Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wir berechnen schnell

a):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(x+\sqrt{1+x^2}) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \tag{1}$$

b):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x^{\frac{3}{2}}} = \frac{-3}{2}\sqrt{x}e^{-x^{\frac{3}{2}}} \tag{2}$$

c):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin\left(x^2\right)}{\cos^2(x)} &= \frac{\cos\left(x^2\right)2x\cos^2(x)+2\cos(x)\sin(x)\sin(x^2)}{\cos^4(x)}\\ &= 2\frac{\cos\left(x^2\right)x\cos(x)+\sin(x)\sin(x^2)}{\cos^3(x)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Aufgabe 2

Wir bestimmen jeweils die Stammfunktion.

a):

$$\frac{1}{1-2x} = \frac{-1}{2}\frac{1}{\frac{-1}{2}+x} = \frac{-1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln\left|\frac{-1}{2}+x\right|+c\right), \quad \text{für ein } c\in\mathbb{R}. \tag{4}$$

Wir haben also die Stammfunktion gefunden

$$f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto\frac{-1}{2}\ln\left|\frac{-1}{2}+x\right|+c. \tag{5}$$

b):

$$\frac{e^x}{1+e^x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\ln(1+e^x)+c\right), \quad \text{für ein } c\in\mathbb{R}. \tag{6}$$

Wir haben also die Stammfunktion gefunden

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto\ln(1+e^x)+c. \tag{7}$$

c):

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\cos x}\ln(\cos x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\ln|\cos(x)|+c\right), \quad \text{für ein } c\in\mathbb{R} \tag{8}$$

Wir haben also die Stammfunktion gefunden

$$f:\mathbb{R}\backslash\{(n+0.5)\pi \mid n\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto -\ln|\cos(x)|+c. \tag{9}$$

d):

$$xe^{\alpha x^2} \overset{y:=x^2}{=} \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}e^{\alpha y}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y = \frac{1}{2\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\alpha x^2} + c, \qquad \text{für ein } c \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Wir haben also die Stammfunktion gefunden

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha x^2} + c. \tag{11}$$

Aufgabe 3

a): Wir leiten die definierende Gleichung von f_n für ein $n \in \mathbb{N}_0$ noch einmal ab, dann ergibt sich

$$f_n''(x) = nx^{n-1}e^{ax} + ax^n e^{ax} = nf_{n-1}'(x) + af_n'(x) \tag{12}$$

woraus

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f_n''(x) - nf_{n-1}'(x) - af_n'(x)\right) = 0 \tag{13}$$

folgt. Nach der Vorlesung ist jede Stammfunktion der konstanten Nullfunktion eine konstante Funktion. Also gilt

$$f_n'(x) - nf_{n-1}(x) - af_n(x) = c_n = x^n e^{ax} - nf_{n-1}(x) - af_n(x) \tag{14}$$

für ein $c_n \in \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Zudem lässt sich $f_0(x) = \frac{1}{a}e^{ax} + c_0$ direkt aus der definierenden Gleichung ablesen.

b) Einsetzen in die Formeln ergibt

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{a}xe^{ax} - \frac{1}{a^2}e^{ax} + \frac{-c_1 - c_0}{a}, \\ f_2(x) = \frac{1}{a}x^2e^{ax} - \frac{2}{a^2}xe^{ax} &+ \frac{2}{a^3}e^{ax} + \frac{-c_2a + 2c_1 + 2c_0}{a^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

c): Für diese Teilaufgabe führen wir die Notation $f_n(x, a)$ für die in den letzten Teilaufgaben behandelten Funktionen ein. Ohne Verlust an Allgemeinheit nennen wir die in dieser Teilaufgabe neue Konstante $b > 0$ statt a um besser von beiden Teilaufgaben sprechen zu können. Wir teilen den Sinus in zwei komplexe Exponentialfunktionen auf,

$$x^2\sin(bx) = \frac{x^2}{2i}e^{ibx} - \frac{x^2}{2i}e^{-ibx} \tag{16}$$

sodass wir die letzte Aufgabe einmal für $a = ib$ und einmal für $a = -ib$ verwenden können. Damit gilt dann

$$f(x) = \frac{1}{2i}f_2(x, ib) + \frac{1}{2i}f_2(x, -ib). \tag{17}$$

Was noch bleibt um die Aufgabe zu lösen ist in dem Formeln der letzten Aufgabe einzusetzen. Es gilt für ein $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha + \frac{1}{b^3}e^{ibx} + \frac{x}{ib^2}e^{ibx} - \frac{x^2}{2b}e^{ibx} \\ &\quad + \frac{1}{b^3}e^{-ibx} - \frac{x}{ib^2}e^{-ibx} - \frac{x^2}{2b}e^{-ibx} \\ &= \alpha + \frac{2}{b^3}\cos(bx) + \frac{2x}{b^2}\sin(bx) - \frac{x^2}{b}\cos(bx). \end{aligned} \tag{18}$$

Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir zeigen nun durch Induktion, dass es Konstanten $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für jedes $l \in \{0, 1, \dots, n\}$

$$f^{(n-l)}(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{c_{n-l+k}}{k!} x^k \tag{19}$$

gilt. Die Behauptung folgt aus (19) mit $l = n$. Nun zum Induktionsbeweis. Für den Induktionsbeginn verwenden wir Anwendung 4.4.2 des Skriptes und folgern, dass es eine Konstante $c_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f^{(n)} = c_n. \tag{20}$$

Für den Induktionsschritt gelte Gleichung (19) für ein $l \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$f^{(n-l)}(x) - \sum_{k=0}^{l} \frac{c_{n-l+k}}{k!} x^k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(f^{(n-l-1)}(x) - \sum_{k=0}^{l} \frac{c_{n-l+k}}{(k+1)!} x^{k+1} \right) = 0, \tag{21}$$

wiederum durch Anwendung 4.4.2 finden wir eine Konstante $c_{n-l-1} \in \mathbb{R}$ sodass

$$\left(f^{(n-l-1)}(x) - \sum_{k=0}^{l} \frac{c_{n-l+k}}{(k+1)!} x^{k+1} \right) = c_{n-l-1}, \tag{22}$$

für jedes $x \in I$ gilt. □

Aufgabe 5

Lemma 1. $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *ist streng monoton steigend.*

Beweis: Seien $x > y > 0$ gegeben, dann gilt $\frac{x}{y} > 1$. Nehme für einen Widerspruch an, dass $\log\left(\frac{x}{y}\right) \leq 0$ ist. Dann folgt mit der Strengen monotonie der Exponentialfunktion (Satz 3.46)

$$\begin{aligned} e^{\log\left(\frac{x}{y}\right)} &\leq e^0 \\ \Rightarrow \frac{x}{y} &\leq 1 \Rightarrow x \leq y, \end{aligned} \tag{23}$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. Damit folgt

$$\log(x) = \log\left(\frac{x}{y} y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log(y) > \log(y). \tag{24}$$

Nun zur Aufgabe, sei $a > 1$ und $b > 0$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass

$$\frac{\log(b)}{\log(a)} = \sup\left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^n \right\} \tag{25}$$

gilt. Weil sowohl der Logarithmus steng monoton steigend ist(Lemma), als auch die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist(Satz 3.46) ist (25) gleichbedeutend mit

$$\frac{\log(b)}{\log(a)} = \sup\left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \log(a^m) < \log(b^n) \right\}. \tag{26}$$

Dies lässt sich leicht umformen zu

$$\frac{\log(b)}{\log(a)} = \sup\left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \frac{m}{n} < \frac{\log(b)}{\log(a)} \right\}. \tag{27}$$

Es ist also noch Gleichung (27) zu zeigen. Aus der Form von (27) ist sofort ersichtlich, dass die linke Seite eine obere Schranke der Menge auf der rechten Seite ist. Wir nehmen also für einen

Widerspruch an, dass es eine obere Schranke $\gamma < \frac{\log(b)}{\log(a)}$ gibt. Dann folgt nach dem Beispiel nach Definition 2.3 im Skript (Dichtheit der rationalen Zahlen), dass es ein $p \in \mathbb{Q}$ gibt mit

$$p \in \left] \gamma, \frac{\log(b)}{\log(a)} \right[. \tag{28}$$

Diese Zahl p ist aber größer als γ, rational und kleiner als $\frac{\log(b)}{\log(a)}$ und deshalb in der Menge $\left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, \frac{m}{n} < \frac{\log(b)}{\log(a)} \right\}$ enthalten. Dies steht im Widerspruch zur Annahme. $\square$