Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wir berechnen die Länge der beiden Kurven mit dem im Skript angegebenen Integral.

a): Es gilt

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x\right)^2}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\sqrt{1+\sinh^2 x}\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}\cosh x\mathrm{d}x=2\sinh a. \tag{1}$$

b): Das Integral lösen wir mit der Substitution $2x=\sinh\alpha$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\sqrt{1+(2x)^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\text{arcsinh }2a}^{\text{arcsinh }2a}\cosh\alpha\sqrt{1+\sinh^2\alpha}\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{2}\int_{-\text{arcsinh }2a}^{\text{arcsinh }2a}\cosh^2\alpha\mathrm{d}\alpha\\&=\frac{1}{2}\sinh\alpha\cosh\alpha\Big|_{\alpha=-\text{arcsinh}2a}^{\text{arcsinh}2a}-\frac{1}{2}\int_{-\text{arcsinh }2a}^{\text{arcsinh }2a}\sinh^2\alpha\mathrm{d}\alpha\\&=a\left(\cosh\left(\text{arcsinh}2a\right)\right)-\frac{1}{2}\int_{-\text{arcsinh }2a}^{\text{arcsinh }2a}(\cosh^2\alpha-1)\mathrm{d}\alpha\\&=a\sqrt{1+4a^2}+\frac{1}{2}\text{arcsinh}(2a).\end{aligned}\tag{2}$$

Im Schritt von der vorletzten auf die letzte Zeile wurde der übliche Trick des partiellen Integrierens verwendet. Hierbei taucht das eigentlich gesuchte Integral als Summand in einer Summe auf die mit ihm übereinstimmt und man löst dann die Gleichung algebraisch nach diesem Integral auf.

Aufgabe 2

a): Wir finden im Skript: Seien $n\in\mathbb{N}$, $U\subset\mathbb{R}$ offen und $f:U\to\mathbb{C}$ $(n+1)-$ mal stetig differenzierbar gegeben. Dann gilt für alle $y,x\in U$

$$f(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k+\int_x^y\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(y-t)^n\mathrm{d}t. \tag{3}$$

b): Wir verwenden Teilaufgabe a) und erhalten

$$e^{ix}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}+\int_0^x\frac{i^{n+1}e^{ix}}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t. \tag{4}$$

Umstellen und anwenden der im Tipp gegebenen Ungleichung liefert

$$\left|e^{ix}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\right|=\left|\int_0^x\frac{i^{n+1}e^{ix}}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^x\frac{1}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t\leq\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{5}$$

□

Aufgabe 3

a): Für $\alpha \in]-\pi, \pi[$ und $t \in \mathbb{R}$ wird die Substitution durch die Gleichung $t = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ definiert. Damit transformiert sich ein allgemeines Integral zu

$$\int R(\cos\alpha, \sin\alpha)\mathrm{d}\alpha = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t. \tag{6}$$

b): Wir verwenden die in a) definierte Substitution und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\cos\alpha} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(-\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left(-\ln(1-t)+\ln(1+t)\right)\Big|_{t=0}^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned} \tag{7}$$