Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Zur einfacheren Notation sprechen wir in allen drei Teilaufgaben von $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(a) Mit Polynomdivision und Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2}{x^2 - 1} = x - 1 + \frac{x-3}{x^2-1} = x - 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}.$$

Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \log|x-1| + 2\log|x+1|\right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{2} - a - \log(1-a) + 2\log(a+1).\end{aligned}$$

(b) Wir formen um und erhalten

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{2x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 + 8x}{x^4 - 2x^2 + 1} &= 2x + 1 + \frac{3x^2 + 6x - 1}{x^4 - 2x + 1} = \\ &= 2x + 1 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x &= \left[x^2 + x + \log(1-x) - \log(x+1) + \frac{x+3}{1-x^2}\right]_0^a \\ &= a^2 + a + \log\left(\frac{1-a}{1+a}\right) + \frac{a+3}{1-a^2} - 3.\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 4}{x^4 + 2x^2 + 1} = 1 + \frac{x^2+3}{(x^2+1)^2} = 1 + \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{(x^2+1)^2}.$$

Partialbruchzerlegung für den letzten Ausdruck liefert

$$\begin{aligned}\frac{2}{(x^2+1)^2} &= \frac{i}{2(x+i)} - \frac{1}{2(x+i)^2} - \frac{i}{2(x-i)} - \frac{1}{2(x-i)^2} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2(x+i)^2} - \frac{1}{2(x-i)^2},\end{aligned}$$

womit Integration zu

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x &= \left[x + 2\arctan x + \frac{1}{2(x+i)} + \frac{1}{2(x-i)}\right]_0^a \\ &= \left[x + 2\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right]_0^a = x + 2\arctan a + \frac{a}{a^2+1}\end{aligned}$$

führt.

Aufgabe 2

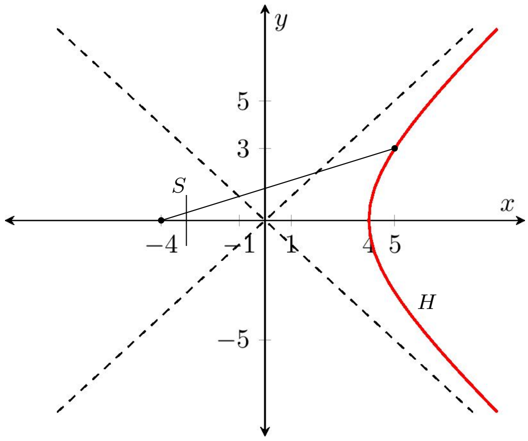

Abbildung 1: Skizze der Substituion. Der Punkt $(5,3)$ der Hyperbel wird abgebildet auf $(-3, \frac{1}{3})$.

Für eine Skizze siehe Abbildung 1. Sei $R(y,x) = \frac{1}{5x-3y-16}$. Mit der vorgegebenen Substitution gilt $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{8(t^2+1)}{(1-t^2)^2}$. So gelangen wir zu

$$\int_0^a R(y, \sqrt{y^2+16})\mathrm{d}y = \int_0^{g(a)} R\left(\frac{8t}{1-t^2}, 4\frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \cdot \frac{8(t^2+1)}{(1-t^2)^2}\mathrm{d}t$$
$$= -\int_0^{g(a)} \frac{2t^2+2}{9t^4-6t^3-8t^2+6t-1},$$

wobei $g(a) = (\sqrt{a^2+16}-4)/a$. Es sei vermerkt dass $-1 < g(a) < 1/3$ für $a < 3$. Mit der Partialbruchzerlegung

$$-\frac{2t^2+2}{9t^4-6t^3-8t^2+6t-1} = \frac{1}{8(t+1)} + \frac{9}{8(3t-1)} + \frac{5}{2(3t-1)^2} - \frac{1}{2(t-1)}$$

lösen wir das Integral als

$$\int_0^a R(y,x)\mathrm{d}y = \left[\frac{1}{24}\left(\frac{20}{1-3t} + 9\log(1-3t) - 12\log(1-t) + 3\log(t+1)\right)\right]_0^{g(a)}$$
$$= \frac{1}{24}\left(\frac{20}{1-3g(a)} + 9\log(1-3g(a)) - 12\log(1-g(a)) + 3\log(g(a)+1)\right) - \frac{5}{6}$$
$$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{1-3g(a)} - 1\right) + \frac{1}{8}\log\left(\frac{(1-3g(a))^3(1+g(a))}{(1-g(a))^4}\right).$$

Aufgabe 3

Wir führen die Substitution $u = e^x$ durch und sind mit $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u}$ nun also interessiert an

$$\int \frac{1}{(1+u^2)^2}\mathrm{d}u.$$

Dieses Integral kennen wir bereits aus T14.1(c) – eine Stammfunktion ist $\frac{1}{2}\left(\arctan u + \frac{u}{u^2+1}\right)$. Resubstituieren wir e^x, so erhalten wir

$$\int_a^\infty \frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\arctan e^x + \frac{1}{e^x+e^{-x}}\right]_a^\infty = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left(\arctan e^a + \frac{1}{e^a+e^{-a}}\right).$$

Aufgabe 4

Wir erinnern uns an die Definition der Bernoulli-Polynome und -zahlen aus T12.1. Wir beginnen mit einem

Lemma 1. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

Beweis. Mit der Taylorformel aus H12.1 gilt

$$f_{x+1}(t) - f_x(t) = \sum_{j=0}^{n} \left((B_j(x+1) - B_j(x)) \frac{t^j}{j!} \right) + \mathcal{O}(t^{n+1}), \quad t \to 0.$$

Ebenso ist jedoch

$$f_{x+1}(t) - f_x(t) = \frac{t}{e^t - 1}(e^{(x+1)t} - e^{xt}) = te^{xt} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{x^j}{j!} t^{k+1} + \mathcal{O}(t^{n+1}), \quad t \to 0.$$

Der Koeffizientenvergleich für t^n liefert

$$\frac{B_n(x+1) - B_n(x)}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

woraus die Behauptung folgt. □

Die zu zeigende Aussage ist nun eine einfache Induktion über m: Für $m = 1$ sehen wir, dass Lemma 1 insbesondere $B_n(1) - B_n(0) = \delta_{n,1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ impliziert. Da $n + 1 \geq 2$ gilt also

$$\sum_{k=0}^{0} k^n = 0 = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1}.$$

Für den Induktionsschritt gelte die Aussage für $m \geq 0$. Dann folgt mit der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\sum_{k=0}^{m} k^n = m^n + \frac{B_{n+1}(m) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \frac{B_{n+1}(m+1) - B_{n+1}(0)}{n+1},$$

da $\frac{B_{n+1}(m+1)}{n+1} = m^n + \frac{B_{n+1}(m)}{n+1}$ nach Lemma 1.