Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

(a)
- Es gilt
$$z_1 = \frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i.$$
- Wir sehen, dass $(1+i)^2 = 2i$, woraus $(1+i)^4 = -4$ und $z_2 = (1+i)^8 = 16$ folgt.
- Es gilt
$$z_3 = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2} = i.$$
- Mit $\tilde{z}_4 := \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$ gilt, dass $\tilde{z}_4^2 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ und $\tilde{z}_4^3 = -1$. Daraus folgt insbesondere, dass
$$\tilde{z}_4^{i+3} = \tilde{z}_4^i \cdot \tilde{z}_4^3 = -\tilde{z}_4^i$$
für $i \in \{1,2,3\}$. Für z_4 folgt also, dass $z_4 = \tilde{z}_4 + \tilde{z}_4^2 + \tilde{z}_4^3 - \tilde{z}_4 - \tilde{z}_4^2 - \tilde{z}_4^3 = 0$.

(b)
- In Polarkoordinaten (r,φ) gilt $1 = (1,0)$ und $i = (0, \frac{\pi}{2})$. Damit ist $\frac{1}{i}$ eine Drehstreckung der 1 mit Streckungsfaktor 1 und Drehfaktor $-\frac{\pi}{2}$. Folglich besitzt $\frac{1}{i}$ die Polardarstellung $(1, -\frac{\pi}{2})$ und es gilt $1/i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = -i\sin(\frac{\pi}{2}) = -1$.
- Die Polardarstellung von $(1+i)$ ist $(\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi)$, also besitzt z_2 die Polardarstellung $(\sqrt{2}^8, \frac{8}{4}\pi) = (16, 0)$, also $z_2 = 16$.
- Die Polardarstellung von $(1-i)$ ist $(\sqrt{2}, -\frac{1}{4}\pi)$, also besitzt z_3 die Polardarstellung $(\sqrt{2}/\sqrt{2}, \frac{1}{4}\pi - (-\frac{1}{4}\pi)) = (1, \frac{1}{2}\pi)$, und damit $z_3 = i$.
- Die Polardarstellung von $\tilde{z}_4$ ist $(1, \frac{1}{3}\pi)$, wobei eine kurze geometrische Überlegung den zweiten Wert als $\tan^{-1}(\sqrt{3})$ ergibt. Damit hat $\tilde{z}_4^3$ die Polardarstellung $(1, \pi)$ und ist somit eine Spiegelung am Ursprung. Insbesondere ist damit $\tilde{z}_4^n + \tilde{z}_4^{n+3} = 0$ und $z_4 = 0$.

Aufgabe 2

(a) Sei $n = \deg a \geq \deg b = m$ und gelte $a = \sum_{k=0}^n a_k x^k, b = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ mit komplexen Zahlen a_k, b_k und $a_n \neq 0 \neq b_m$. Wähle nun $z = \frac{a_n}{b_m}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} a - zx^{n-m}b &= \sum_{k=0}^n a_k x^k - z\sum_{k=0}^m b_k x^{n-m+k} = \sum_{k=0}^n a_k x^k - z\sum_{k=n-m}^n b_{k-n+m}x^k \\ &= \sum_{k=n-m}^n (a_k - zb_{k-n+m})x^k + \sum_{k=0}^{n-m-1} a_k x^k. \end{aligned}$$

Insbesondere ist der Summand für $k = n$ von der Form $(a_n - zb_m) = 0$, woraus $\deg(a - zx^{n-m}b) < n = \deg a$ folgt, was zu zeigen war.

(b) Nehme zuerst an, dass $\deg a < \deg b$. In diesem Fall können wir $q \equiv 0$, also q als das Nullpolynom (mit $\deg q = -\infty$) wählen. Damit gilt $\deg(a - qb) = \deg a < \deg b$.

Wir nehmen nun an, dass $\Delta := \deg a - \deg b$ und zeigen die Aussage mittels Induktion über Δ. Für den Induktionsanfang sei $\Delta \leq 0$, also $\deg a \leq \deg b$. Für $\deg a = \deg b$ folgt die Aussage dann nach Teilaufgabe (a), wir wählen q als das Konstante Polynom $z \in \mathbb{C}$ (mit z gewählt wie in (a)). Den Fall $\deg a < \deg b$ haben wir im obigen Absatz behandelt.

Sei nun also $\Delta > 0$ und gelte die Aussage für alle Polynome a', b' mit $\deg a' - \deg b' < \Delta$. Wir wenden Teilaufgabe (a) an und erhalten ein $z \in \mathbb{C}$, sodass $\deg a' < \deg a$ mit $a' = a - zx^{\Delta}b$. Wir definieren $q_1 := zx^{\Delta}$. Nun können wir jedoch die IV auf a' und b anwenden, da $\deg a' - \deg b < \Delta$. Sei q_2 das somit erhaltene Polynom. Wir definieren $q := q_1 + q_2$ und sehen, dass

$$\deg(a - qb) = \deg(a' - q_2 b) < \deg b.$$

(c) Wir wenden das induktive Schema aus Aufgabe (b) an. Sei dafür also zuerst $q_1 := x^3$. Dann folgt

$$a - q_1 b = ix^5 - x^4 + (1 - i)x^3.$$

Wir wählen $q_2 = ix^2$ und erhalten

$$a - (q_1 + q_2)b = -3x^4 - x^3 - (1 + i)x^2.$$

Wir wählen $q_3 := -3x$ und erhalten

$$a - (q_1 + q_2 + q_3)b = -(1 + 6i)x^3 + (2 - i)x^2 + (3 - 3i)x.$$

Wir wählen nun $q_4 := -(1+6i)$ und definieren $q := q_1+q_2+q_3+q_4 = x^3+ix^2-3x-(1+6i)$ sowie $r = a-qb = (14-3i)x^2+(4+3i)x-(7+5i)$, was die Polynome mit den gewünschten Eigenschaften liefert. Für das im Hinweis angedeutete Schema sei auf die Aufgabe (f) verwiesen.

(d) Wenn wir die Aussage aus (b) mit $a = p$ und $b = x - z$ anwenden, so erhalten wir dass es ein Polynom q gibt, sodass $p-(x-z)q = r$ mit $r \in \mathbb{C}[x]$ und $\deg r \in \{-\infty, 0\}$. Damit ist r ein konstantes Polynom. Jedoch gilt $p(z) - (z - z)q(z) = 0$, also muss $r(z) = 0$ und somit $r \equiv 0$. Hieraus folgt $p = (x - z)q$.

(e) Wir setzen $q_1 = x^3$ und erhalten $p - q_1(x - i) = -(1 + i)x^3 + (i - 2)x^2 + 2ix + 1$.

Wir setzen $q_2 = -(1 + i)x^2$ und erhalten $p - (q_1 + q_2)(x - i) = -x^2 + 2ix + 1$.

Wir setzen $q_3 = -x$ und erhalten $p - (q_1 + q_2 + q_3)(x - i) = ix + 1$.

Wählen wir nun $q_4 = i$ und $q = x^3 - (1 + i)x^2 - x + i$, so gilt $p - q(x - i) = 0$, also $p = (x - i)q$.

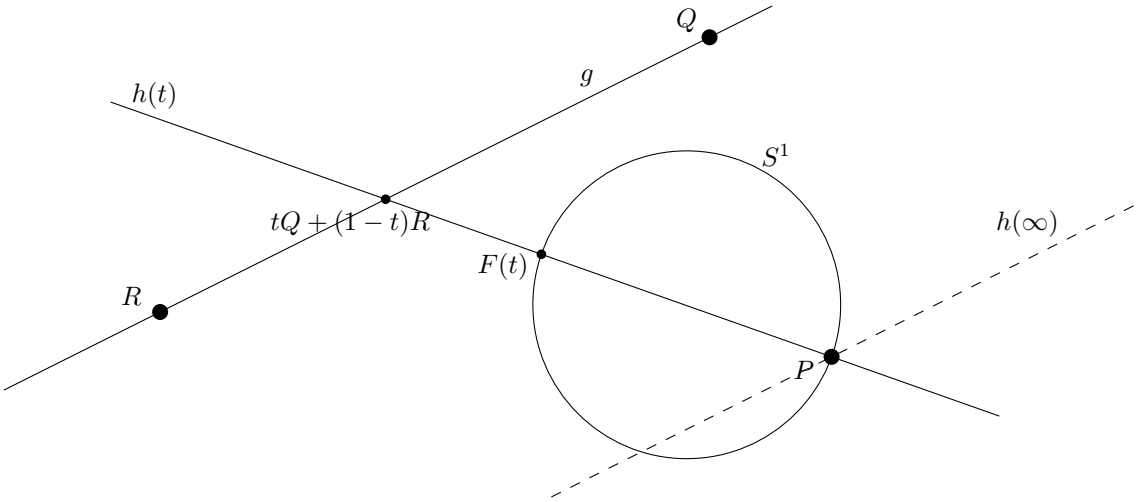
(f) Mit dem Hinweis wissen wir, dass $a_1 = i$ und $a_2 = -i$. Statt die beiden Linearfaktoren nacheinander abzuspalten, spalten wir direkt $(x - i)(x + i) = x^2 + 1$ ab. Im Polynomdivisionsschema ergibt sich damit

$$\begin{array}{rrr}
x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - 2x + 5\right). & & \\
\underline{-x^4 \qquad - x^2} & & \\
-2x^3 + 5x^2 - 2x & & \\
\underline{2x^3 \qquad + 2x} & & \\
5x^2 & + 5 & \\
\underline{-5x^2} & \underline{- 5} & \\
0 & &
\end{array}$$

Das Polynom $x^2 - 2x + 5$ besitzt die Nullstellen $a_3 = 1 + 2i$ sowie $a_4 = 1 - 2i$, womit die Linearfaktorzerlegung gefunden ist.

Aufgabe 3

Wir beginnen mit einer Skizze.



Sei $t \in \mathbb{R}$. Zur Übersichtlichkeit schreiben wir $(G_1(t), G_2(t)) = G(t) = tQ + (1-t)P$, wobei $Q = (q_1, q_2)$, etc. Die Gerade $h(t)$ können wir beschreiben als

$$h(t) = \{sG(t) + (1-s)P \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Der Punkt $F(t)$ liegt auf $h(t)$ und erfüllt $|F(t)|^2 = 1$. Die beiden Schnittpunkte mit S^1 ergeben sich, wenn s die folgende Gleichung erfüllt.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{2}(sg_i(t) + (1-s)p_i)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{2} s^2 g_i(t)^2 + s(1-s)g_i(t)p_i + (1-2s+s^2)p_i^2 = 1 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{2} s^2(g_i(t)^2 - g_i(t)p_i + p_i^2) + s(g_i(t)p_i - 2p_i^2) + p_i^2 = 1 \\
\Leftrightarrow &\sum_{i=1}^{2} s^2(g_i(t)^2 - g_i(t)p_i + p_i^2) + s(g_i(t)p_i - 2p_i^2) = 0,
\end{aligned}$$

da $|P| = 1$. Als nächstes beobachten wir, dass wir für $s = 0$ genau den Punkt P erhalten. Wir sind jedoch an dem zweiten Schnittpunkt mit S^1 interessiert, können also $s \neq 0$ annehmen und erhalten somit, dass $F(t)$ der von jenem s festgelegte Punkt auf $h(t)$ ist, sodass s die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{2} s(g_i(t)^2 - g_i(t)p_i + p_i^2) + (g_i(t)p_i - 2p_i^2) = 0$$

erfüllt. Dies führt zu

$$s = \frac{2 - \sum_{i=1}^{2} g_i(t)p_i}{1 + \sum_{i=1}^{2} g_i(t)^2 - g_i(t)p_i}$$

und daher

$$F(t) = sG(t) + (1-s)P.$$

Für $h(\infty)$ erhalten wir

$$h(\infty) = \{P + s(R-Q) \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Damit ist $F(\infty)$ also jener Punkt auf $h(\infty)$, dessen zugehöriger Parameter $s \neq 0$ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{2}(p_i + s(r_i - q_i))^2 = 1$$

erfüllt. Analoge Umformungen ergeben

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{2} p_i(q_i - r_i)}{\sum_{i=1}^{2}(r_i - q_i)^2},$$

Einsetzen in die Geradengleichung $h(\infty)$ ergibt den Funktionswert $F(\infty)$.
Umgekehrt ist $F^{-1}(X)$ für ein $X = (x_1, x_2)$ der t-Wert, dessen zugehöriger Punkt auf QR genau der Schnittpunkt der Geraden QR mit der Geraden XP ist. Wir nehmen an, $QR \nparallel XP$, dass also die beiden Geraden nicht parallel sind (in diesem Fall setzen wir $F^{-1}(X) = \infty$.
Wir suchen also ein Tupel $(s, t) \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$sx_i + (1 - s)p_i = tq_i + (1 - t)r_i$$

für $i \in \{1, 2\}$. Dies ist äquivalent zu

$$s = \frac{tq_i + (1 - t)r_i - p_i}{x_i - p_i}.$$

Setzen wir diese beiden Gleichung für $i = 1, 2$ gleich und multiplizieren die Nenner auf die jeweils andere Seite, so erhalten wir

$$(x_2 - p_2)(tq_1 + (1 - t)r_1 - p_1) = (x_1 - p_1)(tq_2 + (1 - t)r_2 - p_2),$$

was aufgelöst nach t

$$F^{-1}(X) = t = \frac{(x_1 - p_1)(r_2 - p_2) - (r_1 - p_1)(x_2 - p_2)}{(q_1 - r_1)(x_2 - p_2) - (q_2 - r_2)(x_1 - p_1)}$$

ergibt. *Bemerkung: Der Nenner ist genau dann 0, wenn RQ und PX linear abhängig, also parallel sind.*

Aufgabe 4

(a) Die Polardarstellung von ω_n ist $(1, 2\pi/n)$ und folglich ist die Polardarstellung von ω_n^n gleich $(1, 2\pi) = (1, 0)$, also $\omega_n^n = 1$.

(b) Die Polardarstellung von $1/\omega_n$ ist $(1, 0 - 2\pi/n) = (1, -2\pi/n)$, was ebenfalls die Polardarstellung von $\overline{\omega_n}$ ist.

(c) Wir zeigen zuerst die Inklusion "$\subseteq$". Sei hierfür $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$. Nach dem Hinweis existiert also ein $k \in \mathbb{Z}$, sodass z^n die Polardarstellung $(1, 2k\pi)$ hat. Folglich hat z die Polardarstellung $(1, \frac{k}{n}2\pi)$. Die ganze Zahl k' mit $k' := k + n$ liefert dieselbe Polardarstellung, denn $(1, \frac{k'}{n}2\pi) = (1, \frac{k}{n}2\pi + 2\pi) = (1, \frac{k}{n}2\pi)$, also ist z von der Form ω_n^k für ein $k \in \{0, \dots n - 1\}$.

Wir zeigen nun "$\supseteq$". Sei also hierfür $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ gegeben. Damit hat $(\omega_n^k)^n$ die Polardarstellung $(1, \frac{kn}{n}2\pi) = (1, 2k\pi)$ und folglich mit dem Hinweis $(\omega_n^k)^n = 1$.

(d) Erneut zeigen wir zuerst "$\subseteq$". Sei dafür ein $z \in \mathbb{C}$ gegeben, sodass $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$. Hieraus folgt sofort, dass $z \neq 1$. Wir nutzen nun die Identität der geometrischen Summe, die laut Bemerkung aus der Vorlesung auch für komplexe Zahlen gilt. Also

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

und somit $1 - z^n = 0$. Es ist also $z^n = 1$ und mit Teilaufgabe (c) folgt $z = \omega_n^k$ für ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Für die Inklusion "$\supseteq$" sei $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gegeben. Da insbesondere $k \neq 0$ ist $\omega_n^k \neq 1$ (denn $\frac{k}{n2\pi} \notin \mathbb{Z}$). Wieder unter Verwendung der geometrischen Summe folgt

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^k)^j = \frac{1 - (\omega_n^k)^n}{1 - \omega_n^k} = 0,$$

wobei für die letzte Identität Teilaufgabe (c), nämlich $(\omega_n^k)^n = 1$, verwendet wurde.

(e) Die beiden Identitäten folgen direkt aus (c),(d) (da hier gezeigt wird, dass die jeweiligen Faktoren Nullstellen des Polynoms sind) und T4.2 (d).

(f) Sei zuerst $k = l$. Dann ist

$$\overline{\omega_n^{kj}} \omega_n^{kj} = (\overline{\omega_n} \omega_n)^{kj} = |\omega_n|^{2kj} = 1^{2kj} = 1,$$

womit die Summe zu $\sum_{j=0}^{n-1} 1 = n$ vereinfacht werden kann.

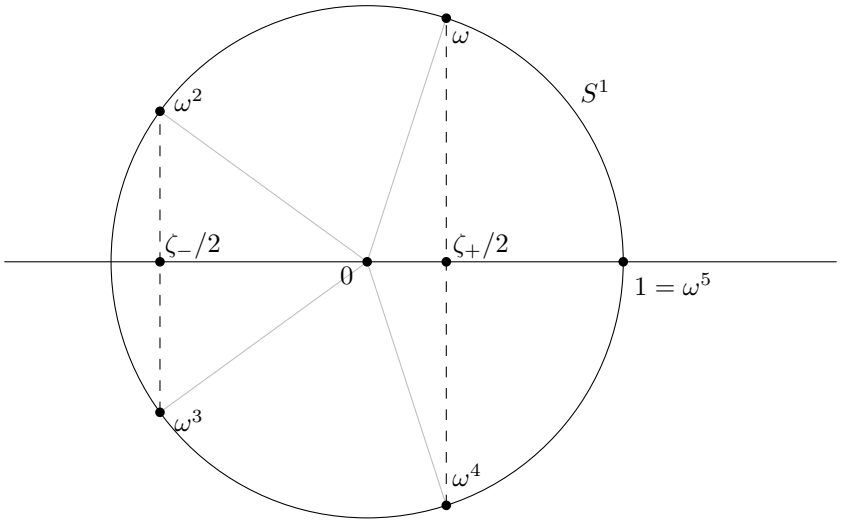
Sei also nun $k \neq l$, so gilt mit Aufgabe (b), dass $\overline{\omega_n^l} \omega_n^k = \frac{\omega_n^k}{\omega_n^l} = \omega_n^{k-l} \neq 1$. Also

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{jl}} \omega_n^{jk} &= \sum_{j=0}^{n-1} (\overline{\omega_n^l} \omega_n^k)^j = \sum_{j=0}^{n-1} (\omega_n^{k-l})^j \\ &= \frac{1 - \omega_n^{(k-l)n}}{1 - \omega_n^{k-l}} = \frac{1 - (\omega_n^n)^{k-l}}{1 - \omega_n^{k-l}} = \frac{1-1}{1 - \omega_n^{k-l}} = 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Die Polardarstellung von ω^4 ist $(1, \frac{4}{5}2\pi) = (1, -\frac{1}{5}2\pi)$ und damit $\omega^4 = \overline{\omega}$. Also $2 \operatorname{Re} \omega = \omega + \overline{\omega} = \zeta_+$. Die zweite Identität gilt mit analogem Beweis.

(b) Eine mögliche Skizze ist die folgende.



(c) Es gilt

$$\zeta_+ + \zeta_- + 1 = \sum_{k=0}^{4} \omega^k = 0,$$

wobei für die zweite Identität Aufgabe T4.4(d) verwendet wurde. Des Weiteren gilt mit Aufgabe T4.4(b), dass

$$\begin{aligned}\zeta_+ \cdot \zeta_- &= (\omega + \overline{\omega})(\omega^2 + \overline{\omega^2}) = (\omega + \tfrac{1}{\omega})(\omega^2 + \tfrac{1}{\omega^2}) \\ &= \omega^3 + \omega + \tfrac{1}{\omega} + \tfrac{1}{\omega^3} = \omega^3 + \omega + \omega^4 + \omega^2 = -1.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$(x - \zeta_+)(x - \zeta_-) = x^2 - (\zeta_+ + \zeta_-)x + \zeta_+ \cdot \zeta_- = x^2 + x - 1.$$

Insbesondere sind also ζ_+ und ζ_- Nullstellen des Polynoms $x^2 + x - 1$. Aus $\cos(2\pi/5) > \cos(4\pi/5)$ folgt $\zeta_+ > \zeta_-$ und damit durch Lösen der quadratischen Gleichung die explizite Darstellung $\zeta_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

(d) Per Definition gilt $\operatorname{Re}\,\omega = \zeta_+/2$. Des Weiteren gilt $1 = |\omega|^2 = (\operatorname{Re}\,\omega)^2 + \operatorname{Im}\,\omega^2$ und folglich

$$\operatorname{Im}\,\omega = \sqrt{1 - \left(\frac{\zeta_+}{2}\right)^2},$$

was zur gesuchten Darstellung führt. Einsetzen von ζ_+ liefert die zweite Identität. Weiterhin folgt

$$\cos(72^\circ) = \cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \quad \sin(72^\circ) = \sin(2\pi/5) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}}.$$