

Übungen zu “Lineare Algebra I für Informatiker”

**Aufgabe 29.** Gegeben ist die Matrix  $A$  und der Vektor  $b$  durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Menge aller  $x \in \mathbb{R}^3$  für die  $\|Ax - b\|$  minimal wird.

**Lösung.**

Nach Vorlesung genügt es, die Lösungen des Gleichungssystems

$$A^T A x = A^T b$$

zu bestimmen. Es ergibt sich

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad A^T b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir der Reihe nach

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als partikuläre Lösung finden wir  $(2/3 \quad -1/3 \quad 0)^T$  und als Basis des Lösungsraums des homogenen Gleichungssystems  $(-2 \quad 0 \quad 1)^T$ .

Damit sind die gesuchten Punkte genau diejenigen, die auf der Geraden

$$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

liegen.

**Aufgabe 30.** Gegeben sind die folgenden 11 Meßpunkte.

$(-5, -69), (-4, -36), (-3, 5), (-2, 8), (-1, 11), (0, 2), (1, -9), (2, -17), (3, 9), (4, 27), (5, 77)$

Bestimmen sie dasjenige Polynom dritten Grades, das die Summe der Abstandsquadrate zu den Meßpunkten minimiert.

*Hinweis: Das Ergebnis ist nicht besonders glatt. Für reine Matrizenoperationen, wie Multiplizieren und Invertieren dürfen Sie daher ein geeignetes Computeralgebrasystem verwenden. Eine numerische Näherung genügt. Der Rechenweg muß aber nachvollziehbar sein.*

**Lösung.**

Wir versuchen  $\|Ax - y\|$  zu minimieren mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 25 & -125 \\ 1 & -4 & 16 & -64 \\ 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}$$

und

$$y = \begin{pmatrix} -69 \\ -36 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \\ 2 \\ -9 \\ -17 \\ 9 \\ 27 \\ 77 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist

$$x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

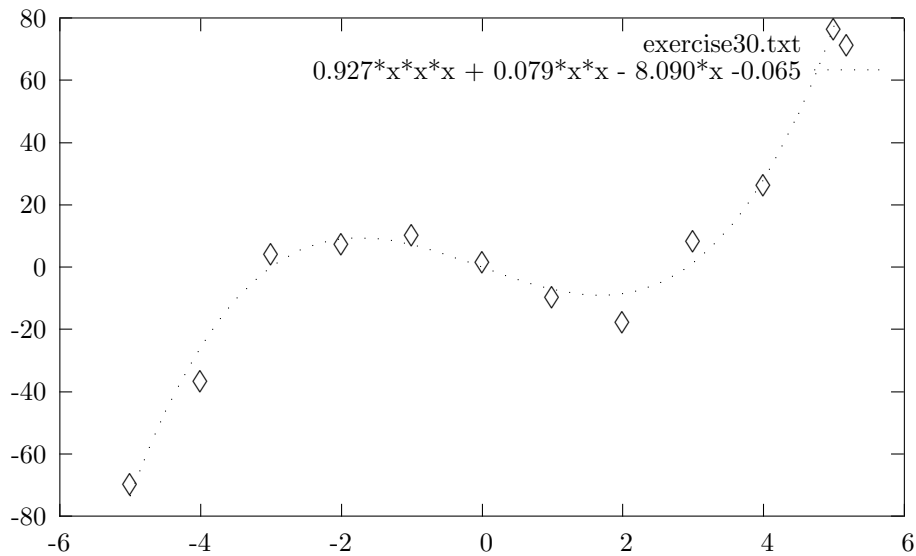
der Koeffizientenvektor des gesuchten Polynoms  $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ .

Der Koeffizientenvektor  $x$  ergibt sich nach Vorlesung als die Lösung des Gleichungssystems

$$A^T Ax = A^T y.$$

Die Lösungen ergeben sich zu

$$\begin{aligned} a_0 &= -28/429 && \approx -0.065 \\ a_1 &= -41645/5148 && \approx -8.090 \\ a_2 &= 34/429 && \approx 0.079 \\ a_3 &= 4769/5146 && \approx 0.927 \end{aligned}$$



**Aufgabe 31.** Diese Aufgabe soll Ihnen zeigen, wie man die “Ausgleichsgerade” bei großen Datenmengen praktisch berechnet. Dieses Verfahren verwenden auch die meisten Taschenrechner.

Gegeben seien Punkte  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Wir führen folgende Abkürzungen ein.

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n y_i$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

- (a) Man zeige, daß die Gerade, die die Summe der Abstandskquadrate minimiert gegeben ist durch die Gleichung  $y = m \cdot x + a$  mit

$$m = \frac{nS_{xy} - S_x S_y}{nS_{xx} - S_x S_x} \quad a = \frac{S_{xx} S_y - S_{xy} S_x}{nS_{xx} - S_x S_x}.$$

- (b) Erläutern Sie, wieso das Ergebnis von Aufgabe (a) es Ihnen erlaubt,  $m$  und  $a$  zu berechnen und dabei die Daten nur einmal zu traversieren.

**Lösung.**

(a) Mit den Bezeichnungen

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} m \\ a \end{pmatrix}$$

suchen wir  $m$  und  $a$  so, daß  $\|Ap - y\|$  minimiert wird. Dazu genügt es, die Gleichung  $A^T Ap = A^T y$  zu lösen. Es ergibt sich

$$A^T A = \begin{pmatrix} \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_x \\ S_x & n \end{pmatrix}$$

und

$$A^T y = \begin{pmatrix} \sum_i x_i y_i \\ \sum_i y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{xy} \\ S_y \end{pmatrix}.$$

Damit

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_x \\ S_x & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{xy} \\ S_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & -S_x \\ -S_x & S_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{xx} & S_x \\ S_x & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & -S_x \\ -S_x & S_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{xy} \\ S_y \end{pmatrix}$$

$$(nS_{xx} - S_x S_x) \begin{pmatrix} m \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} nS_{xy} - S_x S_y \\ S_{xx} S_y - S_{xy} S_x \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich die Behauptung.

(b) Die Werte  $n$ ,  $S_x$ ,  $S_{xx}$ ,  $S_y$  und  $S_{xy}$  können bei Hinzunahme eines weiteren Punktes leicht aktualisiert werden.

**Zusatzaufgabe.** Testen Sie den in Aufgabe 31 gefundenen Algorithmus auf dem Datensatz der gegeben ist durch die Ausgabe des Programms `exercise31.pl`, das auf der Vorlesungshomepage erhältlich ist. Dabei enthält jede Ausgegebene Zeile genau einen Punkt in der Form “ $x$ -Wert dezimal codiert, Leerzeichen,  $y$ -Wert dezimal codiert”.

**Lösung.**

Wir halten Variablen für die Werte  $n$ ,  $S_x$ ,  $S_{xx}$ ,  $S_y$  und  $S_{xy}$  vor. Anfangs sind alle auf 0 initialisiert. Wenn wir nun ein neues Paar  $(x, y)$  lesen, so aktualisieren wir die Variablen entsprechend und können anschließend die Werte  $(x, y)$  wieder vergessen. Nach der letzten Eingabe berechnen wir  $m$  und  $a$  wie in Aufgabe 31(a) angegeben.

Dies motiviert folgendes Programm.

```

#!/usr/bin/perl -w

use strict;

my $n = 0;
my $Sx = 0;
my $Sxx = 0;
my $Sy = 0;
my $Sxy = 0;

while (<STDIN>) {
    $_ =~ /^(\\S+) (\\S+)$/ or die "cannot parse input";
    my $x = $1;
    my $y = $2;

    $n++;
    $Sx += $x;
    $Sxx += $x*$x;
    $Sy += $y;
    $Sxy += $x*$y;
}

my $nVar = $n * $Sxx - $Sx * $Sx;
my $m    = ($n * $Sxy - $Sx * $Sy) / $nVar;
my $a    = ($Sxx * $Sy - $Sxy * $Sx) / $nVar;

print <<"EOI";

n    = $n
Sx   = $Sx
Sxx  = $Sxx
Sy   = $Sy
Sxy  = $Sxy

m    = $m
a    = $a
EOI

```

Auch wenn wir hier kleine Differenzen großer Zahlen berechnen, so ist die Genauigkeit doch durchaus passabel.

```

/tmp>time ./exercise31.pl | wc
360000 720000 6368895

real    0m23.154s
user    0m23.090s
sys     0m0.060s
/tmp>./exercise31.pl | head -10
1 1249628539
2 1233335338
3 1228619666
4 1282235663
5 1248875416
6 1260933626
7 1212497116
8 1233640749
9 1254512961
10 1194463176
/tmp>./exercise31.pl | tail -10

```

```

359991 1242048276
359992 1265437362
359993 1241335751
359994 1253410965
359995 1252151587
359996 1263926921
359997 1274527713
359998 1256716820
359999 1247869331
360000 1262086230
/tmp>time ./exercise31.pl | ./sol31.pl

n      = 360000
Sx     = 64800180000
Sxx    = 1.555206480003e+16
Sy     = 448261226750668
Sxy    = 8.08510708890649e+19

m      = 42.1363022977936
a      = 1237585518.82566

real   0m25.202s
user   0m25.190s
sys    0m0.010s
/tmp>

```

**Aufgabe 32.** Seien  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  paarweise senkrecht. Man zeige

- (a) Ist  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$  mit  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ , so gilt  $\langle v, v_i \rangle = \alpha_i \cdot \|v_i\|^2$  für  $i = 1, \dots, k$ .
- (b) Ist zusätzlich  $v_i \neq 0$  für alle  $i$ , so sind  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig.

**Lösung.**

- (a) Es gilt

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \\ \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k, v_i \rangle &= \\ \alpha_1 \underbrace{\langle v_1, v_i \rangle}_0 + \dots + \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{\|v_i\|^2} + \dots + \alpha_n \underbrace{\langle v_n, v_i \rangle}_0 &= \alpha_i \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

- (b) Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  mit  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ . Dann gilt nach (a) gerade  $0 = \langle 0, v_i \rangle = \alpha_i \|v_i\|^2$ . Es folgt  $\alpha_i = 0$ , da  $\|v_i\|^2 \neq 0$  für  $v_i \neq 0$ .

**Abgabetermin.** Mittwoch 18.01.2006 16:00st im Übungskasten.

Dies ist das letzte Übungsblatt für dieses Semester. Die Zentralübungs am 25.01.2006 findet als Fragestunde statt.

Die abschließende Klausur findet am 30.01.2006 um 18hct statt. Bitte erscheinen Sie pünktlich um 18hst und bringen Sie Ihren Personalausweis oder Reisepaß mit.