Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wir zeigen die Aussage für eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, der zweite Fall geht analog.
Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Wir entnehmen dem Skript, dass $\overline{M}$ abgeschlossen ist genau dann wenn gilt:

$$\forall x \in \mathbb{C} : (x \text{ ist ein Berührpunkt von } \bar{M} \Rightarrow x \in \bar{M}). \tag{1}$$

Wir zeigen also (1):
Sei $x \in \mathbb{C}$ ein Berührpunkt von $\bar{M}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Die Menge $U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x) \cap \bar{M}$ ist nichtleer, weil x ein Berührpunkt von $\bar{M}$ ist. Sei also $y \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x) \cap \bar{M}$. Insbesondere ist $y \in \bar{M}$, also ein Berührpunkt von M. Wähle daher $z \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(y) \cap M$, insbesondere gilt also $z \in M$ und damit gilt insgesamt:

$$|x - z| \leq |x - y| + |y - z| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. \tag{2}$$

Also $z \in U_\varepsilon(x) \cap M$ und weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, ist x ein Berührpunkt von M also in $\overline{M}$. $\square$

Aufgabe 2

(a) Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$, U offen. Wenn U oder V leer sind gibt es nichts zu zeigen, nehme also an $U \neq \emptyset \neq V$. Sei $x \in U \cap \bar{V}$, und sei $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) \subseteq U$ (U offen). Sei außerdem $\beta > 0$, dann gilt

$$\emptyset \overset{x \in \bar{V}}{\neq} U_{\min\{\varepsilon,\beta\}}(x) \cap V = U_\varepsilon(x) \cap U_\beta(x) \cap V \subseteq U_\beta(x) \cap U \cap V. \tag{3}$$

Insgesamt gilt also $U_\beta(x) \cap U \cap V \neq \emptyset$. Nachdem das für jedes $\beta > 0$ gilt, ist x ein Berührpunkt von $U \cap V$, also $x \in \overline{U \cap V}$. $\square$

(b) Unser Gegenbeispiel ist: $U := S^1, V = \mathbb{C} \backslash S^1$. Jeder Punkt in S^1 ist offenbar ein Berührpunkt von V und $\bar{V} = \mathbb{C}$, also gilt

$$U \cap \bar{V} = S^1 = U. \tag{4}$$

Die rechte Seite der Gleichung aus Teilaufgabe (a) ergibt allerdings:

$$\overline{U \cap V} = \bar{\emptyset} = \emptyset \neq S^1. \tag{5}$$

Aufgabe 3

Sei M wie in der Aufgabenstellung, und $x \in \overline{M}$. Also gilt

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset. \tag{6}$$

Es ist noch zu zeigen, dass $x \in M$ ist. Nehme für einen Widerspruch an, dass $x \notin M$ und definiere

$$\vartheta := \{m \in M \mid m > x\}. \tag{7}$$

Wir gehen nun mehrere Fälle bezüglich der Menge ϑ durch:

Fall 1 $x < 0$: Dann folgt direkt: $U_{|x|}(x) \cap M = \emptyset$, was im Widerspruch zu (6) steht.

Fall 2 $x > 1$: In diesem gilt $U_{|x-1|}(x) \cap M = \emptyset$, was wiederum im Widerspruch zu (6) steht.

Fall 3 $x \in]0,1[$: Die Werte 0 und 1 sind ausgeschlossen, weil $x \notin M$ gilt. In diesem Fall ist ϑ eine endliche Menge, daher existiert $\min \vartheta$. Die Menge der Elemente aus M die kleiner ist als x lässt sich so schreiben:

$$
\begin{aligned}
P :=& M \backslash \vartheta = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \frac{1}{n} < \min \vartheta \right\} \cup \{0\} \\
=& \left\{ \frac{1}{n + \frac{1}{\min \vartheta}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Man sieht direkt das Maximum der Menge: $\max P = \frac{1}{1+\frac{1}{\min \vartheta}}$. Nach Konstruktion gilt $\max P < x$ und damit finden wir den Widerspruch:

$$
U_{\min\{x - \max P, \min \vartheta - x\}}(x) \cap M = \emptyset. \tag{9}
$$

□

Aufgabe 4

Die offenen Teilmengen von $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ sind laut Skript wie folgt definiert:
$M \subseteq \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ heißt offen (schreibe kürzer $M \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^\uparrow}$) wenn die drei nachfolgenden Bedingungen erfüllt sind.

$$
M \cap \mathbb{R} \text{ ist offen in } \mathbb{R}. \text{ In Formeln geschrieben: } M \cap \mathbb{R} \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \tag{10}
$$

$$
\text{Falls } +\infty \in M \text{ so gilt: } \mathbb{R} \backslash M \text{ ist nach oben beschränkt.} \tag{11}
$$

$$
\text{Falls } -\infty \in M \text{ so gilt: } \mathbb{R} \backslash M \text{ ist nach unten beschränkt.} \tag{12}
$$

Wir wollen überprüfen ob die hierdurch definierte Menge $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^\uparrow}$ eine Topologie ist. Wir überprüfen also die Definition einer Topologie. Eine Menge $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(M)$ heißt Topologie über einer Menge M wenn:

$$
\emptyset \in \mathcal{T} \tag{Top1}
$$

$$
\forall A, B \in \mathcal{T} : A \cap B \in \mathcal{T} \tag{Top2}
$$

$$
\forall (A)_{i \in I} \subseteq \mathcal{T} : \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T} \tag{Top3}
$$

Wir gehen jetzt die Definition durch und zeigen, dass jede Zeile gilt:

(Top1) Das ist offenbar erfüllt, denn die leere Menge ist offen in $\mathbb{R}$ und enhält keinen der unendlich fernen Punkte.

(Top2) Seien $A, B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^\uparrow}$, falls $\{+\infty, -\infty\} \cap A \cap B = \emptyset$ gilt folgt $A \cap B \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^\uparrow}$ unmittelbar. Es sind also noch die folgenden zwei Aussagen zu zeigen

$$
+\infty \in A \cap B \Rightarrow \mathbb{R} \backslash (A \cap B) \text{ ist nach oben beschränkt,} \tag{13}
$$

$$
-\infty \in A \cap B \Rightarrow \mathbb{R} \backslash (A \cap B) \text{ ist nach unten beschränkt.} \tag{14}
$$

Für (13) nehme an, dass $+\infty \in A \cap B$. Dann gilt insbesondere: $+\infty \in A$ und $+\infty \in B$, also existieren $\sup(\mathbb{R} \backslash A)$ und $\sup(\mathbb{R} \backslash B)$ in den reellen Zahlen. Damit lässt sich das Supremum von $A \cap B$ abschätzen:

$$
\sup(\mathbb{R} \backslash (A \cap B)) = \sup((\mathbb{R} \backslash A) \cup (\mathbb{R} \backslash B)) = \max\{\sup \mathbb{R} \backslash A, \sup \mathbb{R} \backslash B\} \tag{15}
$$

Die gesuchte Schranke ist also $\max\{\sup \mathbb{R} \backslash A, \sup \mathbb{R} \backslash B\}$. Der Beweis für (14) geht analog.

(Top3) Sei $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{T}_{\mathbb{R}^\uparrow}$. Es gibt auch hier nur etwas zu zeigen, wenn für mindestens ein i gilt $\{+\infty, -\infty\} \cap A_i \neq \emptyset$. Ähnlich zum letzten Fall müssen wir hier zwei Aussagen Beweisen:

$$(\exists l \in I : +\infty \in A_l) \Rightarrow \mathbb{R}\backslash \bigcup_{i\in I} A_i \text{ ist nach oben beschränkt} \tag{16}$$

$$(\exists l \in I : -\infty \in A_l) \Rightarrow \mathbb{R}\backslash \bigcup_{i\in I} A_i \text{ ist nach unten beschränkt} \tag{17}$$

Für (16) reicht es wiederum das Supremum der fraglichen Menge abzuschätzen. Sei also $l \in I$ ein Index für den $+\infty \in A_l$ gilt:

$$\sup \mathbb{R}\backslash \bigcup_{i\in I} A_i = \sup \bigcap_{i\in I} (\mathbb{R}\backslash A_i) \leq \sup \mathbb{R}\backslash A_l \tag{18}$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist aber nach Voraussetzung $(A_l \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^\uparrow})$ endlich. Also ist die Vereinigung über alle A_i nach oben beschränkt. Der Beweis von (17) geht analog. $\square$

Aufgabe 5

Sei D wie in der Aufgabenstellung. Es ist zu zeigen, dass $\overline{D} = \mathbb{R}$ ist. "$\subseteq$" ist offensichtlich richtig, weil D eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist und $\mathbb{R}$ abgeschlossen ist.
Wir zeigen nun "$\supseteq$": Sei $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, falls $U_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$ gilt sind wir fertig. Sei $z := \frac{x-\varepsilon}{3} \in U_{\varepsilon/3}(x)$, dann gibt es nach der Folgerung von Beispiel 3 nach dem Vollständigkeitsaxiom von $\mathbb{R}$ im Skript ein $\frac{a}{b} \in]z, x[\cap \mathbb{Q}$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$. Wir approximieren nun $\frac{a}{b}$ durch einen Dezimalbruch:
Sei $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Wir definieren

$$y := \frac{\lfloor \frac{a}{b} 10^n \rfloor + 1}{10^n} \in D. \tag{19}$$

Der Abstand von y zu x ist

$$\begin{aligned} |y - x| \leq \left|y - \frac{a}{b}\right| + \left|\frac{a}{b} - x\right| &< \left|\frac{\lfloor \frac{a}{b} 10^n \rfloor + 1}{10^n} - \frac{a}{b}\right| + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\lfloor \frac{a}{b} 10^n \rfloor + 1}{10^n} - \frac{a}{b} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\overset{*}{\leq} \frac{a 10^n \frac{1}{b} + 1}{10^n} - \frac{a}{b} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{a}{b} + \frac{1}{10^n} - \frac{a}{b} + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon. \end{aligned} \tag{20}$$

Die mit $*$ gekennzeichnete Ungleichung gilt, weil nach Definition der Gausklammer gilt
$\forall x, y \in \mathbb{N} : \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor \leq \frac{x}{y} < \left\lfloor \frac{x}{y} \right\rfloor + 1$. Damit gilt insgesamt $y \in U_\varepsilon(x) \cap D$. $\square$