LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Wintersemester 2017/18

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 3 – Tutorien

T3.1 **σ-Stetigkeit von unten $\Rightarrow$ σ-Nullstetigkeit.** Zeigen Sie: Ist ein Inhalt σ-stetig von unten, so ist er auch σ-nullstetig.

T3.2[e] **Urbildabbildung.** Es sei $f : \{1,2,3\} \to \{4,5,6\}$, $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 5$. Berechnen Sie $f^{-1}[\{5,6\}]$. Existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : \{4,5,6\} \to \{1,2,3\}$?

T3.3 **Ein Beispiel zum Hochheben der Unabhängigkeit.** Es seien P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ und $X, Y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $X(x,y) = x$, $Y(x,y) = y$ die beiden Koordinatenabbildungen. Es gelte für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \le a\}) P(\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \le b\}) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \le a,\ Y(\omega) \le b\}). \tag{1}$$

Zeigen Sie für alle $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A\}) P(\{\omega \in \Omega | Y(\omega) \in B\}) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in A,\ Y(\omega) \in B\}). \tag{2}$$

Bemerkung: In der für die Stochastik typischen stenographischen Notation schreibt man statt Gleichung (1) kurz $P(X \le a)P(Y \le b) = P(X \le a,\ Y \le b)$, und statt Gleichung (2) kurz $P(X \in A)P(Y \in B) = P(X \in A,\ Y \in B)$.

T3.4 **limsup und liminf für Mengen.** Für eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ von Mengen definiert man:

$$\limsup_j A_j := \{\omega |\ \omega \in A_j \text{ für unendlich viele } j \in \mathbb{N}\}$$
$$\liminf_j A_j := \{\omega |\ \omega \in A_j \text{ für alle bis auf endlich viele } j \in \mathbb{N}\}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\limsup_j A_j = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \ge n} A_j$$
$$\liminf_j A_j = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \ge n} A_j$$

gilt. Folgern Sie: Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und sind alle A_j, $j \in \mathbb{N}$, messbare Mengen darin, so sind auch $\limsup_j A_j$ und $\liminf_j A_j$ messbar bzgl. $\mathcal{A}$.

T3.5 **Monotonie des äußeren Maßes.** Überlegen Sie sich unter den Voraussetzungen von Definition 1.54 (äußeres Maß) im Skript:
$\mu^*(\emptyset) = 0$. Überlegen Sie sich auch, dass für $A \subseteq B \subseteq \Omega$ gilt: $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$.

LMU München **Prof. F. Merkl**
Mathematisches Institut
Sommersemester 2017

Übungen zur Maßtheorie und Integralrechnung mehrerer Variablen
Blatt 3 – Hausaufgaben

H3.1 **Abzählbare Vereinigung von Nullmengen.** Es sei μ ein Maß. Zeigen Sie, dass jede abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen wieder eine μ-Nullmenge ist.

H3.2 **Vererbung des Kompaktheitskriteriums auf Produkte.** Für $j = 1, 2$ seien eine Mengenalgebra $\mathcal{A}_j$ auf einer Menge Ω_j, ein Inhalt $\nu_j : \mathcal{A}_j \to [0, \infty]$ und eine hausdorffsche Topologie $\mathcal{T}_j$ auf Ω_j gegeben, so dass das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50 im Skript erfüllt sei. Weiter bezeichne $\mathcal{A}$ die Produkt-Mengenalgebra von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ auf $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ den Produkt-Inhalt dazu aus Übung H2.4 und $\mathcal{T}$ die Produkttopologie zu $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ auf Ω. Zeigen Sie, dass auch ν das Kompaktheitskriterium aus Satz 1.50 im Skript bezüglich der Topologie $\mathcal{T}$ erfüllt.

H3.3 **Vervollständigung von Maßräumen.** Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und die σ-Algebra $\hat{\mathcal{A}}_\mu$ und das Maß $\hat{\mu} : \hat{\mathcal{A}}_\mu \to [0, \infty]$ hieraus wie im Fortsetzungssatz von Carathéodory konstruiert. Weiter sei

$$\hat{\mathcal{A}} := \{A \Delta N \mid A \in \mathcal{A},\ N \subseteq \Omega,\ N \text{ ist eine } \mu\text{-Nullmenge}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\hat{\mathcal{A}}$ ist eine σ-Algebra über Ω.

(b) $\hat{\mathcal{A}} \subseteq \hat{\mathcal{A}}_\mu$.

(c) Die Einschränkung von $\hat{\mu}$ auf $\hat{\mathcal{A}}$ ist vollständig.

(d) $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}_\mu$, falls μ endlich ist.

(e) Zeigen Sie an Hand des Gegenbeispiels $\Omega = \{0, 1\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\Omega) = \infty$, dass $\hat{\mathcal{A}} \neq \hat{\mathcal{A}}_\mu$ möglich ist.

Der Maßraum $(\Omega, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mu}|_{\hat{\mathcal{A}}})$ wird *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ genannt.

H3.4 **Vervollständigung von Maßräumen mit Diracmaßen.** Es sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und δ_a das Dirac-Maß in einem Punkt $a \in \Omega$ mit $\{a\} \in \mathcal{A}$. Überzeugen Sie sich davon, dass die Vervollständigung von $(\Omega, \mathcal{A}, \delta_a)$ durch $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_a)$ gegeben wird, wobei wir das Dirac-Maß auf dem vergrößerten Definitionsbereich $\mathcal{P}(\Omega) \supseteq \mathcal{A}$ wieder mit δ_a bezeichnen.

Abgabe: Bis spätestens Donnerstag, den 9.11.2017, Abend.