

Brauer-Manin-Obstruktionen für Summen von zwei Quadraten und einer Potenz

Im Sommersemester 2012 schrieb ich (Fabian Gundlach) am mathematischen Institut der LMU bei Professor Derenthal meine Bachelorarbeit zum Thema „Brauer-Manin-Obstruktionen für Summen von zwei Quadraten und einer Potenz“.

Ein altbekannter Satz von Fermat besagt, dass sich eine positive ganze Zahl genau dann als Summe zweier Quadratzahlen darstellen lässt, wenn jede Primzahl, die bei Division durch 4 den Rest 3 lässt, gerade oft in ihrer Primfaktorzerlegung vorkommt.

In meiner Bachelorarbeit untersuchte ich Summen von zwei Quadraten und einer k -ten Potenz (mit einer festen natürlichen Zahl k).

Nachdem ich zunächst einige Veröffentlichungen zu diesem Thema gelesen hatte, arbeitete ich mich in die Theorie zentral-einfacher Algebren und anschließend in die Klassenkörpertheorie ein. Ich konnte mir hierfür im Rahmen des Lehre@LMU-Programms die zwei Bücher „Algebraic Geometry“ von Robin Hartshorne und „Central Simple Algebras and Galois Cohomology“ von Philippe Gille und Tamás Szamuely anschaffen. Das dabei erlangte Wissen benutzte ich, um auf den Vorschlag von Herrn Derenthal hin sogenannte „Brauer-Manin-Obstruktion“ auf das Problem anzuwenden.

Zunächst konnte ich hiermit die schon bekannten Ergebnisse reproduzieren und etwas verallgemeinern.

Schließlich charakterisierte ich die Zahlen der Form $x^2 + y^2 + z^k$ für bestimmte k explizit, wenn die sogenannte Schinzel-Vermutung H stimmt. Beispielsweise ist jede Zahl von dieser Form, wenn k eine von 2 verschiedene Primzahl ist. Für ungerade k gab ich einen Algorithmus an, der (wieder unter Annahme der Schinzel-Vermutung H) entscheidet, ob eine Zahl von dieser Form ist.