Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Sei $\varphi(m) = \big[\forall a, b \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{m}(a+nb) = (m+1)(a+mb/2)\big]$. Wir beweisen $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \varphi(m)$ mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang ($\varphi(0)$ bzw. $m = 0$) Es gilt

$$\sum_{n=0}^{0}(a+nb) = a + 0 \cdot b = a = (0+1)(a + 0 \cdot b/2).$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben und es gelte $\varphi(m)$.

Induktionsschritt ($\varphi(m) \Rightarrow \varphi(m+1)$ bzw. $m \to m+1$) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N(m)}(a+nb) = \sum_{n=0}^{m+1}(a+nb) &= \sum_{n=0}^{m}(a+nb) + (a+(m+1)b)\\ &\overset{\text{IV}}{=} (m+1)(a+mb/2) + (a+(m+1)b) = (m+2)a + (m+1)(mb/2+b)\\ &= (m+2)a + (m+1)((m+2)b/2) = (m+2)\big(a+(m+1)b/2\big).\end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt abgeschlossen und die Behauptung gezeigt. □

Aufgabe 2

Es gilt

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{4}(1 \pm 2\sqrt{5} + 5) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}) + 1 = \omega_\pm + 1.$$

Sei $\varphi(n) = [f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^n - \omega_-^n)]$. Erneut zeigen wir $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(n)$ via Induktion.

Induktionsanfang ($\varphi(0) \wedge \varphi(1)$ bzw. $n = 0, n = 1$) Da die Rekursion sich auf die zwei Vorgängerwerte bezieht, ist ein doppelter Induktionsanfang vonnöten (siehe H2.2 für das Schema).

$$f_0 = 0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+^0 - \omega_-^0), \quad f_1 = 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\omega_+ - \omega_-).$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und es gelte $\varphi(n-1) \wedge \varphi(n)$.

Induktionsschritt ($(\varphi(n-1) \wedge \varphi(n)) \Rightarrow \varphi(n+1)$ bzw. $n-1, n \to n+1$) Es gilt

$$\begin{aligned}\sqrt{5}f_{n+1} &= \sqrt{5}f_n + \sqrt{5}f_{n-1} \overset{\text{IV}}{=} \omega_+^n - \omega_-^n + \omega_+^{n-1} - \omega_-^{n-1}\\ &= \omega_+^{n-1}(\omega_+ + 1) - \omega_-^{n-1}(\omega_- + 1) \overset{(*)}{=} \omega_+^{n-1}(\omega_+^2) - \omega_-^{n-1}(\omega_-^2)\\ &= \omega_+^{n+1} - \omega_-^{n+1},\end{aligned}$$

wobei für $(*)$ die Beobachtung verwendet wurde. □

Aufgabe 3

Wir nennen die drei Zeilen der Definition $(i), (ii)$ und (iii) und beginnen mit folgenden Beobachtungen, von denen wir die ersten beiden mittels Induktion über $m \in \mathbb{N}_0$ beweisen:

Behauptung (B0)**.** *Jede natürliche Zahl außer der Null besitzt einen Vorgänger, also*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists n' \in \mathbb{N}_0 : N(n') = n.$$

Diese Aussage wird im Folgenden wiederholt benutzt. Sie folgt aus dem Induktionsschema der Peano-Axiome und wird als Übung überlassen.

Behauptung (B1)**.** $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : \neg(m < m)$.

Der Induktionsanfang $(m = 0)$ folgt direkt aus (i). Sei also $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben, dann gilt $\neg(N(m) < N(m)) \Leftrightarrow \neg(m < m)$ wegen (iii). Jedoch ist $\neg(m < m)$ nach Induktionsvoraussetzung wahr, und somit ist der Induktionsschritt abgeschlossen.

Behauptung (B2)**.** $\forall\, m \in \mathbb{N}_0 : m < N(m)$.

Der Induktionsanfang $(m = 0)$ folgt direkt aus (ii). Sei also $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben, dann gilt $N(m) < N(N(m)) \Leftrightarrow m < N(m)$ wegen (iii). Jedoch ist $m < N(m)$ nach Induktionsvoraussetzung wahr, und somit ist der Induktionsschritt abgeschlossen.

Behauptung (B3)**.** $\forall\, m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_0 : N(n) \leq N(m) \Leftrightarrow n \leq m$.

„$\Rightarrow$“ Wir unterscheiden zwei Fälle: Falls einerseits $N(n) < N(m)$, so folgt die Aussage nach (iii). Falls andererseits $N(n) = N(m)$, so gilt $m = n$ nach Eindeutigkeit der Nachfolgerfuntion N.
„$\Leftarrow$“ Mit derselben Fallunterscheidung: Falls $n < m$, so folgt die Behauptung mit (iii) falls $n = m$, so auch $N(n) = N(m)$ und insbesondere $N(n) \leq N(m)$.

Behauptung (B4)**.** *Die Kleiner- und Kleinergleich-Relationen sind transitiv, also* $\forall\, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : (l < m, m < n \Rightarrow l < n)$ *sowie* $\forall\, l, m, n \in \mathbb{N}_0 : (l \leq m, m \leq n \Rightarrow l \leq n)$.

Seien $l, m, n \in \mathbb{N}_0$ und gelte $l < m < n$. Wir beweisen die Aussage via Induktion über l. Sei für den Induktionsanfang $l = 0$. Dann ist zu zeigen, dass $0 < n$. Hierfür beobachten wir zuerst, dass $n \neq 0$, was aus $m < n$ und (i) folgt. Es existiert damit $n' \in \mathbb{N}_0$, sodass $N(n') = n$. Also nach (ii) $0 < N(n') = n$.
Für den Induktionsschritt gelte die Aussage für l, m, n und gelte des Weiteren $N(l) < m < n$. Erneut folgt mit (i), dass $m \neq 0 \neq n$ und somit Vorgänger m' und n' existieren mit $N(m') = m$ sowie $N(n') = n$. Aus (iii) folgt damit $l < m'$ sowie $m' < n'$. Per IV erhalten wir also $l < n'$ und erneute Anwendung von (iii) liefert $N(l) < N(n') = n$.

(a) Es gilt

$$N(1) = 2 < 4 = N(3) \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} 1 < 3 \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} 0 < 2 = N(1).$$

Die letzte Aussage ist nach (i) wahr. □

(b) Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also an, dass $4 < 2$. Dann

$$4 < 2 \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} 3 < 1 \overset{(iii)}{\Leftrightarrow} 2 < 0.$$

Die letzte Aussage ist nach (i) unwahr, also ist $\neg(4 < 2)$ wahr. □

(c) „$\Rightarrow$“ Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, dass $n \leq m$. Dann gilt $n \leq m < N(m)$ nach (B2) und somit $n < N(m)$ nach (B4).

„$\Leftarrow$“ Sei $\psi(m, n) = [(n < N(m)) \Rightarrow (n \leq m)]$ für $n, m \in N_0$ und sei $\varphi(n) = [\forall m \in N_0 : \psi(m, n)]$. Wir zeigen $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(n)$ via Induktion.

Induktionsanfang $(n = 0)$ Zu zeigen ist hier: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \psi(m, 0)$. Falls $m = 0$, so ist $0 \leq 0$ wahr. Falls $m \neq 0$, so existiert ein Vorgänger m' mit $N(m') = m$ und somit $0 < N(m') = m$, also insbesondere $0 \leq m$. Damit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsvoraussetzung Es seien $n \in \mathbb{N}_0$ gegeben und es gelte gelte $\varphi(n)$, also $\psi(m, n)$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt ($n \to N(n)$) Zu zeigen ist: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \psi(m, N(n))$ unter der IV. Wir beweisen diese Aussage via Induktion über m (verwenden also eine doppelte Induktion). Sei für den Induktionsanfang $m = 0$, dann ist zu zeigen, dass $\psi(0, N(n))$ gilt. Wir nehmen also an, es sei $N(n) < N(0)$. Nach (iii) gilt dann allerdings $n < 0$, was keine wahre Aussage ist. Damit folgt auch das zu Zeigende.

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, $\psi(m, N(n))$ gilt für ein $m \in \mathbb{N}_0$. Zu zeigen ist, dass hieraus $\psi(N(m), N(n))$ folgt. Es gilt

$$N(n) < N(N(m)) \overset{(iii)}{\Rightarrow} n < N(m) \overset{\text{IV}}{\Rightarrow} n \leq m \overset{\text{(B3)}}{\Rightarrow} N(n) \leq N(m),$$

was zu zeigen war. □

(d) „⇒“ Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n < m$ gegeben. Wir nehmen an, das zu Zeigende gilt nicht, es gilt also $m \leq n$. Damit ist also $n < m \leq n$ und insbesondere $n < n$ nach (B4). Dies steht im Widerspruch zu (B1). Also muss $\neg(m \leq n)$ gelten.

„⇐“ Wieder beweisen wir die Aussage mit doppelter Induktion, vereinfachen das in (c) genutzte Schema jedoch wie folgt.

Induktionsanfang ($n = 0 \vee m = 0$) Wir betrachten zuersten den Fall, dass $m = 0, n \in \mathbb{N}_0$ und nehmen an, es gelte $\neg(0 \leq n)$. Da dies eine falsche Aussage ist, folgt auch $n < 0$.

Sei für den zweiten Fall nun also $n = 0, m \in \mathbb{N}_0$ und gelte $\neg(m \leq 0)$. Damit ist also $m \neq 0$ und besitzt einen Vorgänger m' mit $N(m') = m$. Die Aussage $0 < N(m') = m$ ist nach (ii) wahr.

Induktionsvoraussetzung Es seien $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $(\neg(m \leq n) \Rightarrow n < m)$.

Induktionsschritt ($(n, m) \to (N(n), N(m))$) Wir gehen über Kontraposition und nehmen an, es gelte $\neg(N(n) < N(m))$. Hieraus folgern wir $N(m) \leq N(n)$, was den Induktionsschritt beweist. Es gilt

$$\neg(N(n) < N(m)) \overset{(iii)}{\Rightarrow} \neg(n < m) \overset{\text{IV}}{\Rightarrow} m \leq n \overset{\text{(B3)}}{\Rightarrow} N(m) \leq N(n),$$

was die Behauptung war. □

Aufgabe 4

Wir nehmen an, M besitzt kein kleinstes Element und zeigen, dass dann $M = \emptyset$ gilt. Dazu zeigen wir via Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $n \notin M$. Formal zeigen wir $\psi(n) = [(M \text{ besitzt kein kleinstes Element}) \Rightarrow (\forall m \leq n : m \notin M)]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang ($n = 1$) Der Induktionsanfang ist klar, da 1 die kleinste Zahl in $\mathbb{N}$ ist und somit auch kleinstes Element von M falls $1 \in M$. Da M kein kleinstes Element enthält, muss $1 \notin M$.

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\psi(n)$.

Induktionsschritt ($\psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$ bzw. $n \to n+1$) Wir wissen per Induktionsvoraussetzung, dass $\{1, 2, \dots, n\} \cap M = \emptyset$. Falls also $n+1 \in M$, so wäre $n+1$ ein kleinstes Element in M. Da M kein kleinstes Element enthält, gilt $n+1 \notin M$, also gilt $\psi(n+1)$. Dies schließt den Induktionsschritt ab.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ haben wir also gezeigt, dass $n \notin M$. Daher muss $\mathbb{N} \cap M = \emptyset$. Da jedoch $M \subseteq \mathbb{N}$, folgt $M = \emptyset$. Da jedoch $M \neq \emptyset$, ist die Annahne, M besitze kein kleinstes Element, falsch. □

Aufgabe 5

Wir zeigen mittels Induktion, dass eine wie in der Angabe definierte Funktion f für jeden Wert $n \in \mathbb{N}_0$ genau einen Wert annehmen kann. Wenn dies erfüllt ist, so gibt es genau eine solche Abbildung.

Induktionsanfang ($n = 0$) Der Induktionsanfang ist klar, da $f(0) = a$ eindeutig ist.

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und es sei $f(n)$ eindeutig bestimmt.

Induktionsschritt ($n \to n+1$) Wegen $f(n+1) = g(n, f(n))$ gilt mit der Induktionsvoraussetzung, dass $g(n, f(n))$ zu den eindeutigen Argumenten $(n, f(n))$ als Abbildung einen eindeutigen Wert ausgibt, also $f(n+1)$ eindeutig ist. □

Eine alternative Lösung ist die folgende: Seien f_1, f_2 zwei Abbildungen, welche die rekursive Definition der Angabe erfüllen. Wir zeigen via Induktion, dass $f_1(n) = f_2(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Der Induktionsanfang ist klar, da $f_1(0) = a = f_2(0)$. Sei nun also $n \in \mathbb{N}_0$ und gelte $f_1(n) = f_2(n)$. Dann

$$f_1(n+1) = g(n, f_1(n)) \overset{\text{IV}}{=} g(n, f_2(n)) = f_2(n+1),$$

was den Induktionsschritt zeigt. Also $f_1 = f_2$. □