Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wir führen hier noch einmal die Axiome der reellen Zahlen auf um uns besser auf sie in der Lösung der Aufgabe beziehen zu können:

$$(\mathbb{R},+) \text{ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element } 1 \tag{Ka}$$

$$(\mathbb{R},\cdot) \text{ ist eine abelsche Gruppe mit neutralem Element } 0 \tag{Kb}$$

Es gilt das Distributivgesetz:

$$\forall a,b,c \in \mathbb{R} : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \tag{Kc}$$

Auf $\mathbb{R}$ ist eine einstellige Relation positiv definiert, also eine Teilmenge $\mathbb{R}^+$ von $\mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\text{für jedes } x \in \mathbb{R} \text{ gilt genau eine der Relationen } x \in \mathbb{R}^+, x = 0, -x \in \mathbb{R}^+ \tag{Aa}$$

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : (x \in \mathbb{R}^+ \wedge y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+ \wedge x \cdot y \in \mathbb{R}^+) \tag{Ab}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}_0 : n > x \tag{Archa}$$

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N}_0 : \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{Archb}$$

$$\text{Jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge von } \mathbb{R} \text{ besitzt ein Supremum} \tag{Voll}$$

Nun zur Lösung der Aufgabe:

1a) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gelte $b < c$, dann

$$b < c \Leftrightarrow (c-b) \in \mathbb{R}^+. \tag{1}$$

Diesen Ausdruck können wir jedoch umschreiben:

$$c - b \overset{\text{(Ka)}}{=} c + 0 - b \overset{\text{(Ka)}}{=} c + a - a - b \overset{\text{(Ka)}}{=} ((c+a) - (a+b)) \in \mathbb{R}^+ \tag{2}$$

Also auch $b + a < c + a$. □

1b) Seien $a,b,c \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gelte $a > 0, b < c$. Das bedeutet also $(c-b) \in \mathbb{R}^+$:

$$c - b \overset{\text{(Ab)}}{\Rightarrow} a \cdot (c-b) \in \mathbb{R}^+. \tag{3}$$

Wir finden dann mit den Körperaxiomen:

$$a \cdot (c-b) \overset{\text{(Kc)}}{=} a \cdot c - a \cdot b. \tag{4}$$

Also insgesamt $(a \cdot c - a \cdot b) \in \mathbb{R}^+$, also $a \cdot b < a \cdot c$ □

1c) Ich zeige erst einige elementare Eigenschaften von reellen Zahlen bevor ich die Aufgabe selbst bearbeite:

Behauptung (B)**.** *Es gilt:*

$$\forall c \in \mathbb{R}^+ : c^{-1} \in \mathbb{R}^+. \tag{B}$$

Beweis durch Widerspruch: nehme an, dass $c^{-1} = 0 \vee -c^{-1} \in \mathbb{R}^+$
Fall 1, $c^{-1} = 0$: Dieser Fall wird ausgeschlossen, weil $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und daher auch nach (Kb): $c^{-1} \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist.
Fall 2, $-c^{-1} \in \mathbb{R}^+$: In diesem Fall gilt $c(-c^{-1}) \in \mathbb{R}^+$, wegen (Ab), also auch:

$$1+c(-c^{-1}) \overset{\text{(Kb)}}{=} c\cdot c^{-1}+c\cdot(-1)\cdot c^{-1} \overset{\text{(Kb)}}{=} c\cdot c^{-1}+(-1)\cdot c\cdot c^{-1} \overset{\text{(Kb)}}{=} c\cdot c^{-1}-(c\cdot c^{-1}) \overset{\text{(Ka)}}{=} 0. \tag{5}$$

Die linke Seite der Gleichung ist positiv, während es die rechte Seite nicht ist, was ebenfalls ein Widerspruch ist. Es gelten also weder Fall 1 noch Fall 2, woraus die Behauptung folgt.

Nun zur Aufgabe. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ beliebig, es gelte $b < c$, also $(c - b) \in \mathbb{R}^+$. Mit (Ab) und (B) folgt $a(c - b) \cdot c^{-1} \cdot b^{-1} \in \mathbb{R}^+$. Außerdem gilt

$$a(c-b)\cdot c^{-1}\cdot b^{-1} = (a\cdot b^{-1} - a\cdot c^{-1}). \tag{6}$$

Was gleichbedeutend ist mit $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$. □

Aufgabe 2

Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig, wir definieren: $Z := \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$.
Der Beweis von $\sup Z = a$ geht in zwei Schritten:

Behauptung (B1)**.** *Eine obere Schranke von Z ist a.*

Beweis: Sei $l \in Z$ beliebig, dann gilt $l < a$.

Behauptung (B2)**.** *Es gibt keine obere Schranke von Z, die kleiner ist als a.*

Beweis durch Widerspruch: nehme an, dass b eine obere Schranke von Z ist und $b < a$ gilt, dann folgt:

$$b < \frac{a+b}{2} < a. \tag{7}$$

Aufgrund der zweiten Ungleichheit gilt also $\frac{a+b}{2} \in Z$ und aufgrund der ersten Ungleichung kann b keine obere Schranke von Z sein. □

Aufgabe 3

3a) Seien $a > 1, \varepsilon > 0$ beliebig. Wir definieren $0 < \gamma := a - 1$. Es gilt für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ unter Verwendung der Bernoulli Ungleichung (Im Skript das erste Beispiel für das Prinzip der Vollständigen Induktion, Seite 23):

$$a^m = (1+\gamma)^m \geq 1 + m\gamma. \tag{8}$$

Nach dem Archimedischen Axiom (Archa) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass:

$$n > \frac{1}{\gamma\varepsilon}. \tag{9}$$

Für dieses n folgt dann also:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n\gamma < 1 + n\gamma \leq (1+\gamma)^n = a^n \Rightarrow \frac{1}{a^n} < \varepsilon. \tag{10}$$

□

3b) Aus Teilaufgabe a) folgt für ein beliebiges $a > 1 : \forall \varepsilon > 0 : 0 \leq \inf\{\frac{1}{a^n} | n \in \mathbb{N}\} < \varepsilon$. Daraus folgt, dass $\inf\{\frac{1}{a^n} | n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Aufgabe 4

4a)

Behauptung. *$A + B$ ist nichtleer*

Beweis: Sei $a \in A, b \in B$, dann ist $a + b \in A + B$.

Behauptung. *$A + B$ ist von oben beschränkt*

Beweis: A und B sind jeweils nicht leer und von oben beschränkt, besitzen also ein Supremum. Definiere $\alpha := \sup A, \beta := \sup B$, dann gilt:

$$\forall c \in A + B : \exists a \in A, b \in B : c = a + b \leq \alpha + b \leq \alpha + \beta. \tag{11}$$

Behauptung. *$A + B$ hat keine kleinere obere Schranke als $\alpha + \beta$*

Beweis durch Widerspruch: Nehme an, dass es eine obere Schranke $\gamma < \alpha + \beta$ gäbe. Nun ist α die kleinste obere Schranke von A, also ist $A \cap]\alpha - \frac{\alpha+\beta-\gamma}{3}, \alpha]$ nicht leer, das gleiche gilt für $B \cap]\beta - \frac{\alpha+\beta-\gamma}{3}, \beta]$. Sei daher $a_0 \in A \cap]\alpha - \frac{\alpha+\beta-\gamma}{3}, \alpha], b_0 \in B \cap]\beta - \frac{\alpha+\beta-\gamma}{3}, \beta]$, dann gilt:

$$a_0 + b_0 \geq \alpha - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3} + \beta - \frac{\alpha + \beta - \gamma}{3} = \frac{\alpha + \beta}{3} + \frac{2\gamma}{3} > \frac{3\gamma}{3} = \gamma. \tag{12}$$

Weil aber auch $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ ist, ist $a_0 + b_0 \in A + B$. Dieses Element von $A + B$ ist aber größer als γ, also kann γ keine obere Schranke von $A + B$ sein. □

4b)

Behauptung. *$A \cdot B$ ist nichtleer*

Beweis: Sei $a \in A, b \in B$, dann ist $ab \in A \cdot B$.

Behauptung. *$A \cdot B$ ist von oben beschränkt*

Beweis: A und B sind jeweils nicht leer und von oben beschränkt, besitzen also ein Supremum. Definiere $\alpha := \sup A, \beta := \sup B$, dann gilt:

$$\forall c \in A \cdot B : \exists a \in A, b \in B : c = ab \leq \alpha b \leq \alpha\beta. \tag{13}$$

Behauptung. *$A \cdot B$ hat keine kleinere obere Schranke als $\alpha\beta$*

Beweis durch Widerspruch: Nehme an, dass es eine obere Schranke $\gamma < \alpha \cdot \beta$ gäbe. Es gilt also $1 > \frac{\gamma}{\alpha\beta}$. Wir wählen $\delta_1 \in]\frac{\gamma}{\alpha\beta}, 1[, \delta_2 \in]\frac{\gamma}{\alpha\beta\delta_1}, 1[$. Hierbei ist das Intervall aus dem wir δ_2 wählen nicht leer, weil: $\frac{\gamma}{\alpha\beta\delta_1} < \frac{\gamma}{\alpha\beta\frac{\gamma}{\alpha\beta}} = 1$.
Nun ist α die kleinste obere Schranke von A, also ist $A \cap]\alpha\delta_1, \alpha]$ nicht leer, das gleiche gilt für $B \cap]\beta\delta_2, \beta]$. Sei daher $a_0 \in A \cap]\alpha\delta_1, \alpha], \quad b_0 \in B \cap]\beta\delta_2, \beta]$, dann gilt:

$$a_0 b_0 \geq \alpha\delta_1\beta\delta_2 > \alpha\beta\delta_1 \frac{\gamma}{\alpha\beta\delta_1} = \gamma. \tag{14}$$

Weil aber auch $a_0 \in A$ und $b_0 \in B$ ist, ist $a_0 b_0 \in A \cdot B$. Dieses Element von $A \cdot B$ ist aber größer als γ, also kann γ keine obere Schranke von $A \cdot B$ sein. □

4c) Definiere: $\alpha := \inf A$, laut Aufgabenstellung gilt $\alpha > 0$.

Behauptung. *A^{-1} ist nichtleer*

Beweis: Sei $a \in A$, dann ist $\frac{1}{a} \in A^{-1}$.

Behauptung. *A^{-1} ist von oben beschränkt durch α^{-1} beschränkt.*

Beweis: Sei $a \in A$, dann gilt: $a \geq \alpha \Leftrightarrow \alpha^{-1} \geq a^{-1}$.

Behauptung. *A^{-1} hat keine kleinere obere Schranke als α^{-1}.*

Beweis: Sei β^{-1} eine obere Schranke von A^{-1}. Dann gilt für jedes $a^{-1} \in A^{-1}$: $a^{-1} \leq \beta^{-1}$ und daher auch $a \geq \beta$. Nun ist α die größte untere Schranke von A. Es gilt also: $a \geq \alpha \geq \beta$ und daher $\alpha^{-1} \leq \beta^{-1}$, also ist α^{-1} die kleinste obere Schranke. □

Aufgabe 5

Behauptung. *Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ dann gilt:*

$$a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2. \tag{Mon}$$

Beweis: Der Beweis besteht jeweils aus einer kurzen Rechnung. "$\Rightarrow$": Sei $a, b \in \mathbb{R}^+$ und sei $a > b$, dann gilt:

$$a > b \Rightarrow a^2 > ab > b^2. \tag{15}$$

"$\Leftarrow$": Sei $a, b \in \mathbb{R}^+$, so dass $a^2 > b^2$ gilt. Beweis durch Widerspruch: Nehme an$a \leq b$. Dann gilt:

$$a \leq b \Rightarrow a^2 \leq ab \leq b^2, \tag{16}$$

was im Widerspruch zu $a^2 > b^2$ steht, die Annahme $a \leq b$ ist also falsch.

Nun zur Aufgabe, sei $a \in \mathbb{R}^+$(für den Rest von Aufgabe 5).

5a) Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1 $a \leq 1$:
Wir zeigen zuerst, dass $Q(a)$ nicht leer ist. Es gilt:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{aa}{4} \leq \frac{a}{4} < a. \tag{17}$$

Also ist $\frac{a}{2} \in Q(a)$. Nun zur Schranke, sei $x \in Q(a)$, dann gilt:

$$x^2 < a \leq 1 = 1^2 \Rightarrow x < 1. \tag{18}$$

Wobei (Mon) für den Schluss verwendet wurde. 1 ist also eine obere Schranke von $Q(a)$.
Fall 2 $a > 1$:
In diesem Fall ist $1 \in Q(a)$, weil $1^2 = 1 < a$ ist. Es gilt außerdem für jedes $x \in Q(a)$:

$$x^2 < a < a^2 \overset{\text{(Mon)}}{\Rightarrow} x < a. \tag{19}$$

Also ist a eine obere Schranke von $Q(a)$.

5b)

Behauptung. *Es gilt:*

$$\forall A, B \subset \mathbb{R} : \exists \sup A \in \mathbb{R} \wedge \exists \sup B \in \mathbb{R} \wedge A \subseteq B \Rightarrow \sup A \leq \sup B. \tag{sup}$$

Beweis: Es gilt $\forall b \in B : b \leq \sup B$. Sei $c \in A \subseteq B$, also ist $c \in B$ und daher auch $c \leq \sup B$. Eine obere Schranke von A ist also $\sup B$ und daher ist es auch größer oder gleich $\sup A$, der kleinsten oberen Schranke von A.
Nun zurück zur Aufgabe: $\sqrt{a} > 0$ gilt, weil die in Teilaufgabe a) angeführten Elemente von $Q(a)$ größer als 0 sind und $\sqrt{a}$ eine obere Schranke von $Q(a)$ ist.
Wir zeigen "=", indem wir "$\leq$" und "$\geq$" zeigen:
Fall 1 "$\geq$":

$$\begin{aligned}\sqrt{a}^2 &= \sqrt{a}\sqrt{a} = \sup Q(a) \sup Q(a) \overset{4b)}{=} \sup(Q(a)Q(a)) \\ &= \sup\{xy \mid x^2 < a, y^2 < a\} \overset{(\sup)}{\geq} \sup\{xy|x^2 < a, x = y\} = \sup\{x^2|x^2 < a\} = a.\end{aligned} \tag{20}$$

Fall 2 "$\leq$":

$$\begin{aligned}\sqrt{a}^2 &= \sup\{xy|x^2 < a, y^2 < a\} = \sup\left\{ \begin{Bmatrix} xy \text{ falls } x \geq y \\ xy \text{ falls } x < y \end{Bmatrix} \middle| x^2 < a, y^2 < a \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \begin{Bmatrix} x^2 \text{ falls } x \geq y \\ y^2 \text{ falls } x < y \end{Bmatrix} \middle| x^2 < a, y^2 < a \right\} \leq \sup\left\{ \begin{Bmatrix} a \text{ falls } x \geq y \\ a \text{ falls } x < y \end{Bmatrix} \middle| x^2 < a, y^2 < a \right\} \overset{\text{Aufgabe 2}}{=} a.\end{aligned} \tag{21}$$

□

5c) Der Beweis folgt aus Aufgabe 5d) und Aufgabe 5b), es gilt:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{aa} \overset{d)}{=} \sqrt{a}\sqrt{a} = \sqrt{a}^2 \overset{b)}{=} a. \tag{22}$$

□

5d) Beweis: Sei $b \in \mathbb{R}^+$. Wir zeigen Gleichheit durch Fallunterscheidung:
Fall 1 "$\leq$ ":

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &= \sup\{x > 0|x^2 < ab\} \overset{(\sup)}{\leq} \sup\{zy|y, z > 0, z^2 < a, y^2 < b\} \\ &\overset{4b)}{=} \sup Q(a) \sup Q(b) = \sqrt{a}\sqrt{b}.\end{aligned} \tag{23}$$

Fall 1 "$\geq$ ":

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} &= \sup\{x > 0|x^2 < ab\} \overset{\text{wähle: } x=\sqrt{a}z}{\geq} \sup\{\sqrt{a}z|z > 0, (\sqrt{a}z)^2 < ab\} \\ &\overset{5b)}{=} \sup\{\sqrt{a}z \mid z > 0, z^2 < b\} \overset{(i)}{=} \sqrt{a} \sup\{z|z > 0, z^2 < b\} = \sqrt{a}\sqrt{b}.\end{aligned} \tag{24}$$

Für das mit (i) gekennzeichnete Gleichheitszeichen wurde Aufgabe 4b) verwendet mit $A = \{\sqrt{a}\}$ und $B = Q(b)$. □