Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist die Aussage $x \leq y$ eine Abkürzung für $x < y \vee x = y$.
Wir wissen außerdem aus der Schule (und aus der ersten Aufgabe auf dem ersten Hausaufgabenblatt) dass $1 + 1 = 2$ gilt. Wir definieren also:

$$x := 1 + 1, \qquad y := 2 \tag{1}$$

Es gilt nun also $x = y$ und nach der Herleitungsregel für Disjunktionen (im Skript die 8. Regel) gilt daher auch

$$x < y \vee x = y \tag{2}$$

Was gleichbedeutend ist mit $x \leq y$. $\square$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a) Wir beweisen mittels einer Wahrheitstabelle:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B \wedge \neg A \Rightarrow B$	B
w	w	w	f	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	w	w	w	w
f	f	w	w	f	f	f

Wir sehen, dass die letzten beiden Spalten in allen Zeilen übereinstimmen. $\square$
Das zugehörige Beweisschema sieht so aus:

Zu zeigen: B
Beweis durch Fallunterscheidung:
1. Fall: Es gilt A: $\overset{\text{Argumente}}{\cdots\cdots}$ Es folgt B.
2. Fall: Es gilt $\neg A$: $\overset{\text{Argumente}}{\cdots\cdots}$ Es folgt B.
Also gilt B $\square$

Teilaufgabe b) Wir beweisen wieder mittels einer Wahrheitstabelle:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow C$	$B \vee C$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C)$	$(A \Rightarrow B) \wedge (\neg A \Rightarrow C) \Rightarrow B \vee C$
w	w	w	w	f	w	w	w	w
w	w	f	w	f	w	w	w	w
w	f	w	f	f	w	w	w	w
w	f	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	w	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	f	f	f	w

Die letzte Spalte zeigt "wahr" in allen Einträgen und ist daher eine Tautologie. $\square$
Das zugehörige Beweisschema lautet:

Zu zeigen: $B \vee C$
Beweis durch Fallunterscheidung:
1. Fall: Es gilt A: ...... Es folgt B.
2. Fall: Es gilt $\neg A$: ...... Es folgt C.
Also gilt $B \vee C$ $\square$

Teilaufgabe c) Wir beweisen wieder mittels einer Wahrheitstabelle:

A	B	C	$A \vee B$	$A \Rightarrow c$	$B \Rightarrow C$	$A \vee B \wedge A \Rightarrow C \wedge B \Rightarrow C$	$A \vee B \wedge A \Rightarrow C \wedge B \Rightarrow C \Rightarrow C$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	w	f	f	w
f	f	w	f	w	w	f	w
f	f	f	f	w	w	f	w

Die letzte Spalte zeigt in jeder Zeile "wahr", deshalb ist der zugehörige Ausdruck eine Tautologie. $\square$

Zu zeigen: C unter der Vorraussetzung $A \vee B$.
Beweis durch Fallunterscheidung:
1. Fall: Es gilt A: ...... Es folgt C.
2. Fall: Es gilt B: ...... Es folgt C.
Also gilt C unter der Vorraussetzung $A \vee B$ $\square$

Aufgabe 3

Die gegebenen und behaupteten Aussagen an den mit $\boxed{*_i}$ gekennzeichneten Stellen sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

i	noch zu zeigen	gegeben
1	$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x > 0 \forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	-
2	$\exists \delta > 0 \forall x > 0 \forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$\varepsilon > 0$ beliebig
3	$\forall x > 0 \forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$\varepsilon > 0$ beliebig, $\delta = \varepsilon^2$
4	$\forall y > x : y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$x, \varepsilon > 0$ beliebig, $\delta = \varepsilon^2$
5	$y - x < \delta \Rightarrow \sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$x, \varepsilon > 0, y > x$ beliebig, $\delta = \varepsilon^2$
6	$\sqrt{y} - \sqrt{x} < \varepsilon$	$x, \varepsilon > 0, y > x$ so dass $y - x < \delta$ gilt mit $\delta = \varepsilon^2$, $*$.
7	es gibt nichts mehr zu zeigen	nichts Relevantes gegeben, Beweis vollendet

$*$ ε, x und y sind beliebig so zu wählen, dass die aufgeführten Bedingungen erfüllt sind.
Die allgemeinen und gegebenen Aussagen an den mit (j) gekennzeichneten Stellen sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

j	allgemein	gegeben
1	$\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow a + b \geq b$	$x > 0$
2	$\forall a, b \in \mathbb{R} : b \geq 0 \Rightarrow a \geq a - b$ $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \geq b \wedge b \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$	$x > 0, y > x$
3	$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow a = \sqrt{a}^2$	$x, y > 0$
4	$\forall a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\} : a \geq b \wedge c > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \leq \frac{c}{b}$	$\forall a, b \in \mathbb{R} : b \geq a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{a} \geq \sqrt{b - a}$ $x > 0, y > 0$
5	$\forall a, b \in \mathbb{R} : 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$	$y - x < \delta, y > x$
6	$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a = b = c \Rightarrow a = c$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leq b < c \Rightarrow a < c$ $\forall a \in \mathbb{R} : a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2} = a$	$\delta = \varepsilon^2$

Aufgabe 4

Um besser argumentieren zu können, wandeln wir die Sätze zunächst in logische Formeln um. Die Menge aller Kalupen wird mit K bezeichnet, ist eine Kalupe a gebrochselt so gilt $G(a)$, ist sie dorig so gilt $D(a)$ und ist sie foberant so gilt $F(a)$. Der Ausschnitt aus dem Zoologiebuch wir dann zu:

$$(\forall l \in K : \neg G(l) \Rightarrow D(l)) \wedge \tag{3}$$

$$(\forall l \in K : F(l) \Rightarrow D(l)) \wedge \tag{4}$$

$$(\exists l \in K : D(l)) \wedge \tag{5}$$

$$(\exists l \in K : \neg D(l)) \tag{6}$$

Teilaufgabe a) "Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen" übersetzt sich zu:

$$(\exists l \in K : G(l)) \wedge (\exists l \in K : \neg G(l)) \tag{7}$$

Das ist kein gültiger Schluss, denn es gibt keine Information die uns auf die Existenz gebrochselter Kalupen schließen lässt.

Teilaufgabe b) "Es gibt gebrochselte Kalupen" übersetzt sich zu:

$$\exists l \in K : G(l) \tag{8}$$

Das ist ein gültiger Schluss, denn aus (6) folgt $\neg D(l_0)$ für ein geeignet gewähltes $l_0 \in K$, also nach (3)(Modus tollens) $\neg\neg G(l_0)$, also $G(l_0)$. $\square$

Teilaufgabe c) "Alle undorigen Kalupen sind gebrochselt." übersetzt sich zu:

$$\forall l \in K : \neg D(l) \Rightarrow G(l) \tag{9}$$

Das ist ein gültiger Schluss, denn nach (3) gilt für jedes gegebene $l \in K$: $\neg G(l) \Rightarrow D(l)$ also auch nach Kontraposition (Skript) $\neg D(l) \Rightarrow \neg\neg G(l)$. Das ist aber gleichwertig mit $\neg D(l) \Rightarrow G(l)$ weil $\neg\neg a$ gleichbedeutend ist mit a für alle Aussagen a. $\square$

Teilaufgabe d) "Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant." übersetzt sich zu:

$$\exists l \in K : G(l) \wedge \neg F(l) \tag{10}$$

Das ist ebenfalls ein zulässiger Schluss, denn nach (6) gilt für ein geeignet gewähltes $L \in K$: $\neg D(L)$. Mit (3) finden wir $\neg\neg G(L)$ also $G(L)$, mit (4) finden wir $\neg F(L)$, also insgesamt $G(L) \wedge \neg F(L)$. $\square$

Teilaufgabe e) "Alle gebrochselten Kalupen sind unfoberant" übersetzt sich zu:

$$\forall l \in K : G(l) \Rightarrow \neg F(l) \tag{11}$$

Das ist kein gültiger Schluss. Das nachfolgende Venn-Diagram illustriert warum. Es stellt die Menge der Kalupen dar. Der mit D gekennzeichnete Bereich steht für die Menge der dorigen

Kalupen, der mit F gekennzeichnete Bereich, für die Menge der foberanten Kalupen und der mit $\bar{G}$ gekennzeichnete Bereich steht für die nicht gebrochselten Kalupen. Die dargestellten Mengen erfüllen die Bedingungen (3)-(6) und es lässt sich ablesen, dass es sowohl foberante als auch unfoberante gebrochselte Kalupen gibt.