Mathematisches Institut
der Universität München
Klaus Aehlig
Horst Osswald

26.4.06
Blatt 1

Mathematische Logik II

Aufgabe 1: Seien $h : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ Register-berechenbar. Sei $f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ rekursiv definiert durch

$$f(\overrightarrow{a}, 0) := h(\overrightarrow{a}),\ f(\overrightarrow{a}, n+1) := g(\overrightarrow{a}, n+1, f(\overrightarrow{a}, n)).$$

Zeigen Sie, daß f Register-berechenbar ist. [4 Punkte]

Aufgabe 2:

Wir definieren durch geschachtelte Induktion eine Folge (ψ_n) berechenbarer Funktionen:

$$\psi_0(k) := k+1,\ \psi_{n+1}(0) := \psi_n(1),$$
$$\psi_{n+1}(k+1) := \psi_n(\psi_{n+1}(k)).$$

Die Funktion $(n, k) \mapsto \psi_n(k)$ heißt nach ihrem Entdecker **Ackermann Funktion**. Wir wollen zeigen, daß diese Funktion, grob gesagt, stärker wächst als jede primitiv rekursive Funktion. Damit ist die berechenbare Funktion $n \mapsto \psi_n(n)$ nicht primitiv rekursiv. Zeigen Sie zunächst:

(a) $\psi_{n+1}(k) = \psi_n^{k+1}(1)$, wobei $\psi^1(1) := 1, \psi^{k+1}(1) := \psi \circ \psi^k(1)$. [1 Punkt]

Weiter gilt für alle $x, y, n \in \mathbb{N}$:

(b) $x < \psi_n(x) < \psi_n(x+1)$. [3 Punkte]
(c) $\psi_n(x) < \psi_{n+1}(x)$. [2 Punkte]
(d) $\psi_n(x+1) \le \psi_{n+1}(x)$. [2 Punkte]
(e) $\psi_n(x) + y \le \psi_n(x+y)$. [1 Punkt]
(f) $2\psi_2(x) \le \psi_3(2x)$ für $1 \le x$. [1 Punkt]
(g) $2\psi_n(x) < \psi_{n+1}(x)$ für $3 \le x$ und $n \ge 3$. [2 Punkte]

Abgabetermin: 3. 5. 2006 16 c.t. im Übungskasten