Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Es ist $B_0(x) = 1 = B_0$. Wir nutzen den Hinweis und somit (nachdem wir uns überzeugt haben, dass sie hier anwendbar ist) Aufgabe H12.1(c), um die asymptotische Form von $f_x(t)$ zu erhalten. Setzen wir diese in die Gleichung $(e^t - 1)f_x(t) = te^{xt}$ ein und schreiben die Exponentialfunktionen als Reihen aus, so erhalten wir aus

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\right) f_x(t) = t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(xt)^k}{k!}$$

die Darstellung

$$\left(\sum_{k=1}^{4} \frac{t^k}{k!} + \mathcal{O}(t^5)\right) \left(\sum_{j=0}^{3} \frac{B_j(x)}{j!} t^j + \mathcal{O}(t^4)\right) = \sum_{l=0}^{3} \frac{x^l t^{l+1}}{l!} + \mathcal{O}(t^5)$$

für $t \to 0$. Multiplizieren wir nun die linke Seite aus und fassen nach Potenzen von t zusammen, so müssen die Koeffizienten vor t^k für alle $1 \leq k \leq 4$ auf linker und rechter Seite übereinstimmen (es sei vermerkt, dass auf der linken Seite alle nicht explizit ausgeschrieben Terme von Ordnung t^j mit $j \geq 5$ sind). Für $k = 2$ erhalten wir damit

$$\frac{1}{2} t^2 + B_1(x) t^2 = x t^2,$$

also $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ und $B_1 = -\frac{1}{2}$. Für $k = 3$ ergibt sich

$$\frac{1}{2} B_2(x) t^3 + \frac{1}{2} B_1(x) t^3 + \frac{1}{6} t^3 = \frac{1}{2} x^2 t^3,$$

also $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ und $B_2 = \frac{1}{6}$. Für $k = 4$ schließlich erhalten wir

$$\frac{1}{6} B_3(x) t^4 + \frac{1}{4} B_2(x) t^4 + \frac{1}{6} B_1(x) t^4 + \frac{1}{24} t^4 = \frac{1}{6} x^3 t^4,$$

was aufgelöst $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x$ und $B_3 = 0$ ergibt.

Aufgabe 2

(a) Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(e^{\frac{i\pi}{2n}}\right)^k - \left(e^{-\frac{i\pi}{2n}}\right)^k\right] \\ &= \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{2}} - 1}{e^{\frac{i\pi}{2n}} - 1} - \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}} - 1}{e^{-\frac{i\pi}{2n}} - 1}\right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{i - 1}{e^{\frac{i\pi}{2n}} - 1} + \frac{i + 1}{e^{-\frac{i\pi}{2n}} - 1}\right).\end{aligned}$$

(b) Zur besseren Übersicht führen wir $x = x(n) := \frac{i\pi}{2n}$ ein. Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) &= -\frac{1}{2} x \left(\frac{i - 1}{e^x - 1} + \frac{i + 1}{e^{-x} - 1}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 - i) \frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2}(1 + i) \frac{-x}{e^{-x} - 1} \xrightarrow{x \to 0} 1.\end{aligned}$$

Hierbei wurde (neben Satz 3.4) verwendet, dass $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow{x\to 0} 1$ und dass $n\to\infty \Leftrightarrow x(n)\to 0$.

Aufgabe 3

Es sei $f_1(x) := \arctan(x)$ und $f_2(x) := \tanh(x)$. Beide Funktionen sind stetig differenzierbar mit

$$|f_1'(x)| = \frac{1}{1+x^2} \le 1 \quad \forall\, x\in\mathbb{R} \tag{1}$$

und

$$|f_2'(x)| = \frac{1}{(\cosh x)^2} \le 2 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Die zweite Schranke folgt, da $2\cosh x = e^x + e^{-x}$, also für alle $x\in\mathbb{R}$ einer der beiden Summanden positiv und der andere mindestens 1 ist.
Wir zeigen nun, dass beide Funktionen gleichmäßig stetig sind. Sei hierfür $j\in\{1,2\}$ und $\varepsilon>0$. Wir wählen $\delta := \varepsilon/2$. Für beliebige $x,y\in\mathbb{R}$ mit $|x-y|<\delta$ sei o.B.d.A. $x<y$. Dann existiert mit dem Mittelwersatz ein $\xi\in]x,y[$ mit $f_j'(\xi) = \frac{f_j(y)-f_j(x)}{y-x}$. Damit folgt also

$$|f_j(y)-f_j(x)| = |f_j'(\xi)|\cdot|y-x| < 2\delta = \varepsilon,$$

wobei die Abschätzung für $|f_j'(\xi)|$ aus den in (1) und (2) für alle $\xi\in\mathbb{R}$ beobachteten Schranken für f_1' und f_2' folgt.

Aufgabe 4

Sei $m\in\mathbb{N}_0$ gegeben. Die zu zeigende Aussage folgt aus $\sum_{n=m+1}^\infty a_n z^n = \mathcal{O}(|z|^{m+1})$. Wir bemerken zuerst, dass es nach Definition des Konvergenzradius ein $y>0$ mit $|z|<y<r$ gibt, sodass $|a_n y^n|\le M$ für ein $M\ge 0$ und alle $n\in\mathbb{N}_0$. Definiere des Weiteren $K := y^{-m-1}<\infty$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{\sum_{n=m+1}^\infty a_n z^n}{|z|^{m+1}}\right| &\le \sum_{n=m+1}^\infty |a_n|\cdot|z|^{n-m-1} = \sum_{n=0}^\infty |a_{m+1+n}|\cdot|z|^n \\ &\le \sum_{n=0}^\infty |a_{m+1+n}y^{m+1+n}|\frac{|z|^n}{y^{m+1+n}} \le KM\cdot\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{|z|}{y}\right)^n < \infty,\end{aligned}$$

da $|z|/y<1$. Die noch zu zeigende Folgerung gilt unmittelbar mit

$$\frac{|z|^{m+1}}{|z|^m} = |z| \xrightarrow{z\to 0} 0,$$

denn damit gilt $g(z) = \mathcal{O}(|z|^{m+1}) \Rightarrow g(z) = o(|z|^m)$ für $z\to 0$.