

Abschlussbericht im Rahmen der Projektförderung durch Lehre@math.LMU

„On the Existence of Strong Solutions of Mean-Field Stochastic
Differential Equations with Irregular Drift“

Im Rahmen meiner Masterarbeit habe ich „Mean-Field Stochastic Differential Equations“, dh stochastische Differentialgleichungen mit einer zusätzlich Abhängigkeit von der Verteilung bzw. Erwartung des impliziert definierten stochastischen Prozesses, auf die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht. Diese Gleichungen spielen nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Physik eine große Rolle. Ihren Ursprung haben sie in der Untersuchung der Boltzman Gleichung, sowie als stochastisches Modell für Vlasov's kinetische Gleichung des Plasmas. In der Mathematik finden sie Anwendung in der Modellierung von ökonomischen und finanzwirtschaftlichen Strukturen. Außerdem sind sie Grundlage für „mean-field games“, welche zur Zeit große Aufmerksamkeit in der mathematischen Forschung finden.

Für den Beweis der Existenz von starken Lösungen wurde ein Kompaktheitskriterium aus dem Gebiet des Malliavin Kalküls verwendet. Diese Idee wurde in den folgenden beiden Artikeln entwickelt:

Construction of strong solutions of SDE's via Malliavin calculus, Meyer-Brandis, T., Proske, F., Journal of Functional Analysis 258 (11), 2010.

A variational approach to the construction and Malliavin differentiability of strong solutions of SDEs, Meyer-Brandis, T., Nilssen, T., Proske, F., Zhang, T., Menoukeu-Pamen, O.P., Mathematische Annalen 357(2), 2013.

Die Förderung durch **Lehre@math.LMU** hat es mir ermöglicht an die Universität Oslo zu reisen, um mich vor Ort mit den Verfassern der beiden Artikel auszutauschen. Es wurde die Anwendung ihres Konzeptes auf „Mean-Field“ stochastische Differential Gleichungen besprochen. Darüber hinaus aber auch weitere Möglichkeiten des Einsatzes dieser Beweisidee diskutiert. Die Applikation eines Kompaktheitsargumentes aus dem Gebiet des Malliavin Kalküls ermöglichte die Abschwächung der Annahmen an den Drift Koeffizienten. Es wurde gezeigt, dass für messbare und beschränkte Funktionen, die lediglich eine Stetigkeitseigenschaft in der zusätzlichen Variable des Erwartungswertes aufweisen, starke Lösungen existieren. Des Weiteren sind diese Malliavin differenzierbar und besitzen eine explizite Darstellung der Malliavin Ableitung mit Hilfe des „local time-space“ Integrales. Außerdem sind die Lösungen, als Funktion im Startwert, (schwach) differenzierbar und es kann eine Erweiterung der Bismuth-Elworthy-Li Formel hergeleitet werden. Diese Formel gibt die Möglichkeit einer numerischen Berechnung des Deltas, einer der wichtigsten Sensitivitäten in der Finanzmathematik. Diese wird unter anderem zum „Hedging“ von Finanzoptionen verwendet.

Die Anwendung des Malliavin Kalküls weist ganz neue Möglichkeiten auf um die Existenz von Lösungen verschiedenster Differentialgleichungen zu zeigen.