Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wir berechnen die Integrale.

a): Seien $a, \lambda, \omega > 0$ gegeben. Wir beginnen mit der Beobachtung, dass $e^{-\lambda x}\cos(\omega x) = \operatorname{Re} e^{-\lambda x + i\omega x}$ gilt und wir die Stammfunktion der rechten Seite dieser Gleichung erraten können. Umformen liefert

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{1}{-\lambda + i\omega} e^{-\lambda x + i\omega x} &= \operatorname{Re} \frac{-\lambda - i\omega}{\lambda^2 + \omega^2} e^{-\lambda x + i\omega x} \\ &= \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2}\left(-\lambda e^{-\lambda x}\cos(\omega x) + \omega e^{-\lambda x}\sin(\omega x)\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Durch Ableiten der so gefundenen Funktion lässt sich leicht sicher stellen, dass es wirklich die gesuchte Stammfunktion ist. Das Integral ergibt dann

$$\int_0^a e^{-\lambda x}\cos(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda^2 + \omega^2}\left(-\lambda\left(e^{-\lambda a}\cos(\omega a) - 1\right) + \omega e^{-\lambda a}\sin(\omega a)\right). \tag{2}$$

b): Sei $a > 0$ gegeben. Wir versuchen den gleichen Trick noch einmal, der Integrand ist identisch mit $\operatorname{Re} x^2 e^{(-1+i)x}$. Die Stammfunktion von diesem Term können wir aber aus Aufgabe T11.3 ablesen, sie ist gleich

$$x \mapsto \frac{x^2}{-1+i}e^{(-1+i)x} - \frac{2x}{(-1+i)^2}e^{(-1+i)x} + \frac{2}{(-1+i)^3}e^{(-1+i)x}. \tag{3}$$

Der Realteil dieser Funktion lässt sich leicht zu

$$\frac{-x^2}{2}e^{-x}\cos(x) + \frac{x^2}{2}e^{-x}\sin(x) + xe^{-x}\sin(x) + \frac{1}{2}e^{-x}\cos(x) + \frac{1}{2}e^{-x}\sin(x) \tag{4}$$

bestimmen. Durch Ableiten kann wieder leicht überprüft werden, dass das die gesuchte Stammfunktion ist. Damit lässt sich das gesuchte Integral leicht zu

$$\begin{aligned} &\int_0^a x^2 e^{-x}\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{-x^2}{2}e^{-x}\cos(x) + \frac{x^2}{2}e^{-x}\sin(x) + xe^{-x}\sin(x) + \frac{1}{2}e^{-x}\cos(x) + \frac{1}{2}e^{-x}\sin(x)\Big|_{x=0}^{a} \\ &= \frac{-a^2}{2}e^{-a}\cos(x) + \frac{a^2}{2}e^{-a}\sin(a) + xe^{-a}\sin(a) + \frac{1}{2}e^{-a}\cos(a) + \frac{1}{2}e^{-a}\sin(a) - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

bestimmen.

c): Sei $a > 0$ gegeben. Wir erinnern uns an die Kettenregel und die Ableitung der Wurzelfunktion und bestimmen damit

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\sqrt{1-x^2})\mathrm{d}x = 1 - \sqrt{1-a^2}. \tag{6}$$

d): Sei $a > 0$ gegeben. Wir erinnern uns dan Aufgabe H11.1e) und bestimmen damit

$$\int_0^a xe^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-e^{-\frac{x^2}{2}})\mathrm{d}x = 1 - e^{-\frac{a^2}{2}}. \tag{7}$$

e): Seien $1 < a < b$ gegeben. Wir substituieren mit $y = \ln x$. dann ergibt sich

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int_{\ln a}^{\ln b} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln(\ln b) - \ln(\ln a)\,. \tag{8}$$

Aufgabe 2

a): Nach der Vorlesung gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \frac{e^{ix}}{2i} - \frac{e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix}}{2} + \frac{e^{-ix}}{2}. \tag{9}$$

b): Die allgemeine binomische Formel sagt für alle $a, b \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{10}$$

c): Wir verwenden die ersten zwei Teilaufgaben um den Integranden anders darzustellen. Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin^{2n} x \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^{2n} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} e^{ikx} e^{-ix(2n-k)} (-1)^{2n-k} \left(\frac{-1}{4}\right)^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^{2\pi} e^{ix(k-2n+k)} (-1)^k \left(\frac{-1}{4}\right)^n \mathrm{d}x \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k\neq n}}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{1}{2i(k-n)} \left. e^{ix2(-n+k)} \right|_{x=0}^{2\pi} (-1)^k \left(\frac{-1}{4}\right)^n + \binom{2n}{n} \frac{2\pi}{4^n} \\
&= \binom{2n}{n} \frac{2\pi}{4^n}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Aufgabe 3

a): Gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{12}$$

Die Negation hiervon ist also

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{13}$$

b): Seien $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar gegeben. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ sodass

$$(f(a) - f(b)) = f'(\xi)(a-b) \tag{14}$$

gilt.

c): Wir wählen $\varepsilon = 1$, sei $\delta > 0$ gegeben. Die Ableitung der betrachteten Funktion ist

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \sinh \sqrt{1+x^2}. \tag{15}$$

Da die Ableitung des ersten Faktors gleich $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3}$ und damit positiv ist, wächst dieser Faktor streng monoton. Es gilt außerdem $1+x^2 > x^2$, daher gilt insgesamt für alle $x > 1$

$$f'(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh \sqrt{1+x^2} > \frac{1}{\sqrt{2}} \sinh x. \tag{16}$$

Weil Sinus Hyperbolicus unbeschränkt ist, ist auch f' unbeschränkt. Nochmaliges Ableiten liefert

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}^3} \sinh \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{1+x^2} \cosh \sqrt{1+x^2} > 0. \tag{17}$$

Die Funktion f' ist also auch streng monoton steigend. Sei $0 < \alpha < \delta$ gegeben. Diese Überlegung zeigt, dass wir $x > y > 1$ so wählen dürfen, dass $f'(y) > \frac{2}{\alpha}$ und $\alpha < |x-y| < \delta$ gilt. Mit den letzten Teilaufgaben folgt dann, dass es ein $\xi \in [y, x]$ gibt sodass

$$|f(x) - f(y)| = (f(x) - f(y)) = f'(\xi)(x-y) \geq |x-y| f'(y) > \frac{|x-y|}{\alpha} 2 \geq 2 > \varepsilon \tag{18}$$

gilt.

Aufgabe 4

Sei $f \in \mathcal{R}[a, c]$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gibt es Teppenfunktionen $g \leq f \leq h$ sodass

$$\int_a^c h(x)\mathrm{d}x - \int_a^c g(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon \tag{19}$$

gilt. Die Funktionen $h_1 = h|_{[a,b]}$,$h_2 = h|_{[b,c]}$, $g_1 = g|_{[a,b]}$ und $g_2 = g|_{[b,c]}$ sind ebenfalls Treppenfunktionen, was unmittelbar aus der Definition der Treppenfunktionen folgt. Wir wählen eine Zerlegung von $[a, c]$ in Intervalle $([\xi_k, \xi_{k+1}[)_{k \in \{0,\ldots,n-1\}}$, sodass es ein $\tilde{k} \in \{0, \ldots, n-1\}$ mit $\xi_{\tilde{k}} = b$ gibt. Für die eingeschränkten Funktionen h_1 und g_1 gilt dann

$$\begin{aligned} &\int_a^b h_1(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g_1(x)\mathrm{d}x \\ &\leq \sum_{k=0}^{\tilde{k}-1} h(k)(\xi_{k+1} - \xi_k) - \sum_{k=0}^{\tilde{k}-1} g(k)(\xi_{k+1} - \xi_k) \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} h(k)(\xi_{k+1} - \xi_k) - \sum_{k=0}^{n-1} g(k)(\xi_{k+1} - \xi_k) \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{20}$$

Analog gilt für h_2 und g_2

$$\int_a^b h_2(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g_2(x)\mathrm{d}x \leq \varepsilon. \tag{21}$$

Die Existenz dieser Treppenfunktionen beweist, dass f eingeschränkt auf $[a, b]$ beziehungsweise auf $[b, c]$ ebenfalls Riemann-integrierbar ist. Die zu beweisende Gleichung gilt für alle Treppenfunktionen (man kann einfach die Summe zerlegen) die so gewählt sind wie oben und daher auch für deren Infimum beziehungsweise Supremum. $\square$