Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wir beginnen mit zwei Lemmata, die uns bei Teilaufgaben (a) und (b) helfen werden.

Lemma 1. *Seien $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt*

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b, \quad \log(a^b) = b \log a.$$

Beweis. Sei $x_1 = \log(a \cdot b)$ und $x_2 = \log a + \log b$. Wir zeigen, dass $\exp(x_1) = \exp(x_2)$. Aufgrund der Bijektivität der e-Funktion müssen dann auch die beiden Argumente gleich gewesen sein, also $x_1 = x_2$. Es gilt $\exp(x_1) = ab$ und

$$\exp(x_2) = e^{\log a + \log b} = e^{\log a} \cdot e^{\log b} = ab,$$

wobei Satz 3.28 verwendet wurde.
Analog gilt $e^{\log a^b} = a^b = (e^{\log a})^b = e^{b \log a}$. □

Lemma 2. *Es gilt*

$$e^{n \log(\frac{n}{e})} \leq n! \ll e^{n \log n} \qquad \textit{für } n \to \infty.$$

Beweis. Es gilt

$$e^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!},$$

da wir die Reihe positiver Summanden durch den Summanden für $k = n$ nach unten abschätzen können. Umstellen ergibt

$$n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n = e^{n \log(\frac{n}{e})}.$$

Für die zweite Abschätzung sehen wir, dass

$$n! \ll n \cdot n! \leq n^n = e^{n \log n}.$$

□

(a) Es ist $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$, und mit den Abschätzungen zur Fakultät aus Lemma 2 erhalten wir

$$\frac{e^{2n \log(\frac{2n}{e})}}{e^{2n \log n}} \ll \binom{2n}{n} \ll \frac{e^{2n \log(2n)}}{e^{2n \log(\frac{n}{e})}},$$

also

$$e^{2n \log(\frac{2}{e})} \ll \binom{2n}{n} \ll e^{2n \log(2e)}.$$

Die Einordnung in Hierarchie erfolgt also entweder direkt links oder direkt rechts von $e^{\gamma n}$, wobei die genaue Position von γ abhängt.

Bemerkung: Mit der Stirling-Formel lässt sich berechnen, dass $\binom{2n}{n}$ für $\gamma > 2\log 2$ links und für $\gamma < 2 \log 2$ rechts von $e^{\gamma n}$ anzuordnen ist, d.h. $\binom{2n}{n}$ wächst ungefähr wie 4^n.

(b) Da

$$\gamma n \ll n \log(\tfrac{n}{e}) \leq n \log n \ll n^2,$$

ist $n!$ zwischen $e^{\gamma n}$ und e^{n^2} einzuordnen. Außerdem gilt auch $\binom{2n}{n} \ll n!$.

(c) Sei $k > 1$. Wir beobachten, dass

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

und damit

$$\frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n-1},$$

da wir hier es mit zwei Teleskopsummen zu tun haben. Es ist also

$$n - 1 \leq c_n \leq n,$$

womit c_n wie n^α mit $\alpha = 1$ wächst.

Aufgabe 2

(a) Da wir an $x \to 0$ interessiert sind, können wir $|x| < \frac{1}{2}$ annehmen und die geometrische Reihe anwenden. So landen wir bei

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = 1 - x + x^2 + r(x)$$

mit $r(x) = \sum_{n=3}^{\infty} (-x)^n$. Wir zeigen nun, dass $r(x) = \mathcal{O}(x^3)$, was das zu Zeigende impliziert. Es gilt

$$|r(x)/x^3| \leq \sum_{n=3}^{\infty} |x|^{n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} < 2.$$

Es ist eine einfache Beobachtung, dass allgemeiner auch $\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = \mathcal{O}(x^k) = o(x^l)$ für alle $k \geq 2, l < k$ und $x \to 0$ gilt.

(b) Es ist

$$\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \tfrac{1}{6}x^3 + r(x),$$

denn: Die geraden Potenzen addieren sich zu Null. Der Restterm $r(x)$ enthält Potenzen vom Grad 5 und größer, ähnlich wie in Teil (a) zeigt man also $r(x) = \mathcal{O}(x^5) = o(x^3)$.

(c) Ähnlich wie in (b) gilt

$$\tfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + r(x).$$

Analog zu (b) gilt hier $r(x) = \mathcal{O}(x^6) = o(x^4)$.

(d) Es gilt mit H10.2, dass

$$\begin{aligned}\sqrt{1+e^{-x}} = \sqrt{2 + (e^{-x} - 1)} &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}(e^{-x} - 1)} \\ &= \sqrt{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}(e^{-x} - 1) + o(e^{-x} - 1)\right).\end{aligned}$$

Da $e^{-x} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = -x + o(x)$, folgt also

$$\sqrt{1+e^{-x}} = \sqrt{2} \cdot (1 - \tfrac{x}{4} + o(x)).$$

Für $|x|$ klein genug gilt somit

$$\frac{1}{\sqrt{1+e^{-x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{x}{4} + o(x))} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4} + o(x)\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{x}{4} + o(x)\right).$$

(e) Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-e^{-x}} &= \frac{1}{x-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{-(-x)^{n-1}}{n!}} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o(x^2))}\\
&= \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)^k = \frac{1}{x}\left(\underbrace{1}_{k=0}+\underbrace{\tfrac{x}{2}-\tfrac{x^2}{6}+o(x^2)}_{k=1}+\underbrace{\tfrac{x^2}{4}+o(x^2)}_{k=2}+\underbrace{o(x^2)}_{k>2}\right)\\
&= \frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x}{12}+o(x).
\end{aligned}$$

Hierbei wurde für $|x|$ klein genug die geometrische Reihe benutzt.

Aufgabe 3

Es ist

$$\begin{aligned}
\cot(x) = i\cdot\frac{1+e^{-2ix}}{1-e^{-2ix}} &= i(2-2ix-2x^2+o(x^2))\frac{1}{1-e^{-2ix}}\\
&\overset{\text{T10.2(e)}}{=} (2i+2x-2ix^2+o(x^2)\left(\frac{1}{2ix}+\frac{1}{2}+\frac{2ix}{12}+o(x)\right)\\
&= \frac{1}{x}+i-\frac{x}{3}+o(x)-i+x+o(x)-x+o(x) = \frac{1}{x}-\frac{x}{3}+o(x).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir zeigen zuerst, dass f surjektiv ist. Sei dafür $y\in[0,1]$. Wir unterscheiden zwei Fälle: Sei zuerst y rational. Dann gilt $f(x)=y$ mit $x=y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$. Sei nun also $y\notin\mathbb{Q}$. Dann ist $x=y+2\in]2,3[\backslash\mathbb{Q}$ und $f(x)=y$. Es ist also in jedem Fall $f^{-1}(y)\neq\emptyset$.
Wir zeigen nun, dass f injektiv ist. Seien hierfür x_1,x_2, sodass $f(x_1)=y=f(x_2)$. Falls $y\in\mathbb{Q}$, so müssen $x_1,x_2\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ und $x_1=y=x_2$. Falls dagegen $y\in[0,1]\backslash\mathbb{Q}$, so sind $x_1,x_2\in]2,3[\backslash\mathbb{Q}$ und $x_1=y+2=x_2$. Damit ist f injektiv.
Wir zeigen nun, dass f stetig ist. Sei hierfür $\varepsilon>0$ und x,y mit $|x-y|<\delta:=\min\{1,\varepsilon\}$. Da $|x-y|<1$ sind also entweder $x,y\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$ oder $x,y\in]2,3[\backslash\mathbb{Q}$. Im ersten Fall ist $|f(x)-f(y)|=|x-y|<\varepsilon$, im zweiten Fall ist $|f(x)-f(y)|=|x-2-(y-2)|=|x-y|<\varepsilon$.
Es verbleibt noch zu zeigen, dass f^{-1} nirgends stetig ist. Sei dafür $y\in[0,1]$ und $1>\varepsilon>0$. Sei des Weiteren $\delta>0$ beliebig. Dann enthält $U:=U_\delta(y)\cap[0,1]$ sowohl rationale als auch irrationale Punkte. Sei $y_1\in U\cap\mathbb{Q}$ und $y_2\in U\backslash\mathbb{Q}$. Doch damit ist

$$|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)|=|y_1-y_2-2|>2-|y_1-y_2|>1>\varepsilon,$$

womit f^{-1} nicht stetig in x ist.