \frac{\varepsilon}{2}$, was einen Widerspruch darstellt.

'$\geq$' Sei $a' = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup A_m$ und nehme an, dass $\bar{a} < a'$. Definiere $\varepsilon := \frac{a' - \bar{a}}{2}$. Sei nun

$$\mathcal{I} := \{n \in \mathbb{N} \mid a' - \varepsilon \leq a_n\}.$$

Nehme zuerst an, dass $\mathcal{I}$ unendlich viele Elemente enthält. Dies impliziert, dass $(a_j)_{j\in\mathcal{I}}$ als Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach einer Variante des Satzes von Bolzano-Weierstraß einen

Häufungspunkt in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ besitzt, welcher nach Definition größer als $\bar{a}$ sein muss, was uns zu einem Widerspruch führt.

Nehme also nun an, dass $|\mathcal{I}| < \infty$. Sei $N = \max \mathcal{I}$. Dann ist jedoch $a_m < a' - \varepsilon$ für alle $m > N$ und insbesondere $\sup A_m \leq a' - \varepsilon$ für alle $m > N$. Damit muss auch $\inf_{m \in \mathbb{N}} \sup A_m \leq a' - \varepsilon$, was erneut einen Widerspruch bedeutet.

Aufgabe 4

In Notation von H2.5 sei $p_n(k) = \sum_{l=0}^{k-1} l^n$.

(a) Nach H2.5 gilt

$$\left|\frac{p_2(k)}{k^3} - \frac{1}{3}\right| = \left|-\frac{1}{2k} + \frac{1}{6k^2}\right| \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

wobei die Dreiecksungleichung, $k^2 \geq k$ und $1/k \to 0$ für $k \to \infty$ verwendet wurde.

(b) Wir beweisen die Aussage via Induktion über n. Der Induktionsanfang $n = 0$ ergibt sich aus

$$\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} 1 = 1.$$

Sei nun $n > 0$ und gelte die Aussage für alle $0 \leq k < n$. Mit H2.5(b) gilt, dass

$$\frac{p_n(k)}{k^{n+1}} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{k^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} p_j(k). \tag{3}$$

Wenn also der zweite Summand der rechten Seite in (**??**) für $k \to \infty$ gegen Null konvergiert, ist die Behauptung gezeigt. Sei dafür $\varepsilon > 0$. Es gilt

$$\left|\frac{1}{k^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} p_j(k) - 0\right| \leq \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+1}{j} \left|\frac{1}{k^{j+1}} \cdot p_j(k)\right| \frac{1}{k^{n-j}}. \tag{4}$$

Wir zeigen nun, dass für jedes $0 \leq j \leq n-1$ ein $K(j)$ existiert, sodass Term j der rechten Seite von (**??**) für alle $k > K(j)$ strikt durch ε/n beschränkt ist. Sei also $0 \leq j \leq n-1$. Nach der Induktionsvoraussetzung können wir $K'(j) \in \mathbb{N}$ groß genug wählen, sodass $|k^{-(j+1)} \cdot p_j(k)| < \frac{2}{j+1}$ für alle $k > K'(j)$.

Wir beobachten des Weiteren, dass $k^{n-j} \leq k^{-1} \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Wir finden daher ein $K(j) \geq K'(j)$, sodass für alle $k > K(j)$ die Ungleichung

$$1/k < \left(\binom{n+1}{j}\frac{2}{j+1}\right)^{-1} \frac{\varepsilon}{n}$$

gilt, da die rechte Seite nur von n, j und ε abhängt. Damit folgt jedoch auch

$$\binom{n+1}{j} \left|\frac{1}{k^{j+1}} \cdot p_j(k)\right| \frac{1}{k^{n-j}} \leq \binom{n+1}{j} \cdot \frac{2}{j+1} \cdot \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{n}$$

für alle $k > K(j)$. Wählen wir nun $K_{\max} := \max\{K(j) \mid 0 \leq j \leq n-1\}$, so ist die rechte Seite von (**??**) für alle $k > K_{\max}$ strikt durch ε beschränkt, was die Behauptung zeigt.