MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. Wilfried Buchholz

Wintersemester 2005/06
Blatt 8

Übungen zu "Lineare Algebra I für Informatiker"

Aufgabe 29. Gegeben ist die Matrix A und der Vektor b durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Menge aller $x \in \mathbb{R}^3$ für die $\|Ax - b\|$ minimal wird.

Aufgabe 30. Gegeben sind die folgenden 11 Meßpunkte.

$(-5, -69)$, $(-4, -36)$, $(-3, 5)$, $(-2, 8)$, $(-1, 11)$, $(0, 2)$, $(1, -9)$, $(2, -17)$, $(3, 9)$, $(4, 27)$, $(5, 77)$

Bestimmen sie dasjenige Polynom dritten Grades, das die Summe der Abstandsquadrate zu den Meßpunkten minimiert.

Hinweis: Das Ergebnis ist nicht besonders glatt. Für reine Matrizenoperationen, wie Multiplizieren und Invertieren dürfen Sie daher ein geeignetes Computeralgebrasystem verwenden. Eine numerische Näherung genügt. Der Rechenweg muß aber nachvollziehbar sein.

Aufgabe 31. Diese Aufgabe soll Ihnen zeigen, wie man die "Ausgleichsgerade" bei großen Datenmengen praktisch berechnet. Dieses Verfahren verwenden auch die meisten Taschenrechner.

Gegeben seien Punkte $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Wir führen folgende Abkürzungen ein.

$$\begin{aligned} S_x &= \sum_{i=1}^{n} x_i \\ S_{xx} &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\ S_y &= \sum_{i=1}^{n} y_i \\ S_{xy} &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}$$

(a) Man zeige, daß die Gerade, die die Summe der Abstandsquadrate minimiert gegeben ist durch die Gleichung $y = m \cdot x + a$ mit

$$m = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x S_x} \qquad a = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{nS_{xx} - S_x S_x}.$$

(b) Erläutern Sie, wieso das Ergebnis von Aufgabe (a) es Ihnen erlaubt, m und a zu berechnen und dabei die Daten nur einmal zu traversieren.

Zusatzaufgabe. Testen Sie den in Aufgabe 31 gefundenen Algorithmus auf dem Datensatz der gegeben ist durch die Ausgabe des Programms `exercise31.pl`, das auf der Vorlesungshomepage erhältlich ist. Dabei enthält jede Ausgegebene Zeile genau einen Punkt in der Form "x-Wert dezimal codiert, Leerzeichen, y-Wert dezimal codiert".

Aufgabe 32. Seien $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ paarweise senkrecht. Man zeige

(a) Ist $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, so gilt $\langle v, v_i \rangle = \alpha_i \cdot \|v_i\|^2$ für $i = 1, \ldots, k$.

(b) Ist zusätzlich $v_i \neq 0$ für alle i, so sind $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

Abgabetermin. Mittwoch 18.01.2006 16:00st im Übungskasten.

Dies ist das letzte Übungsblatt für dieses Semester. Die Zentralübungs am 25.01.2006 findet als Fragestunde statt.

Die abschließende Klausur findet am 30.01.2006 um 18hct statt. Bitte erscheinen Sie pünklich um 18hst und bringen Sie Ihren Personalausweis oder Reisepaß mit.