

Mathematisches Institut der Ludwig-Maximilians Universität München

Rational triviale Torseure und die Serre–Grothendiecksche Vermutung

Lukas-Fabian Moser

2008

Diplomarbeit
Betreuer: Prof. Dr. Fabien Morel

Zusammenfassung

Es sei k ein Körper. Wir studieren die étale Kohomologie einer glatten k -Varietät mit Werten in einer (glatten) linearen algebraischen Gruppe über k . Die Serre-Grothendiecksche Vermutung besagt: ist G eine reduktive lineare Gruppe über k , und ist X eine glatte k -Varietät mit Funktionenkörper K , so hat für jedes $x \in X$ die Abbildung $\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{X,x}, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(K, G)$ trivialen Kern. Wir beweisen Sätze von Colliot-Thélène–Ojanguren und Raghunathan, die insbesondere die Vermutung für *zerfallendes* G über einem *unendlichen* Körper k implizieren. Als Nebenresultat erhalten wir den Satz von Quillen–Suslin über die Trivialität von Vektorbündeln über \mathbb{A}_k^n im Fall eines unendlichen Körpers k .

Inhalt

1 Grundlagen	8
1.1 Punkte eines Schemas mit Werten in einem Körper	8
1.2 Glatte, unverzweigte und étale Morphismen	10
1.3 Topologien und Garben	15
1.4 Abstiegstheorie I – Treuflacher Abstieg	25
1.5 Algebraische Gruppen	30
2 Torseure und die Serre–Grothendiecksche Vermutung	39
2.1 Faserbündel, Torseure und Kohomologie	39
2.2 Lokalisierung und Kohomologie	48
2.3 Exkurs: Berechnung von $\check{H}^1(\mathbb{P}_k^1, GL_n)$	52
2.4 Der Fall endlicher Gruppenschemata	56
2.5 Abstiegstheorie II – Verklebende Ringhomomorphismen	60
2.6 Generische Koordinatentransformationen und Normalformen	66
2.7 Die Sätze von Colliot-Thélène–Ojanguren	74
3 Rational triviale Torseure auf \mathbb{A}_k^n	78
3.1 Torseure unter auflösbaren Gruppen und Tori	78
3.2 Rational triviale Torseure auf der affinen Geraden	80
3.3 Starrheit von Vektorbündeln über Familien projektiver Geraden	80
3.4 Starrheit von Torseuren über Familien projektiver Geraden	84
3.5 Quillen-Patching für Torseure über Familien affiner Geraden	87
3.6 Trivialität rational trivialer Torseure auf \mathbb{A}_k^n	89

Einleitung

Es sei F ein topologischer Raum. Ein *Faserbündel* mit *typischer Faser* F ist bekanntlich eine stetige Abbildung $\pi : E \rightarrow X$ topologischer Räume, die lokal (auf X) isomorph ist zur Projektion $X \times F \rightarrow X$, für die es also eine offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ und mit $X' := \coprod_i U_i$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X E & \xrightarrow[\cong]{f} & X' \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{proj.} \\ & X' & \end{array}$$

gibt. Ist $F = G$ sogar eine topologische Gruppe, und besitzt E eine stetige G -Rechtsaktion, unter der π invariant ist, und die von f in die natürliche G -Rechtsaktion auf $X' \times G$ überführt wird, so nennt man $E \rightarrow X$ ein *G -Hauptfaserbündel*.

Diese Arbeit handelt von *Torseuren*, dem Analogon von Hauptfaserbündeln in der algebraischen Geometrie – man könnte einen Torseur ein „algebraisches Hauptfaserbündel“ nennen. Die Kategorie der topologischen Räume ersetzen wir durch die Kategorie der S -Schemata (für eine feste Basis S), und indem wir das Koproduct offener Teilmengen durch das vorläufig noch undefinierte Wort „Überdeckung“ ersetzen, erhalten wir die

Definition. Es sei G ein Gruppenschema über S . Ein G -Torseur auf einem S -Schema X ist ein Morphismus $\pi : E \rightarrow X$ von S -Schemata, wobei auf E eine G -Rechtsoperation fixiert ist, bezüglich derer π invariant ist, und so daß es eine Überdeckung $X' \rightarrow X$ und einen G -äquivarianten Isomorphismus von X' -Schemata $X' \times_X E \xrightarrow{\cong} X' \times_S G$ gibt.

Lesen wir „Überdeckung“ als „surjektives Koproduct offener Einbettungen“, so erhalten wir den Begriff eines Torseurs bezüglich der Zariskitopologie.⁽ⁱ⁾ Es ist aber ein bekanntes Phänomen in der algebraischen Geometrie, daß die Zariskitopologie für viele Fragen „zu grob“ ist.⁽ⁱⁱ⁾ Man möchte daher den Begriff der offenen Überdeckung eines Schemas ersetzen durch einen Begriff, der eher die Flexibilität offener Überdeckungen in der *klassischen* Topologie bietet. Es stellt sich heraus, daß dies die surjektiven Familien *étaler* Morphismen leisten: im komplexen Fall ist ein Morphismus $X \rightarrow Y$ von Varietäten über \mathbb{C} genau dann étale, wenn er in der klassischen (analytischen) Topologie lokaler Isomorphismus ist ([Mu, Cor. 2 zu Thm. 3]; der entscheidende Punkt ist unsere Proposition 1.2.12). Lesen wir nun in der Definition das Wort „Überdeckung“ als „surjektiver étaler Morphismus“, so erhalten wir die Definition eines Torseurs bezüglich der „étalen Topologie“.

Ein Zariski-Torseur ist natürlich insbesondere ein étaler Torseur mit der – nun nicht mehr selbstverständlichen – Eigenschaft, „rational trivial“, d.h. auf einer Zariski-offenen Menge trivial zu sein. Die Serre-Grothendiecksche Vermutung besagt nun, daß ein rational trivialer étaler Torseur unter einer *reduktiven* Gruppe bereits ein Zariski-Torseur ist (vgl. etwa [Se, 5.5, Remarque]). Wir beweisen diese Vermutung im Falle eines endlichen Gruppenschemas sowie (nach Colliot-Thélène-Ojanguren und Raghunathan) im Fall einer *zerfallenden* reduktiven Gruppe über einem unendlichen Körper.

⁽ⁱ⁾Man beachte aber, daß auch ein Torseur in der Zariskitopologie im allgemeinen kein Hauptfaserbündel der zugrundeliegenden topologischen Räume ist, weil ein (Faser-)Produkt von Schemata für gewöhnlich nicht mit dem der zugrundeliegenden topologischen Räume übereinstimmt.

⁽ⁱⁱ⁾So ist ja beispielsweise jede nichtleere offene Teilmenge einer (irreduziblen) Varietät dicht.

Voraussetzungen und Aufbau

Wir setzen beim Leser nur Vertrautheit mit der Sprache der Schemata in der algebraischen Geometrie – etwa im Umfang des zweiten und dritten Kapitels von [Har] – sowie Grundkenntnisse in der Theorie algebraischer Gruppen – etwa wie in [Hu] ohne die Klassifikation halbeinfacher Gruppen – voraus.

Darauf aufbauend, stellt unser erstes Kapitel weitere Grundlagen bereit: Nach einigen Bemerkungen über topologische Eigenschaften der Menge $X(k)$ der Punkte eines Schemas X mit Werten in einem Körper k folgt ein Abschnitt über glatte und étale Morphismen, die in [Har] nicht in der für uns nötigen Allgemeinheit betrachtet werden. Anschließend werden die Grundtatsachen der Garbentheorie auf Grothendieck-(Prä-)Topologien dargestellt. Der nächste Abschnitt behandelt Abstiegstheorie (*descent*): Die Sätze über das Verkleben von (auch quasikohärenten) Garben und affinen Schemata bezüglich étaler oder fppf-Überdeckungen werden mehr oder weniger ausführlich bewiesen; Grothendiecks Sätze über das Verhalten von Eigenschaften von Morphismen von Schemata bezüglich treuflachem Abstieg lediglich zitiert. – Ein letzter Abschnitt behandelt algebraische Gruppen: wir ordnen die in Büchern wie [Hu], [Bor] oder [Sp] verwendete klassische „mengentheoretische“ Sprache in die Welt der Schemata ein und vergleichen insbesondere die verschiedenen Konstruktionen von Quotienten algebraischer Gruppen nach Untergruppen. Zuletzt kommen einige Rationalitätsfragen für algebraische Gruppen über nicht algebraisch abgeschlossenen Körpern zur Sprache, insbesondere im Hinblick auf die Bruhat-Zerlegung. Diese Resultate sind in der üblichen Lehrbuchliteratur nur sehr verstreut zu finden.

Das zweite Kapitel ist Torseuren gewidmet: die allgemeine Theorie (inkl. Restriktion und Erweiterung der Strukturgruppe) behandeln wir im abstrakten Fall von *Garbentorseuren*, bei dem die (schwierigen) Existenzfragen vorläufig außen vor bleiben können. Anschließend widmen wir uns Torseuren auf Schemata in der étalen oder der fppf-Topologie unter einem Gruppenschema G . Im Fall $G = GL_n$ erhalten wir nach Hilberts Satz 90 den bekannten Begriff des Vektorbündels zurück. In einem Exkurs geben wir einen elementaren, auf Dedekind–Weber zurückgehenden Beweis der Klassifikation der Vektorbündel auf der projektiven Geraden über einem Körper. Anschließend studieren wir Torseure unter *endlichen* Gruppenschemata: Für sie beweisen wir eine Verschärfung der Serre–Grothendieckschen Vermutung und zeigen dann, daß im Falle *konstanter* endlicher Gruppen sogar „Reinheit“ vorliegt, d.h. daß die étale Kohomologie eines Schemas mit Werten in einer konstanten endlichen Gruppe nicht von den Punkten der Kodimension ≥ 2 abhängt. Der Rest des Kapitels ist dem Beweis der Sätze von Colliot-Thélène–Ojanguren gewidmet, die besagen: Es sei k ein unendlicher Körper und G eine lineare algebraische Gruppe über k . Gilt, erstens, die Serre–Grothendiecksche Vermutung für G -Torseure über jedem \mathbb{A}_k^n , so gilt sie für G -Torseure über jeder glatten k -Varietät. Zweitens liegt diese Situation insbesondere dann vor, wenn für jede Körpererweiterung $k \subset K$ jeder rational triviale G -Torseur über jedem \mathbb{A}_K^n bereits trivial ist.

Im dritten Kapitel beweisen wir den Satz von Raghunathan, daß im Falle einer *k-zerfallenden* zusammenhängenden reductiven Gruppe G tatsächlich jeder rational triviale G -Torseur auf jedem \mathbb{A}_k^n trivial ist, was insbesondere die Serre–Grothendiecksche Vermutung für diese Gruppen impliziert. Der Beweis ist ein Induktionsargument nach n ; wesentliche Techniken sind die Fortsetzung von Torseuren von \mathbb{A}_X^1 (X ein Schema) nach \mathbb{P}_X^1 , Grothendiecks Starrheitssatz für Vektorbündel auf Familien projektiver Geraden nebst seiner Verallgemeinerung für Torseure unter beliebigen linearen Gruppen sowie Quillens Patching-Lemma aus dem Beweis der Trivialität von Vektorbündeln auf \mathbb{A}_k^n . Da GL_n über jedem Körper zerfallend ist, erhalten wir insbesondere einen Beweis dieses Resultats im Falle eines unendlichen Grundkörpers.

Tatsächlich ist die Serre–Grothendiecksche Vermutung auch für *beliebige* reductive Gruppen G richtig. Dies bewies Raghunathan im Jahr 1993 unter Verwendung des ersten Satzes von Colliot-Thélène–Ojanguren, indem er also zeigte, daß für eine solche Gruppe jeder rational triviale G -Torseur über \mathbb{A}_k^n lokal trivial ist. Er verwendet dabei unter anderem auch einen großen Teil der Techniken, die wir im dritten Kapitel erklären, so daß unsere Arbeit beim Studium des Artikels [Ra93] möglicherweise nützlich sein dürfte.

Konventionen

Alle Ringe sind kommutativ und besitzen ein Einselement. Den Begriff „Schema“ verwenden wir wie in [Har], ein Schema ist also ein Präschema im Sinne von [EGA]. Bisweilen verwenden wir das Wort „Varietät“ und meinen damit gewöhnlich ein integres Schema, das lokal von endlichem Typ über einem Körper ist. Die Kategorie der Mengen bezeichnen wir mit **Set**, die der Moduln über einem Ring A mit **Mod**(A) oder **Mod** $_A$, die Kategorie der A -Algebren entsprechend mit **Alg**(A) oder **Alg** $_A$. Das ausgezeichnete Element einer punktierten Menge nennen wir 0 , 1 oder auch \ast . Das letztere Zeichen verwenden wir auch für ein finales Objekt in einer Kategorie. Ist S ein Objekt einer Kategorie \mathbf{C} , so bezeichnen wir mit \mathbf{C}/S die Kategorie der Objekte „über S “, also der Morphismen mit Ziel S . Ist $X \rightarrow S$ ein S -Objekt und $S' \rightarrow S$ ein Morphismus, so bezeichnen wir das S' -Objekt $X \times_S S'$ bisweilen auch mit $X_{S'}$. Ist k ein Körper, so bezeichnen wir mit \bar{k} einen algebraischen und mit k_{sep} einen separablen Abschluß von k .

Wir vereinbaren außerdem folgende Notation: ist A ein Ring und V ein A -Modul (den wir je nach Bedarf als Links- oder Rechtsmodul auffassen), so wirken Matrizen über A durch formale Matrixmultiplikation auf Matrizen über V . Das bedeutet insbesondere genauer: ist $Q = (q_{ij}) \in A^{m \times n}$ eine Matrix, so können wir n -Tupel von Elementen von V von links und m -Tupel von rechts mit Q multiplizieren, und zwar gilt (mit $(v_1, \dots, v_n) := (v_1 \dots v_n)^T$):

$$(w_1, \dots, w_m) = Q(v_1, \dots, v_n) \iff w_i = \sum_{j=1}^n q_{ij}v_j \text{ für alle } i,$$
$$(v_1 \dots v_n) = (w_1 \dots w_m)Q \iff v_j = \sum_{i=1}^m w_i q_{ij} \text{ für alle } j.$$

Die Nützlichkeit dieser Notation ergibt sich daraus, daß die so definierten Verknüpfungen, wie man sich leicht überlegt, den vertrauten Rechenregeln für Matrixmultiplikation gehorchen.

Einige Sätze und Beweise sind in kleinerem Druck gehalten, um deutlich zu machen, daß sie – obschon für uns wichtig – eine Unterbrechung des natürlichen Gedankengangs in einem Abschnitt darstellen. Vielleicht wird die Struktur der Überlegungen dadurch leichter erkennbar.

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Morel sehr herzlich für die geduldige Betreuung dieser Arbeit und seine Bereitschaft zu ausführlichen Erklärungen; ebenso Dr. Stefan Gille und Dr. Nikita Semenov für die Beantwortung von Fragen, und schließlich Katharina Halbhuber und Robert Kremser für unzählige – mal unterhaltsame, mal lehrreiche; mal fachliche, mal nichtfachliche – Gespräche mal an grünen, mal an gedeckten Tafeln sowie für zahlreiche wertvolle Anmerkungen zu dieser Arbeit.

1 Grundlagen

1.1 Punkte eines Schemas mit Werten in einem Körper

Es sei X ein S -Schema. Für ein weiteres S -Schema T schreiben wir üblich $X(T) := \text{Hom}_{\text{Sch}/S}(T, X)$. Ist $S' \rightarrow S$ ein Morphismus und T ein S' -Schema, so haben wir eine kanonische Identifikation

$$X(T) = \text{Hom}_{\text{Sch}/S}(T, X) \cong \text{Hom}_{\text{Sch}/S'}(T, X_{S'}) = X_{S'}(T).$$

Ist k ein Körper über S , so induziert die kanonische Abbildung $X(k) \rightarrow X$ eine Topologie auf $X(k)$, die wir die S -Topologie der k -Punkte von X nennen wollen. Ohne Schwierigkeiten verifiziert man:

1.1.1 Proposition. *Die Vorschrift $X \mapsto X(k)$ definiert einen Funktor von den S -Schemata in die topologischen Räume, der offene und abgeschlossene Einbettungen erhält sowie projektive Limites auf mengentheoretische projektive Limites abbildet.*

Beispielsweise ist die Abbildung $(X \times_S Y)(k) \rightarrow X(k) \times Y(k)$ stets bijektiv und stetig, jedoch im allgemeinen kein Homöomorphismus.

Offenbar ist $X_{\text{red}}(k) = X(k)$. Ist $S' \rightarrow S$ ein Morphismus und k ein Körper über S' , so ist die S' -Topologie auf $X(k)$ feiner als die S -Topologie: dies folgt aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{S'}(\text{Spec } k, X_{S'}) & \longrightarrow & X_{S'} \\ \parallel & & \downarrow \\ \text{Hom}_S(\text{Spec } k, X) & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Im allgemeinen ist die S' -Topologie auch *echt* feiner als die S -Topologie: in der \mathbb{R} -Topologie auf $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ beispielsweise sind i und $-i$ topologisch nicht unterscheidbar, während die \mathbb{C} -Topologie die klassische Zariskitopologie ist.

Ist im folgenden k ein Körper und X ein k -Schema lokal von endlichem Typ, so betrachten wir auf $X(k)$ die k -Topologie, wenn wir nicht ausdrücklich etwas anderes sagen.

1.1.2 Proposition. *Es sei k ein Körper, $X \rightarrow \text{Spec } k$ lokal von endlichem Typ und $k \subset K$ eine algebraische Körpererweiterung. Dann ist in $X(K)$ mit der k -Topologie jeder Punkt abgeschlossen.*

Beweis. Ein k -Morphismus $\text{Spec } K \rightarrow X$ hat als Bild einen Punkt $x \in X$, für den $\kappa(x)$ algebraisch über k ist, und nach dem nächsten Lemma ist ein solcher Punkt abgeschlossen. \square

1.1.3 Lemma. *Sei X lokal von endlichem Typ über einem Körper k . Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\kappa(x)$ algebraisch über k ist, und dann ist $k \subset \kappa(x)$ sogar endlich.*

Beweis. Es genügt, die Aussage für affine Schemata zu beweisen. Sei also A endlich erzeugte k -Algebra und $\mathfrak{p} \subset A$ ein Primideal. Dieses ist genau dann maximal, wenn $0 = \dim A/\mathfrak{p} = \text{tr. deg}_k \text{Quot } A/\mathfrak{p} = \text{tr. deg}_k \kappa(\mathfrak{p})$ ist, und in diesem Fall ist A/\mathfrak{p} als endlich erzeugte Körpererweiterung sogar endlich nach dem Hilbertschen Nullstellensatz. \square

1.1.4 Proposition. *Es sei k ein Körper und X ein k -Schema. Dann induziert die natürliche Abbildung $X(k) \rightarrow X$ einen Homöomorphismus von $X(k)$ auf die Menge der k -rationalen Punkte von X .*

Beweis. Zu jedem Punkt $x \in X$ mit $k \xrightarrow{\cong} \kappa(x)$ gehört genau ein k -wertiger Punkt $\text{Spec } k \cong \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$. Dies zeigt die Bijektivität. Sei also $X_0 \subset X$ die Menge der k -rationalen Punkte. Dann ist $X(k) \rightarrow X_0$ nach Definition stetig, und $X(k)$ trägt die induzierte Topologie, also ist die Abbildung ein Homöomorphismus. \square

1.1.5 Proposition. *Es sei k ein Körper und $X \rightarrow \text{Spec } k$ lokal von endlichem Typ. Ist \bar{k} ein algebraischer Abschluß von k , so ist $X(\bar{k}) \rightarrow X$ ein Quasi-Homöomorphismus mit endlichen Fasern (wobei $X(\bar{k})$ mit der k -Topologie versehen ist).*

Wir erinnern daran, daß ein Quasi-Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ stetiger Räume eine stetige Abbildung ist, für die die induzierte Abbildung $\text{Op}(Y) \rightarrow \text{Op}(X)$ bijektiv ist, wobei $\text{Op}(X)$ die Menge der offenen Teilmengen von X bezeichnet.

Die Proposition zeigt beispielsweise, daß $\mathbb{A}^n(\bar{k})$ mit der k - oder der \bar{k} -Topologie irreduzibel ist. Bei ihrem Beweis hilfreich ist das folgende

1.1.6 Lemma. *Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen ist genau dann ein Quasi-Homöomorphismus, wenn X die durch f induzierte Topologie trägt (d.h. wenn die offenen Mengen von X genau die f -Urbilder offener Mengen in Y sind) und $f(X)$ jede nichtleere lokal abgeschlossene Teilmenge von Y schneidet.*

Den problemlosen Beweis übergehen wir hier.

Beweis der Proposition. Es genügt zu zeigen, daß das Bild jede nichtleere lokal abgeschlossene Menge schneidet; aber das ist eine der vielen Formulierungen des Hilbertschen Nullstellensatzes. Die Endlichkeit der Fasern folgt daraus, daß ein Morphismus $\text{Spec } \bar{k} \rightarrow X$ stets einen *abgeschlossenen* Punkt als Bild hat, dessen Restklassenkörper L mithin eine endliche Erweiterung von k ist und sich damit nur auf endlich viele Arten in \bar{k} einbetten läßt. \square

1.1.7 Korollar. *Ist k ein unendlicher Körper, so ist $\mathbb{A}^n(k)$ in $\mathbb{A}^n(\bar{k})$, versehen mit der \bar{k} -Topologie, dicht.*

Beweis. Bekanntlich liegen die k -rationalen Punkte im Schema \mathbb{A}_k^n dicht (für $n = 1$ ist das die Tatsache, daß ein nichtverschwindendes Polynom in einer Variablen über einem Körper nur endlich viele Nullstellen hat; der Fall $n > 1$ folgt daraus durch Induktion). Also ist die Komposition $\mathbb{A}^n(k) \subset \mathbb{A}^n(\bar{k}) \rightarrow \mathbb{A}_k^n$ dominant, und da $\mathbb{A}^n(\bar{k})$ die von \mathbb{A}_k^n induzierte Topologie trägt, folgt die Behauptung. \square

1.1.8 Proposition. *Es sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung. Ist X ein k -Schema, so ist die Abbildung $X(k) \rightarrow X(K)$ stetig, wobei $X(K)$ mit der K -Topologie versehen ist.*

Beweis. Wir können annehmen, daß $X = \text{Spec } A$ affin ist. Sei $Z \hookrightarrow X_K$ gegeben durch ein Ideal $I \subset A_K = A \otimes_k K$, wobei es genügt, den zyklischen Fall $I = (f)$ zu betrachten. Für einen k -Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow k$ wollen wir untersuchen, wann $\varphi_K : A_K \rightarrow K$ über A_K/I faktorisiert. Wähle eine k -Basis $(x_i)_{i \in I}$ von K und schreibe $f = \sum_i f_i \otimes x_i$ mit $f_i \in A$. Dann ist $\varphi_K(f) = \sum_i \varphi(f_i)x_i$, und diese Summe verschwindet genau dann, wenn alle $\varphi(f_i)$ verschwinden, wenn also φ über A/I_0 mit $I_0 = \sum_i (f_i)$ faktorisiert. \square

1.1.9 Korollar. *In der Situation der Proposition ist die k -Topologie auf $X(k)$ die Teilraumtopologie von $X(k) \subset X(K)$, wobei $X(K)$ die k - oder die K -Topologie tragen kann.*

Beweis. Für $X(K)$ mit der k -Topologie ist die Aussage klar, da $X(k) \rightarrow X$ über $X(K)$ faktorisiert. Für $X(K)$ mit der K -Topologie betrachte die Abbildung

$$\{K\text{-abgeschlossene Teilmengen von } X(K)\} \rightarrow \{k\text{-abgeschlossene Teilmengen von } X(k)\}.$$

Sie ist wohldefiniert nach der Proposition; sie ist aber surjektiv, denn eine abgeschlossene Teilmenge von $X(k)$ ist Einschränkung einer k -abgeschlossenen Teilmenge von $X(K)$, und die K -Topologie ist feiner als die k -Topologie. \square

Insbesondere ist für einen unendlichen Körper k der Raum $\mathbb{A}^n(k)$ irreduzibel: denn $\mathbb{A}^n(k)$ ist dicht in $\mathbb{A}^n(\bar{k})$ mit der \bar{k} -Topologie; letzterer Raum ist irreduzibel, also auch $\mathbb{A}^n(k)$ mit der induzierten Topologie, aber diese ist identisch mit der k -Topologie.

1.1.10 Proposition. *Es sei X ein S -Schema und k ein S -Körper. Ist k unendlich, so ist die Abbildung $\mathbb{A}_X^1(k) \rightarrow X(k)$ (in der S -Topologie) offen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für eine offene Teilmenge $U \hookrightarrow \mathbb{A}_X^1$ das Bild von $U(k) \rightarrow X(k)$ offen in der S -Topologie ist. Wir können annehmen, daß $S = \text{Spec } R$ und $X = \text{Spec } A$ affin sind, und daß $U = \text{Spec } A[T]_F$ mit einem Polynom $F = \sum_{i=0}^n c_i T^i \in A[T]$ ist. Ein R -Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow k$ liegt genau dann im Bild von $\text{Hom}_R(A[T]_F, k) \rightarrow \text{Hom}_R(A, k)$, wenn es ein $\alpha \in k$ gibt mit $F^\varphi(\alpha) \neq 0$ (wobei $F^\varphi = \sum_{i=0}^n \varphi(c_i) T^i \in k[T]$ ist). Da k unendlich ist, ist dies genau dann der Fall, wenn $F^\varphi \neq 0$ ist, wenn φ also über einen der Ringe A_{c_i} faktorisiert, und das bedeutet gerade, daß φ in der durch $\bigcup_{i=0}^n D(c_i) \subset \text{Spec } A$ definierten offenen Teilmenge von $X(k) = \text{Hom}_R(A, k)$ liegt. \square

Durch wiederholte Anwendung der Proposition folgt, daß auch $\mathbb{A}_X^n(k) \rightarrow X(k)$ im Falle eines unendlichen Körpers k offen ist. Wir werden dies beispielsweise benötigen für Abbildungen zwischen Matrizenräumen, die einige Zeilen oder Spalten „vergessen“.

1.2 Glatte, unverzweigte und étale Morphismen

Wir stellen hier die abstrakten Definitionen glatter und étaler Morphismen von Schemata bereit. Die definitive Referenz ist [EGA, IV, § 17]; im Falle von Glattheit geben wir jedoch Charakterisierungen, die dort nur sehr implizit zur Sprache kommen.

Definition. Es sei A ein Ring. Eine A -Algebra B heißt *formell glatt* (bzw. *formell unverzweigt* bzw. *formell étale*), wenn für jede A -Algebra R und jedes nilpotente Ideal $I \subset R$ die Abbildung $\text{Hom}_{\text{Alg}_A}(B, R) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Alg}_A}(B, R/I)$ surjektiv (bzw. injektiv bzw. bijektiv) ist.

Formelle Glattheit bedeutet also: ist R eine beliebige A -Algebra und $I \subset R$ ein nilpotentes Ideal, so existiert in jedem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & R \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow \\ B & \longrightarrow & R/I \end{array}$$

ein gestrichelter Pfeil. Formelle Unverzweigkeit bedeutet, daß es höchstens einen solchen Pfeil gibt. Alle Begriffe bleiben identisch, wenn man die Forderung, daß I nilpotent ist, verstärkt zu $I^2 = 0$ (Beweis durch Induktion nach n in $I^n = 0$). Unter dieser stärkeren Voraussetzung kann man die Frage nach der Eindeutigkeit von Liftungen kann man noch präziser fassen:

1.2.1 Proposition. Es sei B eine A -Algebra, R eine weitere A -Algebra und $I \subset R$ ein Ideal mit $I^2 = 0$. Es sei $f : B \rightarrow R/I$ ein Homomorphismus von A -Algebren. Dann ist die Menge aller Liftungen $F : B \rightarrow R$ von f ein Torseur unter der Gruppe $\text{Der}_A(B, I)$, wobei I vermöge f als B -Modul aufgefaßt wird.

Dabei ist ein Torseur unter einer Gruppe eine (möglicherweise leere) Menge, auf der die Gruppe frei und transitiv operiert.

Beweisskizze. Es sei $F : B \rightarrow R$ eine Liftung von f . Es genügt zu zeigen: für eine Funktion $D : B \rightarrow R$ ist $F + D$ genau dann eine weitere Liftung von f , wenn D eine A -Derivation $B \rightarrow I$ ist; aber dies läßt sich mühelos nachrechnen. \square

Insbesondere folgt aus $\Omega_{B/A}^1 = 0$, daß B formell unverzweigt über A ist. Die Umkehrung gilt auch, vgl. [EGA, IV.17.2.1].

1.2.2 Beispiel. Es sei A ein Ring. Ist $S \subset A$ ein multiplikatives System, so ist $A \rightarrow S^{-1}A$ formell étale. Der Polynomring $A[X_1, \dots, X_n]$ ist formell glatt über A .

Beweis. Nicht ganz offensichtlich ist nur die formelle Glattheit von Lokalisierungen. Ist aber R eine A -Algebra, $I \subset R$ nilpotent und $f : S^{-1}A \rightarrow R/I$ ein A -Homomorphismus, so ist jedes $s \in S$ invertierbar in R/I und damit bereits in R , also faktorisiert $A \rightarrow R/I$ über $S^{-1}A$. \square

1.2.3 Proposition. Für die definierten Begriffe gelten folgende Rechenregeln:

1. *Transitivität:* Ist B formell glatt (unverzweigt, étale) über A und C formell glatt (unverzweigt, étale) über B , so ist C auch formell glatt (unverzweigt, étale) über A .
2. *Stabilität unter Basiswechsel:* Ist A' eine A -Algebra, so ist für eine formell glatte (unverzweigte, étale) A -Algebra B auch die A' -Algebra $B \otimes_A A'$ formell glatt (unverzweigt, étale).
3. *Kürzungsregel:* Ist eine Komposition $A \rightarrow B \rightarrow C$ formell unverzweigt, so auch $B \rightarrow C$. Ist $A \rightarrow B$ formell unverzweigt und die Komposition $A \rightarrow B \rightarrow C$ formell glatt (étale), so ist auch $B \rightarrow C$ formell glatt (étale).

Beweisskizze. Die Transitivität überlassen wir dem Leser. Die Stabilität unter Basiswechsel folgt daraus, daß Basiswechsel linksadjungiert zum Vergißfunktorkomplex ist: für jede A' -Algebra R gilt $\text{Hom}_{\text{Alg}_{A'}}(B, R) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{Alg}_A}(B \otimes_A A', R)$. Für die Kürzungsregel sei R eine B -Algebra und $I \subset R$ ein nilpotentes Ideal. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\text{Alg}_B}(C, R) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Alg}_B}(C, R/I) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_{\text{Alg}_A}(C, R) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Alg}_A}(C, R/I) \end{array}$$

Ist $A \rightarrow C$ formell unverzweigt, so ist der untere horizontale Pfeil injektiv, und damit auch der obere. Ist aber $A \rightarrow B$ formell unverzweigt, so ist das Diagramm kartesisch (ein Faserprodukt diagramm), und damit folgt aus der Surjektivität des unteren auch die des oberen Pfeils. \square

Insbesondere ist, für ein multiplikatives System $S \subset A$, eine $S^{-1}A$ -Algebra B genau dann formell glatt (unverzweigt, étale), wenn sie es über A ist. Es gilt aber noch mehr:

1.2.4 Proposition (Lokale Natur formeller Glattheit). Eine endlich präsentierbare A -Algebra B ist genau dann formell glatt (unverzweigt, étale), wenn es $b_1, \dots, b_n \in B$ gibt mit $(b_1, \dots, b_n) = B$, so daß jedes B_{b_i} eine formell glatte (unverzweigte, étale) A -Algebra ist.⁽ⁱ⁾

⁽ⁱ⁾Die Aussage ist in [EGA, IV.17.1.6] ohne die Endlichkeitsvoraussetzung formuliert; allerdings weiß ich im Fall formeller Glattheit nicht, warum der Beweis ohne diese Voraussetzung auskommt.

Beweisskizze. Es ist nur „immer dann“ zu zeigen. Der Fall formeller Unverzweigtheit ist eine einfache Übung. Im Fall formeller Glattheit sei R eine A -Algebra, $I \subset R$ ein Ideal mit $I^2 = 0$ und $f : B \rightarrow R/I$ ein Homomorphismus von A -Algebren. Für jedes i sei $r_i \in R$ ein Element mit $f(b_i) = [r_i]$. Dann gilt auch $(r_1, \dots, r_n) = R$. Es sei $N := \text{Der}_A(B, I)$. Für jedes $r \in R$ ist die Menge aller Liftungen von $B \rightarrow (A/I)_r$ nach A_r ein Torseur unter $\text{Der}_A(B, I_r) \cong N_r$ (für diese Isomorphie benötigen wir die Endlichkeitsannahme an B). Nach Voraussetzung existiert für jedes i eine Liftung von $B \rightarrow (A/I)_{r_i}$ nach A_{r_i} . Die paarweisen Differenzen von Liftungen $B \rightarrow A_{r_i r_j}$ liefern dann einen Čech-Kozykel der Modulgarbe \tilde{N} auf $\text{Spec } R$. Die Kohomologie einer quasikohärenten Garbe auf einem affinen Schema verschwindet jedoch ([EGA, III.1.3.1]), und eine Trivialisierung dieses Kozykels liefert eine Liftung von $B \rightarrow A/I$ über A . (Im Sinne des späteren Verlaufs dieser Arbeit hätten wir auch formulieren können: die lokalen Liftings bilden einen Garbentorseur auf $\text{Spec } R$ in der Zariskitopologie). \square

Definition. Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata. f heißt *glatt* in $x \in X$, wenn f in einer Umgebung von x lokal endlich präsentierbar ist und $\mathcal{O}_{X,x}$ eine formell glatte $\mathcal{O}_{Y,f(y)}$ -Algebra ist. f heißt *glatt*, wenn f in jedem $x \in X$ glatt ist; dann sagt man auch, X sei *glatt über* Y . Die analogen Definitionen trifft man für „unverzweigt“ und „étale“.

Eine A -Algebra B heißt *glatt* (in $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$), wenn $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ glatt (in \mathfrak{q}) ist. Analog für unverzweigt und étale. Für Algebren bedeutet „glatt“ dasselbe wie „formell glatt und endlich präsentierbar“, analog für alle anderen Begriffe. Dies beweist man analog zum Beweis der lokalen Natur formeller Glattheit.

Definition. Es sei k ein Körper. Ein lokal noethersches k -Schema X heißt *geometrisch regulär* in $x \in X$, wenn für jede Körpererweiterung $k \subset K$ das Schema $X \times_k K$ regulär ist in jedem Punkt, der auf x projiziert.

1.2.5 Satz. *Es sei $f : X \rightarrow Y$ ein Morphismus von Schemata und $x \in X$ ein Punkt, so daß f in einer Umgebung von x lokal endlich präsentierbar ist. Es sei $y = f(x)$. Dann gilt:*

1. *f ist genau dann glatt in x , wenn f in x flach und das (lokal noethersche) $\kappa(y)$ -Schema $f^{-1}(y)$ geometrisch regulär in x ist.*
2. *f ist genau dann unverzweigt in x , wenn $\mathfrak{m}_y \mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ und $\kappa(y) \hookrightarrow \kappa(x)$ endlich separabel ist.*
3. *f ist genau dann étale in x , wenn f in x flach und unverzweigt ist.*

Beweis. [EGA, IV.17.4.1, 5.1, 6.1]. \square

Sei insbesondere $\varphi : A \rightarrow B$ ein endlich präsentierbarer Ringhomomorphismus, $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ und $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Ist $A \rightarrow B$ (d.h. $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$) glatt in \mathfrak{q} , so ist $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$ flach, und $B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$ ist ein regulärer lokaler Ring.

1.2.6 Korollar. *Es sei k ein Körper. Ein k -Schema X ist genau dann glatt in $x \in X$, wenn X auf einer Umgebung von x von endlichem Typ und geometrisch regulär in x ist.*

Insbesondere sind glatte Morphismen offen, denn es gilt:

1.2.7 Proposition. *Jeder flache, lokal endlich präsentierbare Morphismus von Schemata ist offen.*

Beweis. Dies ist eine (nichttriviale) Folgerung aus dem Going-Down-Satz für flache Algebren, siehe im noetherschen Fall [Mat, 6.I] oder [Mi80, I.2.12] und im allgemeinen Fall [EGA, IV.2.4.6]. \square

1.2.8 Beispiel. *Es sei k ein Körper. Eine k -Algebra A ist genau dann unverzweigt, wenn sie Produkt endlich vieler separabler Körpererweiterungen von k ist, und dann ist sie sogar endlich und étale.*

Beweis. „Immer dann“ ist klar. Für „nur dann“ sei $X := \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } k$ unverzweigt. Dann ist X noethersch, und für jedes $x \in X$ gilt $\mathfrak{m}_x = 0$, also ist $\mathcal{O}_{X,x} = \kappa(x)$. Nach Voraussetzung ist $\kappa(x)$ eine endliche separable Erweiterung von k . Insbesondere ist x abgeschlossen, und da X nur endlich viele irreduzible Komponenten besitzt, ist X endlich. \square

1.2.9 Proposition. *Es sei A ein Ring. Sind $F, Q \in A[X]$ Polynome, und ist F unitär, so ist $B := (A[X]/(F))_Q$ genau dann étale über A , wenn $\overline{F'}$ (mit $F' = dF/dX$) in B invertierbar ist.*

Man sagt dann, B sei *standard-étale* über A .

Beweis.

1. Sei zunächst $A = k$ ein Körper. Dann ist $F = \prod_i F_i^{e_i}$ mit paarweise nichtassozierten irreduziblen Polynomen F_i , und $B \cong \prod_i B_i$ mit $B_i := (k[X]/(F_i^{e_i}))_Q$ nach dem chinesischen Restsatz. Da jedes $k[X]/(F_i^{e_i})$ ein lokaler (artinscher) Ring ist, gilt

$$B_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } F_i \mid Q, \\ k[X]/(F_i^{e_i}) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem letzten Beispiel ist B also genau dann étale über k , wenn $k[X]/(F_i^{e_i})$ eine endliche separable Körpererweiterung von k ist für jedes i mit $F_i \nmid Q$, und dies ist äquivalent zu $e_i = 1$ und $F_i' \neq 0$ für alle i mit $F_i \nmid Q$.

Andererseits ist F' genau dann invertierbar in B , wenn es in jedem B_i invertierbar ist. Diese Bedingung ist nur nichttrivial für $F_i \nmid Q$; fixiere also ein solches i . Mit $G := \prod_{j \neq i} F_j^{e_j}$, also $F = F_i^{e_i} \cdot G$, folgt dann

$$\overline{F'} = \overline{F_i}^{e_i} \cdot \overline{G'} + e_i \overline{F_i}^{e_i-1} \cdot \overline{F_i}' \cdot \overline{G} = e_i \overline{F_i}^{e_i-1} \cdot \overline{F_i}' \cdot \overline{G} \quad \text{in } B_i.$$

Dieses Element ist genau dann invertierbar, wenn $e_i = 1$ und $F_i' \neq 0$ ist (denn dann ist $\overline{F_i}'$ automatisch invertierbar in B_i), und dies ist genau die Bedingung, unter der B étale über k ist.

2. Sei nun A beliebig. Da F unitär ist, ist $A[X]/(F)$ frei und deswegen B flach über A , so daß wir uns nur um die Unverzweigkeit kümmern müssen. Man sieht jedoch schnell, daß B genau dann unverzweigt ist, wenn $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ unverzweigt über $\kappa(\mathfrak{p})$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ ist. Nach dem schon behandelten Fall ist dies äquivalent dazu, daß F' in $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$ invertierbar wird für jedes \mathfrak{p} . Die Behauptung folgt dann aus dem nächsten Lemma. \square

1.2.10 Lemma. *Es sei B eine A -Algebra. Ein Element $b \in B$ ist genau dann invertierbar, wenn es in jedem $B \otimes_A \kappa(\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, invertierbar ist. (Es genügt sogar, nur maximale Ideale zu betrachten.)*

Zum Beweis betrachte beispielsweise die durch B definierte quasikohärente Garbe von $\mathcal{O}_{\text{Spec } A}$ -Algebren auf $\text{Spec } A$. – Man kann sogar zeigen, daß standard-étale Algebren in gewissem Sinn die „einzigen“ Beispiele étaler Morphismen sind:

1.2.11 Satz. *Ein Morphismus $Y \rightarrow X$ von Schemata ist genau dann étale, wenn es für jedes $\mathfrak{y} \in Y$ mit Bild $x \in X$ offene affine Umgebungen $\mathfrak{y} \in V \cong \text{Spec } B$ und $x \in U \cong \text{Spec } A$ gibt, so daß $A \rightarrow B$ standard-étale ist.*

Der Beweis ist schwierig und verwendet Zariskis Hauptsatz; siehe etwa [Mi80, 3.14]. Eine sehr der geometrischen Intuition entgegenkommende Version dieses Kriteriums ist:

1.2.12 Proposition. Ein Morphismus $Y \rightarrow X$ von Schemata ist genau dann étale, wenn es für jedes $y \in Y$ mit Bild $x \in X$ offene affine Umgebungen $y \in V \cong \text{Spec } B$ und $x \in U \cong \text{Spec } A$ gibt, so daß $B = A[X_1, \dots, X_n]/(F_1, \dots, F_n)$ gilt und $\det(\partial F_i/\partial X_j)_{i,j}$ in C invertierbar ist.

Zum Beweis siehe etwa [Mi80, I.3.16], wobei die Notwendigkeit direkt aus dem Satz (sogar mit $n = 2$) folgt.

1.2.13 Korollar. Es sei A ein Ring, $B = A[X_1, \dots, X_n]/(F_1, \dots, F_n)$ und $d \in A[X_1, \dots, X_n]$ die Determinante der Jacobimatrix $(\partial F_i/\partial X_j)_{i,j}$. Ist $\mathfrak{p} \subset B$ ein Primideal mit $d \notin \mathfrak{p}$ (wir unterscheiden in der Notation nicht zwischen d und seinem Bild in B), so ist $A \rightarrow B$ étale in \mathfrak{p} .

Beweis. Falls sogar $d \in B^\times$ gilt, ist $A \rightarrow B$ étale nach der Proposition. Wir reduzieren auf diesen Fall. Wir finden nämlich ein $b \in B - \mathfrak{p}$, so daß d in B_b invertierbar wird. Sei $Q \in A[X_1, \dots, X_n]$ ein Urbild von b . Dann haben wir

$$B_b = A[X_1, \dots, X_{n+1}]/(F_1, \dots, F_n, Q \cdot X_{n+1} - 1),$$

und die Determinante der neuen Jacobimatrix ist (nach der Kästchenregel) $d' = d \cdot Q$. Das Bild von d' in B_b ist $d \cdot b \in B_b^\times$, also ist $A \rightarrow B_b$ étale. \square

Als nächstes behandeln wir ähnliche „Jacobikriterien“ für Glattheit von Morphismen.

1.2.14 Satz. Es sei k ein noetherscher Ring und A eine glatte k -Algebra. Es sei $I \subset A$ ein Ideal, $B = A/I$ und $q \in \text{Spec } B$ mit Urbildern \mathfrak{p} in A und \mathfrak{p}_0 in k . Dann sind äquivalent:

1. $k \rightarrow B$ ist glatt in q .
2. B_q ist (formell) glatte $k_{\mathfrak{p}_0}$ -Algebra.
3. Es gibt Elemente $F_1, \dots, F_r \in I$ und k -Derivationen $D_1, \dots, D_r : A \rightarrow B$ mit $\sum_{i=1}^r F_i A_{\mathfrak{p}} = I A_{\mathfrak{p}}$ und $\det(D_j(F_i))_{i,j} \in B - \mathfrak{q}$.

Ist speziell $A = k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynomring, so sind 1.-3. auch äquivalent zu

4. Es gibt Elemente $F_1, \dots, F_r \in I$ mit $\sum_{i=1}^r F_i A_{\mathfrak{p}} = I A_{\mathfrak{p}}$, so daß mindestens ein r -reihiger Minor der Jacobimatrix $(\partial F_i/\partial X_j)_{i,j} \in A^{r \times n}$ nicht in \mathfrak{p} liegt (insbesondere ist $r \leq n$).

Beweis. „1. \iff 2.“ ist trivial, und die Äquivalenz „2. \iff 3.“ findet sich in [Mat, 29.E]. Im speziellen Fall $A = k[X_1, \dots, X_n]$ ist „4. \implies 3.“ ist klar, denn jeder Ableitungsoperator $\partial/\partial X_j : A \rightarrow A \rightarrow B$ ist eine k -Derivation, und wir müssen nur r von diesen auswählen. Es bleibt also nur „3. \implies 4.“ zu zeigen.

Wegen $\text{Der}_k(A, B) = \text{Hom}_A(\Omega_{A/k}^1, B)$ und $\Omega_{A/k}^1 = \bigoplus_{i=1}^n A \cdot dX_i$ für $A = k[X_1, \dots, X_n]$ ist jede k -Derivation $A \rightarrow B$ eine A -Linearkombination der Ableitungsoperatoren $\partial/\partial X_i$. Damit erhalten wir eine $n \times r$ -Matrix Q über A mit $(D_j(F_i))_{i,j} = (\partial F_i/\partial X_j)_{i,j} \cdot Q$. Über dem Körper $\kappa(\mathfrak{p}) = \kappa(\mathfrak{q})$ folgt daraus $r = \text{rk}(D_j(F_i))_{i,j} \leq \text{rk}(\partial F_i/\partial X_j)_{i,j} \leq r$, und das zeigt die Behauptung. \square

1.2.15 Zusatz. Sind die äquivalenten Aussagen 1.-3. des Satzes erfüllt, so sind $B_q/\mathfrak{p}_0 B_q$ und $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_0 A_{\mathfrak{p}}$ reguläre lokale Ringe mit $\dim(B_q/\mathfrak{p}_0 B_q) = \dim(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}_0 A_{\mathfrak{p}}) - r$, wobei r wie in 3. ist.

Insbesondere ist r im Satz eindeutig bestimmt, und ist speziell k ein Körper, so sind B_q und $A_{\mathfrak{p}}$ reguläre lokale Ringe mit $\dim B_q = \dim A_{\mathfrak{p}} - r$.

Beweis. Indem wir k durch k/\mathfrak{p}_0 ersetzen, können wir $\mathfrak{p}_0 = 0$ annehmen. Da A in \mathfrak{p} und B in \mathfrak{q} glatt sind, sind dann $A_{\mathfrak{p}}$ und $B_{\mathfrak{q}}$ reguläre lokale Ringe. Das bedeutet $\dim A_{\mathfrak{p}} = \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{p} \otimes_A \mathbb{K})$ und $\dim B_{\mathfrak{q}} = \dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{q} \otimes_A \mathbb{K})$ mit $\mathbb{K} = \kappa(\mathfrak{p}) = \kappa(\mathfrak{q})$. Die exakte Sequenz von A -Moduln $0 \rightarrow I \rightarrow \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{q} \rightarrow 0$ liefert nach Lokalisieren eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \sum_{i=1}^r F_i A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathfrak{p} \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathfrak{q} \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \rightarrow 0,$$

und durch Übergang zu \mathbb{K} -Vektorräumen erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\sum_{i=1}^r F_i \mathbb{K} \rightarrow \mathfrak{p} \otimes_A \mathbb{K} \rightarrow \mathfrak{q} \otimes_A \mathbb{K} \rightarrow 0.$$

Wir sind also fertig, wenn wir zeigen, daß die Elemente $F_i \otimes 1 \in \mathfrak{p} \otimes_A \mathbb{K}$ linear unabhängig über \mathbb{K} sind. Die k -Derivationen $D_1, \dots, D_r : A \rightarrow B$ induzieren aber k -Derivationen $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{K}$, und diese wiederum \mathbb{K} -lineare Abbildungen $\mathfrak{p} \otimes_A \mathbb{K} = \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p}^2 A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{K}$. Deren Produkt $\mathfrak{p} \otimes_A \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}^{1 \times r}$ bildet nun aber $F_1 \otimes 1, \dots, F_r \otimes 1$ auf r linear unabhängige Zeilen ab (die zusammen die Matrix $(\overline{D_j(F_i)})_{i,j} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$ bilden), und damit müssen die $F_i \otimes 1$ bereits \mathbb{K} -linear unabhängig gewesen sein. \square

1.2.16 Proposition. *Es sei $Y \rightarrow X$ ein glatter, surjektiver Morphismus von Schemata. Dann gibt es ein Schema Y' und einen Morphismus $Y' \rightarrow Y$, so daß die Komposition $Y' \rightarrow Y \rightarrow X$ étale und surjektiv ist.*

Beweis. [EGA, IV.17.16.3] \square

Man kann die Proposition auch so aussprechen, daß jede glatte Überdeckung eines Schemas verfeinert werden kann zu einer étalen Überdeckung. Diese Aussage wird im Studium von Torseuren unter algebraischen Gruppen wesentlich sein, vgl. 2.1.23.

1.3 Topologien und Garben

1.3.1 Prägarben

Es sei \mathbf{C} eine Kategorie. Eine Prägarbe \mathcal{F} auf \mathbf{C} ist dasselbe wie ein Funktor $\mathcal{F} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$. Ein Morphismus von Prägarben ist eine natürliche Transformation solcher Funktoren; die Kategorie der Prägarben auf \mathbf{C} bezeichnen wir mit $\mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ (von englisch „presheaf“). Sie enthält \mathbf{C} als volle Unterkategorie:

1.3.1 Satz (Lemma von Yoneda). *Für jede Kategorie \mathbf{C} definiert $X \mapsto \underline{X} := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(_, X)$ einen volltreuen Funktor $\mathbf{C} \hookrightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$.*

Der Satz ist ein Spezialfall (mit $\mathcal{F} := \underline{D}$ für ein Objekt $D \in \mathbf{C}$) der allgemeineren

1.3.2 Proposition (Allgemeines Lemma von Yoneda). *Für ein Objekt $C \in \mathbf{C}$ und eine Prägarbe \mathcal{F} ist die Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Presh}(\mathbf{C})}(\underline{C}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}(C)$, $\varphi \mapsto \varphi(C)(\mathrm{id}_C)$, bijektiv.*

Die einfachen Beweise übergehen wir hier. Eine Prägarbe der Form $\underline{X} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(_, X)$ heißt auch *darstellbar*.

1.3.2 Grothendieck-Topologien und Garben

Wir versuchen hier, das allernötigste der Garbentheorie zu erklären, ohne den umfangreichen Begriffsapparat von [SGA 3] oder [SGA 4] zu benötigen. Die meisten Beweise skizzieren wir nur soweit, daß der Leser sie selbst im Detail ausführen kann.

Definition. Es sei \mathbf{C} eine Kategorie. Ein Morphismus $Y \rightarrow X$ in \mathbf{C} heißt *quadrierbar*, wenn für jeden Morphismus $X' \rightarrow X$ das Faserprodukt $Y \times_X X'$ existiert.

Definition. Es sei \mathbf{C} eine Kategorie. Eine (*Grothendieck-*)*Topologie*⁽ⁱⁱ⁾ \mathcal{E} auf \mathbf{C} zu definieren, bedeutet, für jedes Objekt $X \in \mathbf{C}$ anzugeben, welche Familien $(Y_i \rightarrow X)_i$ quadrierbarer Morphismen mit Ziel X man als *Überdeckungen* bezeichnen möchte, wobei folgende Axiome erfüllt sein müssen:

1. Ist $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine Überdeckung, und ist $X' \rightarrow X$ ein beliebiger Morphismus, so ist auch $(Y_i \times_X X' \rightarrow X')_i$ eine Überdeckung.
2. Ist $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine Überdeckung, und ist für jedes i eine Überdeckung $(Z_{ij} \rightarrow Y_i)_j$ gegeben, so ist $(Z_{ij} \rightarrow Y_i \rightarrow X)_{i,j}$ eine Überdeckung.
3. $(X \xrightarrow{\text{id}} X)$ ist eine Überdeckung.⁽ⁱⁱⁱ⁾

Man nennt das Paar $(\mathbf{C}, \mathcal{E})$ einen *Situs* und schreibt auch $\mathbf{C}_{\mathcal{E}} := (\mathbf{C}, \mathcal{E})$.

Beispielsweise läßt sich die Kategorie **Set** der Mengen mit einer Grothendieck-Topologie versehen, indem man eine Familie $(f_i : Y_i \rightarrow X)$ als *überdeckend* bezeichnet, wenn sie surjektiv ist, wenn also $X = \bigcup_i f(Y_i)$ gilt. – Die für uns wichtigen Beispiele sind:

Definition. Es sei X ein Schema und $\mathfrak{Y} = (Y_i \rightarrow X)$ eine surjektive Familie von Morphismen. \mathfrak{Y} heißt

1. *fppf-Überdeckung*, wenn alle $Y_i \rightarrow X$ flach und lokal endlich präsentierbar sind,
2. *étale Überdeckung*, wenn alle $Y_i \rightarrow X$ étale sind,
3. *Zariski-Überdeckung*, wenn alle $Y_i \rightarrow X$ Koprodukte offener Einbettungen sind.^(iv)

Offenbar gilt: \mathfrak{Y} Zariski-Überdeckung $\implies \mathfrak{Y}$ étale Überdeckung $\implies \mathfrak{Y}$ fppf-Überdeckung, und die Axiome einer Grothendiecktopologie sind erfüllt. Die entsprechenden Sitüs bezeichnen wir mit $\mathbf{Sch}_{\text{fppf}}$, $\mathbf{Sch}_{\text{ét}}$ und $\mathbf{Sch}_{\text{Zar}}$.

⁽ⁱⁱ⁾ *Prätologie* in der Nomenklatur von [SGA 4, Exp. II, § 1.3].

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Da Faserprodukte nur bis auf Isomorphie eindeutig gegeben sind, lesen wir das erste Axiom genauer folgendermaßen: ist $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine Überdeckung, $X' \rightarrow X$ ein Morphismus, und ist für jedes i ein kartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y'_i & \longrightarrow & X' \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_i & \longrightarrow & X \end{array}$$

gegeben, so ist $(Y'_i \rightarrow X')_i$ eine Überdeckung. Aus dem dritten Axiom ergibt sich dann, daß jeder Isomorphismus eine Überdeckung ist.

^(iv) Zur Terminologie: die fppf-Topologie heißt auf Französisch „topologie fidèlement plate de présentation finie“, wodurch sich die Bezeichnung fppf erklärt. Der Name der Zariskitopologie kommt daher, daß in ihr die Überdeckungen eines Schemas im Wesentlichen seine offenen Überdeckungen im klassischen Sinne sind, und man die übliche Topologie auf dem Spektrum eines Ringes ja aus historischen Gründen als Zariskitopologie bezeichnet. Die étale Topologie schließlich ist nach den étalen Morphismen benannt, deren Bezeichnung aber eine dem (nicht frankophonen) Verfasser immer noch mysteriöse Bedeutung hat.

Diese Topologien haben einige gemeinsame Eigenschaften – beispielsweise sind alle Morphismen in einer Überdeckung offen, was wichtig ist für gewisse Kompaktheitsargumente –, wir werden diese Gemeinsamkeiten jedoch nicht axiomatisieren.

Definition. Es sei C_E ein Situs. Eine Prägarbe $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(C)$ ist eine E -Garbe, wenn für jedes Objekt X und jede Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ die Sequenz

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(Y_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(Y_i \times_X Y_j)$$

exakt, also ein Equalizerdiagramm ist. (Dies impliziert definitionsgemäß die Injektivität des ersten Pfeils.) Die volle Unterkategorie der Garben bezeichnen wir mit $\mathbf{Shv}(C_E) \subset \mathbf{Presh}(C)$. Eine Prägarbe, für die immerhin $\mathcal{F}(X) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(Y_i)$ immer injektiv ist, heißt *separiert* (in der E -Topologie).

1.3.3 Beispiel. Eine Prägarbe $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{Sch})$ ist genau dann eine Garbe auf $\mathbf{Sch}_{\text{Zar}}$, wenn für jedes Schema X und jede offene Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ die Sequenz

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

exakt ist, wenn also \mathcal{F} für jedes Schema X durch Einschränkung eine Garbe auf dem topologischen Raum X im klassischen Sinn induziert.

Beweis. „Nur dann“ ist klar, denn $(U_i \rightarrow X)_i$ ist eine Zariski-Überdeckung, und $U_i \times_X U_j \cong U_i \cap U_j$. Für „immer dann“ bemerken wir zuerst, daß aus der vorausgesetzten Eigenschaft die Beziehung $\mathcal{F}(\prod_i X_i) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}(X_i)$ für jede Familie (X_i) von Schemata folgt; mit dieser Beobachtung folgt dann schnell die Exaktheit der einschlägigen Sequenz für eine beliebige Zariski-Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$. \square

Da jede Zariski-Überdeckung auch eine étale Überdeckung ist usw., haben wir

$$\mathbf{Shv}(\mathbf{Sch}_{\text{fppf}}) \subset \mathbf{Shv}(\mathbf{Sch}_{\text{ét}}) \subset \mathbf{Shv}(\mathbf{Sch}_{\text{Zar}}) \subset \mathbf{Presh}(\mathbf{Sch}).$$

Der Rest dieses Abschnitts ist dem Beweis des wichtigen Satzes gewidmet, daß die Yoneda-Einbettung $\mathbf{Sch} \hookrightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{Sch})$ ihr Bild in $\mathbf{Shv}(\mathbf{Sch}_{\text{fppf}})$ hat, daß also jeder Funktor $\underline{X} = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(_, X)$ mit einem Schema X eine fppf-Garbe definiert. Der erste Schritt dazu ist:

1.3.4 Proposition. Die Yoneda-Einbettung $\mathbf{Sch} \subset \mathbf{Presh}(\mathbf{Sch})$ faktorisiert über $\mathbf{Shv}(\mathbf{Sch}_{\text{Zar}})$, d.h. jeder Funktor $\underline{X} = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(_, X)$ ist eine Garbe in der Zariskitopologie.

Beweis. Dies ist nur die Aussage, daß ein Morphismus von Schemata $Y \rightarrow X$ eindeutig gegeben ist durch (kompatible) Einschränkungen $V_i \rightarrow X$, wobei $Y = \bigcup_i V_i$ eine offene Überdeckung ist. \square

1.3.5 Proposition. Eine Zariski-Garbe $\mathcal{F} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{Sch}_{\text{Zar}})$ ist genau dann eine Garbe in der fppf-Topologie (bzw. der étalen Topologie), wenn für jeden treuflachen, endlich präsentierbaren (bzw. jeden treuflachen und étalen) Ringhomomorphismus $A \rightarrow B$ das Diagramm

$$\mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B) \rightrightarrows \mathcal{F}(B \otimes_A B)$$

exakt ist. (Dabei schreiben wir $\mathcal{F}(A)$ für $\mathcal{F}(\text{Spec } A)$.)

Beweis. Es ist nur „immer dann“ zu zeigen. Sei also $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine surjektive Familie flacher und lokal endlich präsentierbarer Morphismen. Durch Übergang zu $\coprod_i Y_i$ reduziere auf den Fall, daß die Familie nur aus einem einzigen Morphismus $Y \rightarrow X$ besteht (hier benötigt man, daß \mathcal{F} Zariskigarbe ist). Es ist also nur zu zeigen, daß dann die Sequenz

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \rightrightarrows \mathcal{F}(Y \times_X Y)$$

exakt ist. Nehmen wir zunächst an, daß X affin ist. Es sei $Y = \bigcup_i Y_i$ mit affinen offenen Unterschemata Y_i , $i \in I$. Eine Teilmenge $J \subset I$ heiße *zulässig*, wenn sie endlich ist und $Y_J := \coprod_{j \in J} Y_j \rightarrow Y \rightarrow X$ immer noch surjektiv ist. Da $Y \rightarrow X$ offen und X quasikompakt ist, existieren zulässige Teilmengen. Ist $J \subset I$ zulässig, so ist $Y_J \rightarrow X$ ein treuflacher, endlich präsentierbarer Morphismus affiner Schemata. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y) & \rightrightarrows & \mathcal{F}(Y \times_X Y) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}(Y_J) & \rightrightarrows & \mathcal{F}(Y_J \times_X Y_J) \end{array}$$

ist dann nach Voraussetzung die untere Zeile exakt. Dies zeigt die Injektivität von $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$. Ist nun $y \in \mathcal{F}(Y)$ mit identischen Bildern in $\mathcal{F}(Y \times_X Y)$, so erhalten wir ein eindeutig bestimmtes $x_J \in \mathcal{F}(X)$, das in $\mathcal{F}(Y_J)$ dasselbe Bild hat wie y . Dann ist aber $x_J = x_{J'} =: x$ für beliebige zulässige Teilmengen $J, J' \subset I$ (betrachte $J \cup J'$). Da die zulässigen Teilmengen ganz I überdecken, haben insbesondere x und y dasselbe Bild in jedem $\mathcal{F}(Y_i)$, also muß das Bild von x in $\mathcal{F}(Y)$ identisch mit y sein.

Ist nun X beliebig, so wähle eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_i U_i$ und setze $V_i = Y \times_X U_i$. Betrachte dann das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{F}(Y) & \rightrightarrows & \mathcal{F}(Y \times_X Y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{\alpha'} & \prod_i \mathcal{F}(V_i) & \rightrightarrows & \prod_i \mathcal{F}(V_i \times_{U_i} V_i) \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\alpha''} & \prod_{i,j} \mathcal{F}(V_i \cap V_j) & & \end{array}$$

Nach Voraussetzung sind die beiden linken Spalten exakt, und nach dem schon Bewiesenen auch die zweite Zeile. Insbesondere ist α' injektiv und damit auch α . Dies zeigt aber die Separiertheit im allgemeinen Fall, also ist auch α'' injektiv. Mit dieser Zusatzinformation folgt dann die Exaktheit der ersten Zeile aus derjenigen der zweiten. – Der Beweis für die étale Topologie verläuft genauso. \square

1.3.6 Bemerkung. Eine weitere Charakterisierung von Garben ist: Eine Prägarbe $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{Sch})$ ist genau dann eine Garbe in der fppf-Topologie (der étalen Topologie), wenn gilt: für jede Familie (X_i) von Schemata ist die Abbildung $\mathcal{F}(\coprod_i X_i) \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(X_i)$ bijektiv, und für jeden treuflachen, lokal endlich präsentierbaren (étalen und surjektiven) Morphismus $Y \rightarrow X$ von Schemata ist die Sequenz

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(Y) \rightrightarrows \mathcal{F}(Y \times_X Y)$$

exakt. „Nur dann“ ist klar; für „immer dann“ genügt es nach der Proposition zu zeigen, daß eine solche Prägarbe eine Zariski-Garbe ist. Ist aber $X = \bigcup_i U_i$ eine offene Überdeckung, so ist $\coprod_i U_i \rightarrow X$ étale und surjektiv mit $Y \times_X Y = \coprod_{i,j} U_i \cap U_j$.

1.3.7 Proposition. Ist $A \rightarrow B$ treuflach und R ein beliebiger Ring, so ist die Sequenz

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, A) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, B) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(R, B \otimes_A B)$$

exakt.

Dies folgt unmittelbar aus dem Spezialfall $M = A$ im folgenden

1.3.8 Lemma. *Es sei $A \rightarrow B$ treuflach und M ein A -Modul. Dann definiert $M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B$, $m \otimes b \mapsto m \otimes b \otimes 1 - m \otimes 1 \otimes b$, eine exakte Sequenz $0 \rightarrow M \rightarrow M \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B \otimes_A B$ von A -Moduln.*

Beweis. [Mi80, I.2.18] □

1.3.9 Korollar. *Jedes affine Schema definiert eine Garbe in der fppf-Topologie.*

Beweis. Folgt aus 1.3.4, 1.3.5 und 1.3.7. □

1.3.10 Satz. *Jedes Schema definiert eine Garbe in der fppf-Topologie (und a fortiori auch in der étalen Topologie).*

Beweisanleitung. Dies wird auf den Fall affiner Schemata zurückgeführt. Für die Injektivität in der einschlägigen Sequenz benötigt man dabei: ist $g : Y \rightarrow X$ treuflach, und sind $f, f' : X \rightarrow S$ Morphismen mit $f \circ g = f' \circ g$, so stimmen f und f' als stetige Abbildungen überein (denn g ist surjektiv). Beim Beweis der Liftungseigenschaft benutzen wir die Offenheit von g : ist dann nämlich $V \subset Y$ offen, so ist $V \rightarrow g(V)$ treuflach und lokal endlich präsentierbar. □

Man spricht den Satz auch dergestalt aus, daß die fppf-Topologie *größer als die kanonische Topologie* sei. Dabei ist die kanonische Topologie auf einer Kategorie definitionsgemäß die feinste Topologie, die alle darstellbaren Prägarben zu Garben macht. Wir werden sie im folgenden nur im Rahmen der genannten Floskel erwähnen.

1.3.3 Assoziierte Garben

Es sei \mathbf{C}_E ein Situs. Eines der wichtigsten Resultate in der Garbentheorie ist die Existenz *assoziierter Garben* zu Prägarben; genauer ist das der Satz, daß der Inklusionsfunktor $i : \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E) \rightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ ein Linksadjungiertes besitzt.

Definition. Es sei $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$. Für ein Objekt X und eine Überdeckung $\mathfrak{U} = (Y_i \rightarrow X)$ setze

$$L\mathcal{F}(\mathfrak{U}) := \left\{ (a_i) \in \prod_i \mathcal{F}(Y_i) \mid (a_i)|_{Y_i \times_X Y_j} = (a_j)|_{Y_i \times_X Y_j} \text{ für alle } i, j \right\}.$$

Ohne Mühe zeigt man:

1.3.11 Proposition. *Es seien $\mathfrak{U} = (Y_i \rightarrow X)$ und $\mathfrak{Z} = (Z_j \rightarrow X)$ Überdeckungen. Ist \mathfrak{Z} eine Verfeinerung von \mathfrak{U} – d.h. faktorisiert jeder Morphismus $Z_j \rightarrow X$ über ein Y_i –, so erhalten wir eine Abbildung $L\mathcal{F}(\mathfrak{U}) \rightarrow L\mathcal{F}(\mathfrak{Z})$, die nicht von der Wahl der Faktorisierungen abhängt. Ist \mathcal{F} separiert, so ist $L\mathcal{F}(\mathfrak{U}) \rightarrow L\mathcal{F}(\mathfrak{Z})$ injektiv.*

Definition. Wir setzen $L\mathcal{F}(X) := \varinjlim_{\mathfrak{U}} L\mathcal{F}(\mathfrak{U})$, wobei \mathfrak{U} alle Überdeckungen von X durchläuft.

Die Frage nach der Existenz dieses Limes ist im allgemeinen problematisch; wir übergehen dieses Problem hier. Der Limes ist filtrierend, denn zwei Überdeckungen $\mathfrak{U} = (Y_i \rightarrow X)$ und $\mathfrak{Z} = (Z_j \rightarrow X)$ besitzen eine gemeinsame Verfeinerung, nämlich $\mathfrak{U} \times_X \mathfrak{Z} := (Y_i \times_X Z_j \rightarrow X)_{i,j}$.

Ist $X' \rightarrow X$ ein Morphismus und $\mathfrak{U} = (Y_i \rightarrow X)$ eine Überdeckung, so ist $\mathfrak{U} \times_X X' := (Y_i \times_X X' \rightarrow X')$ ebenfalls eine Überdeckung, und wir erhalten eine Abbildung $L\mathcal{F}(\mathfrak{U}) \rightarrow L\mathcal{F}(\mathfrak{U} \times_X X')$. Im Limes erhalten wir daraus eine Abbildung $L\mathcal{F}(X) \rightarrow L\mathcal{F}(X')$, die $L\mathcal{F}$ zu einer Prägarbe macht. Wegen $\mathcal{F}(X) = L\mathcal{F}((X \xrightarrow{\text{id}} X))$ haben wir außerdem einen kanonischen Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow L\mathcal{F}$.

1.3.12 Proposition. *Es sei $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ eine Prägarbe.*

1. $L\mathcal{F}$ ist eine separierte Prägarbe.
2. Ist \mathcal{F} separiert, so ist $L\mathcal{F}$ eine Garbe und $\mathcal{F} \rightarrow L\mathcal{F}$ injektiv.
3. Ist \mathcal{F} eine Garbe, so ist $\mathcal{F} \rightarrow L\mathcal{F}$ invertierbar.
4. Ist \mathcal{G} eine Garbe, so ist die Abbildung $\text{Hom}(L\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ bijektiv.

Den Beweis empfehlen wir dem Leser zur Übung. Wichtiges Hilfsmittel ist wieder die Existenz einer gemeinsamen Verfeinerung zweier Überdeckungen.

Definition. Ist $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ eine Prägarbe, so heißt $\alpha_{\mathcal{F}} := L(L\mathcal{F})$ die zu \mathcal{F} assoziierte Garbe.

Nach der Proposition ist $\alpha_{\mathcal{F}}$ tatsächlich eine Garbe, und der Funktor $\alpha : \mathbf{Presh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$ ist linksadjungiert zum Vergißfunktor $i : \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E) \hookrightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$. Außerdem ist $\alpha i_{\mathcal{F}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}$ für jede Garbe \mathcal{F} ; dies folgt auch rein formal aus der Adjunktionsrelation zusammen mit der Volltreueheit von i .

1.3.4 Limes von Prägarben und Garben

Es sei wieder \mathbf{C}_E ein Situs. Man sieht leicht, daß in der Kategorie der Prägarben auf \mathbf{C} alle induktiven und projektiven Limes existieren und „objektweise“ berechnet werden, also etwa $(\varinjlim_i \mathcal{F}_i)(X) = \varinjlim_i (\mathcal{F}_i(X))$. Insbesondere bedeutet das, daß ein Morphismus von Prägarben genau dann ein Monomorphismus (bzw. Epimorphismus) ist, wenn er objektweise injektiv (bzw. surjektiv) ist: denn ganz allgemein ist ein Morphismus $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ genau dann Monomorphismus (bzw. Epimorphismus), wenn $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times_{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ (bzw. $\mathcal{G} \sqcup_{\mathcal{F}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$) invertierbar ist; Invertierbarkeit läßt sich aber objektweise prüfen.

In der Kategorie der Garben ist die Situation komplizierter. Man überzeugt sich zunächst leicht davon, daß ein *projektiver* Limes (in $\mathbf{Presh}(\mathbf{C})$) von Garben wieder eine Garbe (und auch ein projektiver Limes in $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$) ist.^(v) Insbesondere ist also ein Morphismus von Garben genau dann Monomorphismus, wenn er objektweise injektiv ist.

Im Falle *induktiver* Limes von Garben ist die Situation komplizierter. Immerhin existieren sie stets, denn:

1.3.13 Proposition. *Ist (\mathcal{F}_i) ein induktives System von Garben, und ist $\mathcal{G}(X) := \varinjlim_i (\mathcal{F}_i(X))$, so ist $\mathcal{F} := \alpha_{\mathcal{G}}$ induktiver Limes von (\mathcal{F}_i) in der Kategorie der Garben.*

Beweis. \mathcal{G} ist der induktive Limes der Prägarben \mathcal{F}_i . Die Behauptung ergibt sich nun daraus, daß α linksadjungiert zur Einbettung $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E) \hookrightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ ist. \square

Insbesondere erhalten wir damit:

^(v)Der entscheidende Punkt ist, daß Garben durch ein Equalizerdiagramm, also einen *projektiven* Limes definiert sind.

1.3.14 Proposition (Charakterisierung von Garbenepimorphismen). *Ein Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von Garben ist genau dann ein Epimorphismus, wenn gilt: für jedes Objekt $X \in \mathbf{C}$ und jedes Element $g \in \mathcal{G}(X)$ gibt es eine Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ und Elemente $f_i \in \mathcal{F}(Y_i)$ mit $\varphi(f_i) = g|_{Y_i}$.*

Beweis. „Immer dann“ ist einfach. Für „nur dann“ sei $\mathcal{H}(X) := \mathcal{G}(X) \sqcup_{\mathcal{F}(X)} \mathcal{G}(X)$ für jedes $X \in \mathbf{C}$. Da φ Epimorphismus ist, ist $\alpha\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ invertierbar. Ein Element $g \in \mathcal{G}(X)$ definiert zwei (möglicherweise übereinstimmende) Elemente $g^{(1)}, g^{(2)}$ von $\mathcal{H}(X)$, die beide in \mathcal{G} auf g abgebildet werden. Da $\alpha\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G}$ invertierbar ist, müssen diese beiden Elemente also in $\alpha\mathcal{H} = L^2\mathcal{H}$ und damit bereits in $L\mathcal{H}$ dasselbe Bild haben. Nach Definition von $L\mathcal{H}(X)$ gibt es also eine Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ mit $g^{(1)}|_{Y_i} = g^{(2)}|_{Y_i}$. Nach Definition von \mathcal{H} gibt es dann zu jedem i ein $f_i \in \mathcal{F}(Y_i)$ mit $\varphi(f_i) = g|_{Y_i}$, wie behauptet. \square

1.3.15 Korollar. *Ein Morphismus von Garben ist genau dann Isomorphismus, wenn er Mono- und Epimorphismus ist.*

Beweis. Es sei $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ Mono- und Epimorphismus. Es genügt zu zeigen, daß φ objektweise surjektiv ist. Sei $g \in \mathcal{G}(X)$. Wähle eine Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ und $f_i \in \mathcal{F}(Y_i)$ mit $\varphi(f_i) = g|_{Y_i}$. Da φ Monomorphismus ist, stimmen dann f_i und f_j auf $Y_i \times_X Y_j$ überein. Also finden wir ein $f \in \mathcal{F}(X)$ mit $f_i = f|_{Y_i}$ für alle i , und dann muß $\varphi(f) = g$ sein. \square

1.3.16 Korollar. *Die Topologie auf \mathbf{C}_E sei gröber als die kanonische, und es sei $X \in \mathbf{C}$ ein Objekt. Ein Garbenmorphismus $\mathcal{X}' \rightarrow \underline{X}$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn es eine Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ gibt, so daß $\mathcal{Y} := \coprod_i \underline{Y}_i \rightarrow \underline{X}$ über \mathcal{X}' faktorisiert.*

Beweis. „Immer dann“. Hierzu ist nur zu zeigen, daß $\mathcal{Y} \rightarrow \underline{X}$ Epimorphismus ist. Ist aber $U \in \mathbf{C}$ ein beliebiges Objekt, so ist jedes $f \in \underline{X}(U)$ gegeben durch einen Morphismus $U \rightarrow X$. Dann definiert $U \times_X Y_i \rightarrow Y_i$ ein Element von $\underline{Y}_i(U \times_X Y_i) \subset \mathcal{Y}(U \times_X Y_i)$, das in \underline{X} auf $f|_{U \times_X Y_i}$ abgebildet wird. Da $(U \times_X Y_i \rightarrow U)_i$ eine Überdeckung ist, haben wir also lokale Urbilder von f gefunden.

„Nur dann“. Zu $\text{id}_X \in \underline{X}(X)$ finden wir eine Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ und Elemente $y_i \in \mathcal{X}'(Y_i)$, die in \underline{X} das Bild $(Y_i \rightarrow X) \in \underline{X}(Y_i)$ haben. Diese definieren Morphismen $\underline{Y}_i \rightarrow \mathcal{X}'$, durch die die kanonischen Morphismen $\underline{Y}_i \rightarrow \underline{X}$ faktorisieren; deren Coprodukt liefert eine Faktorisierung von $\mathcal{Y} \rightarrow \underline{X}$ über \mathcal{X}' . \square

1.3.17 Proposition. *Der Garbifizierungsfunktor $\alpha : \mathbf{Presh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$ vertauscht mit beliebigen induktiven und endlichen projektiven Limites.*

Beweis. Die Vertauschbarkeit mit induktiven Limites gilt für jeden linksadjungierten Funktor. Daß der Funktor $L : \mathbf{Presh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ mit endlichen projektiven Limites vertauscht, liegt daran, daß er objektweise durch einen filtrierenden induktiven Limes von Mengen definiert ist (vgl. [SGA 4, Exp. I, § 2.8] oder, ausführlicher, [Mac, IX.2, Thm. 1]). Also erhält auch L^2 endliche projektive Limites, und damit auch α nach der Charakterisierung projektiver Limites von Garben. \square

Insbesondere erhält α also Mono- und Epimorphismen. Ist außerdem \mathcal{F} eine Prägarbe von Gruppen, so ist $\alpha\mathcal{F}$ auf natürliche Weise eine Garbe von Gruppen; analoge Aussagen gelten für Prägarben von abelschen Gruppen, Ringen usw.

1.3.5 Relativierung

Häufig werden wir nicht in der Kategorie aller Schemata, sondern in der Kategorie der S -Schemata (für ein gegebenes Schema S , beispielsweise das Spektrum eines Körpers) arbeiten. Wir skizzieren ein allgemeines Verfahren, um die beschriebenen Topologien auf \mathbf{Sch} auch für \mathbf{Sch}/S nutzbar zu machen.

Es sei zunächst \mathbf{C} eine Kategorie und $S \in \mathbf{C}$ ein Objekt.^(vi) Die Grundfrage ist die Folgende: einem Objekt $X \in \mathbf{C}$ die Struktur eines S -Objektes zu geben, ist nach dem Lemma von Yoneda äquivalent zur Angabe eines Morphismus von Prägarben $\underline{X} \rightarrow \underline{S}$. Mit einer solchen Struktur definiert X aber eine (tautologischerweise darstellbare) Prägarbe auf \mathbf{Sch}/S . Läßt sich diese Korrespondenz zwischen darstellbaren Prägarben auf \mathbf{C}/S und darstellbaren Prägarben auf \mathbf{C} mit Morphismen nach \underline{S} auf beliebige Prägarben verallgemeinern?

Definition. Für eine Prägarbe $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/S)$ definieren wir eine assoziierte Prägarbe^(vii) ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ durch

$${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{F}(X) := \coprod_{X \rightarrow S} \mathcal{F}(X \rightarrow S).$$

Es gibt einen kanonischen Morphismus ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{F} \rightarrow \underline{S}$, definiert durch die offensichtliche Abbildung

$$\coprod_{X \rightarrow S} \mathcal{F}(X \rightarrow S) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X \rightarrow S).$$

1.3.18 Proposition. Der Funktor $\mathbf{Presh}(\mathbf{C}/S) \rightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C})/\underline{S}$, $\mathcal{F} \mapsto ({}_{\mathbb{Z}}\mathcal{F} \rightarrow \underline{S})$, ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweisskizze. Konstruiere einen Funktor $\mathbf{Presh}(\mathbf{C})/\underline{S} \rightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/S)$, der einer Prägarbe $\mathcal{F} \rightarrow \underline{S}$ die Prägarbe

$$(X \rightarrow S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Presh}(\mathbf{C})/\underline{S}}(\underline{X} \rightarrow \underline{S}, \mathcal{F} \rightarrow \underline{S})$$

auf \mathbf{Sch}/S zuordnet. Zeige dann mit Hilfe des (allgemeinen) Lemmas von Yoneda, daß die Funktoren zueinander quasiinvers sind. \square

Die Konstruktion $\mathcal{F} \mapsto {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{F}$ liefert im Fall *darstellbarer* Prägarben tatsächlich das Gewünschte:

1.3.19 Proposition. Für ein S -Objekt $Y \rightarrow S$ gibt es einen kanonischen Isomorphismus ${}_{\mathbb{Z}}\underline{Y} \rightarrow \underline{S} \cong \underline{Y}$.

Beweis. Für jedes Objekt $X \in \mathbf{C}$ haben wir

$${}_{\mathbb{Z}}\underline{Y} \rightarrow \underline{S}(X) = \coprod_{X \rightarrow S} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/S}(X \rightarrow S, Y \rightarrow S) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X \rightarrow Y) = \underline{Y}(X),$$

wie behauptet. \square

Sei nun eine Topologie E auf \mathbf{C} fixiert.

Definition. Eine Prägarbe \mathcal{F} auf \mathbf{C}/S heißt *Garbe* in der E -Topologie, wenn ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ eine Garbe in der E -Topologie ist. Die Kategorie der E -Garben auf \mathbf{C}/S bezeichnen wir mit $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E/S) \subset \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/S)$.

^(vi) Man kann sogar S durch eine beliebige Prägarbe $\mathcal{S} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ ersetzen, vgl. [D–G, I, § 1, 6.2].

^(vii) Die Bezeichnung ${}_{\mathbb{Z}}\mathcal{F}$ ist motiviert vom Fall $\mathbf{C} = \mathbf{Sch}$: dort ist $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ das finale Objekt, also gilt $\mathbf{Sch}/\mathbb{Z} \cong \mathbf{Sch}$.

1.3.20 Proposition. Die Zuordnung $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{Z}\mathcal{F}$ definiert eine Äquivalenz von Kategorien $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E/S) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)/\underline{S}$.

Sei nun S derart gewählt, daß \underline{S} eine Garbe ist. Für eine Prägarbe \mathcal{F} auf \mathbf{C}/S induziert $\mathbb{Z}\mathcal{F} \rightarrow \underline{S}$ einen Morphismus von Garben $\alpha(\mathbb{Z}\mathcal{F}) \rightarrow \underline{S}$. Dieser wird von einer eindeutig bestimmten Garbe auf \mathbf{C}/S induziert, die wir $\alpha\mathcal{F}$ nennen wollen. Der Funktor $\alpha : \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/S) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E/S)$ ist wieder linksadjungiert zum Vergißfunktor $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E/S) \rightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/S)$.

Unter der gleichen Voraussetzung können wir auch eine handlichere Konstruktion von $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E/S)$ angeben:

1.3.21 Proposition. Es sei $\underline{S} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ eine E -Garbe. Dann ist eine Prägarbe $\mathcal{F} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/S)$ genau dann eine E -Garbe, wenn für jedes Objekt $X \rightarrow S$ und jede Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ von $X \in \mathbf{C}$ das Diagramm

$$\mathcal{F}(X \rightarrow S) \longrightarrow \prod_i \mathcal{F}(Y_i \rightarrow S) \rightrightarrows \prod_{(i,j)} \mathcal{F}(Y_i \times_X Y_j \rightarrow S)$$

exakt ist.

Beweisidee. Rückführung auf die Definition von $\mathbb{Z}\mathcal{F}$. Die Garbeneigenschaft von \underline{S} wird dabei benötigt, um – bei gegebener Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ in \mathbf{C} – aus kompatiblen Morphismen $Y_i \rightarrow S$ einen Morphismus $X \rightarrow S$ zu konstruieren. \square

1.3.22 Korollar. Ist $\underline{S} \in \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ eine Garbe, so gilt $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E/S) = \mathbf{Shv}((\mathbf{C}/S)_{E/S})$, wobei E/S die folgende Topologie auf \mathbf{C}/S ist: eine Familie von Morphismen $(Y_i \rightarrow X)_i$ in \mathbf{C}/S ist genau dann überdeckend, wenn die zugrundeliegende Familie von Morphismen in \mathbf{C} überdeckend ist.

1.3.6 Stetige Morphismen von Sitūs

Definition. Es seien \mathbf{C}_E und \mathbf{D}_F Sitūs. Ein stetiger Funktor $F : \mathbf{C}_E \rightarrow \mathbf{D}_F$ ist ein Funktor $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$, der kartesische Quadrate erhält und für den gilt: ist $\mathcal{U} = (Y_i \rightarrow X)_i$ eine E -Überdeckung in \mathbf{C} , so ist $F_*\mathcal{U} := (F(Y_i) \rightarrow F(X))_i$ eine F -Überdeckung in \mathbf{D} .

Ohne Schwierigkeiten verifiziert man:

1.3.23 Proposition. Ist $F : \mathbf{C}_E \rightarrow \mathbf{D}_F$ stetig, so ist für jede Garbe $\mathcal{F} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{D}_F)$ die Prägarbe $F^*\mathcal{F} := \mathcal{F} \circ F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ eine Garbe auf \mathbf{C}_E .

Damit erhalten wir einen Funktor $F^* : \mathbf{Shv}(\mathbf{D}_F) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$, $F^*\mathcal{F}(X) = \mathcal{F}(FX)$. Da projektive Limites von Garben objektweise berechnet werden, vertauscht F^* mit ihnen (und ist also insbesondere linksexakt).

Unter Ausblendung gewisser mengentheoretischer Voraussetzungen (der Situs \mathbf{C}_E darf nicht „zu groß“ sein) gilt:

1.3.24 Satz. Ist $F : \mathbf{C}_E \rightarrow \mathbf{D}_F$ stetig, so besitzt $F^* : \mathbf{Shv}(\mathbf{D}_F) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$ einen linksadjungierten Funktor $F_* : \mathbf{Shv}(\mathbf{D}_F) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$, und dieser ist exakt.

Beweis. [SGA 4, Exp. III, § 1]. Die Exaktheit ergibt sich daraus, daß F_* objektweise durch filtrierende direkte Limites konstruiert wird und darum mit endlichen projektiven Limites vertauscht. \square

Sind in \mathbf{C}_E und \mathbf{D}_F alle darstellbaren Prägarben bereits Garben, so haben wir für ein Objekt $C \in \mathbf{C}$ nach dem Lemma von Yoneda

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}(\mathbf{D}_F)}(F_*\underline{C}, \mathcal{F}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}(\mathbf{C}_E)}(\underline{C}, F^*\mathcal{F}) \cong F^*\mathcal{F}(C) = \mathcal{F}(FC) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}(\mathbf{D}_F)}(\underline{FC}, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

für jede Garbe \mathcal{F} auf \mathbf{D}_F . Also gilt kanonisch $F_*\underline{C} = \underline{FC}$. Dies kann man so ausdrücken, daß F_* eine Fortsetzung von F ist, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \xrightarrow{F} & \mathbf{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Shv}(\mathbf{C}_E) & \xrightarrow{F_*} & \mathrm{Shv}(\mathbf{D}_F) \end{array}$$

ist kommutativ.

Wir untersuchen noch einen Spezialfall genauer. Sei \mathbf{C}_E ein Situs, in dem jedes Objekt eine Garbe darstellt. Ist $f : Y \rightarrow X$ ein quadrierbarer Morphismus in \mathbf{C} , so definiert $\alpha_f : \mathbf{C}/X \rightarrow \mathbf{C}/Y$, $Z \mapsto Z \times_X Y$, einen stetigen Morphismus $(\mathbf{C}/X)_{E/X} \rightarrow (\mathbf{C}/Y)_{E/Y}$. Wir schreiben dann

$$f_* := \alpha_f^* : \mathrm{Shv}((\mathbf{C}/Y)_{E/Y}) \rightarrow \mathrm{Shv}((\mathbf{C}/X)_{E/X}) \text{ mit } f_*\mathcal{F}(Z) = \mathcal{F}(Z \times_X Y).$$

Ebenso setzen wir $f^* := (\alpha_f)_* : \mathrm{Shv}((\mathbf{C}/X)_{E/X}) \rightarrow \mathrm{Shv}((\mathbf{C}/Y)_{E/Y})$. Uns interessiert die explizite Gestalt dieses Funktors. Ist $U \rightarrow X$ ein X -Objekt, so haben wir

$$\begin{aligned} f^*\underline{U} \rightarrow X(Z \rightarrow Y) &= \underline{U} \times_X Y \rightarrow Y(Z \rightarrow Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/Y}(Z \rightarrow Y, U \times_X Y) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}/X}(Z \rightarrow Y \rightarrow X, U \rightarrow X) = \underline{U} \rightarrow X(Z \rightarrow Y \rightarrow X) \end{aligned}$$

Ist $i_f : \mathbf{C}/Y \rightarrow \mathbf{C}/X$ der Vergißfunktors $(Z \rightarrow Y) \mapsto (Z \rightarrow Y \rightarrow X)$, so gilt $(\alpha_f)_*\mathcal{F} = i_f^*\mathcal{F}$ für eine darstellbare Garbe \mathcal{F} auf \mathbf{C}/X . Dies gilt aber auch allgemein:

1.3.25 Proposition. *In dieser Situation gilt $(\alpha_f)_* \cong i_f^*$. Insbesondere ist $f^*\mathcal{F}(Z \rightarrow Y) = \mathcal{F}(Z \rightarrow Y \rightarrow X)$, und f^* vertauscht mit allen induktiven und projektiven Limites.*

Beweis. Die Adjunktionsrelationen liefern einen natürlichen Morphismus von Funktoren $(\alpha_f)_* \rightarrow i_f^*$, von dem wir wissen, daß er auf darstellbaren Garben einen Isomorphismus induziert. Die Behauptung folgt dann aus dem nächsten Lemma, denn $(\alpha_f)_*$ vertauscht als linksadjungierter Funktor mit allen direkten Limites, i_f^* aber, ebenfalls nach dem Lemma, mit den für den Beweis interessanten direkten Limites. \square

1.3.26 Lemma. *Es sei \mathbf{C}_E ein Situs, in dem jedes Objekt eine Garbe darstellt. Dann ist jede Garbe \mathcal{F} (sogar in funktorieller Weise) direkter Limes darstellbarer Garben, und die Inklusion $\mathrm{Shv}(\mathbf{C}_E) \hookrightarrow \mathbf{Presh}(\mathbf{C})$ erhält diesen Limes. Ist außerdem $F : \mathbf{C}'_E \rightarrow \mathbf{C}_E$ stetig, so erhält auch F^* diesen Limes.*

Beweisskizze. Allgemein ist jede Prägarbe auf einer (nicht zu großen) Kategorie \mathbf{C} direkter Limes darstellbarer Prägarben, siehe etwa [SGA 4, Exp. I, Prop. 3.4]. Daraus folgen die ersten beiden Aussagen. Für die letzte Aussage betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Presh}(\mathbf{C}) & \xrightarrow{F^*_{\mathrm{Presh}}} & \mathbf{Presh}(\mathbf{C}') \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Shv}(\mathbf{C}_E) & \xrightarrow{F^*} & \mathrm{Shv}(\mathbf{C}'_E) \end{array}$$

Die Behauptung folgt dann aus der Vertauschbarkeit von F^*_{Presh} mit allen direkten Limites. \square

Wir werden den Pushforward-Funktors F_* nur im beschriebenen Spezialfall $F = \alpha_f$ verwenden. Dann können wir also F_* einfach als i_f^* lesen. Wir schreiben auch $\mathcal{F}|_{\mathbf{C}/Y} := i_f^*\mathcal{F}$.

1.4 Abstiegsstheorie I – Treuflacher Abstieg

Es sei \mathbf{C} eine Kategorie und $X' \rightarrow X$ ein quadrierbarer Morphismus in \mathbf{C} . Die Grundfrage dieses Abschnitts ist: wie ist einem X' -Objekt $(Y \rightarrow X') \in \mathbf{C}/X'$ anzusehen, ob es per Faserprodukt aus einem X -Objekt entstanden ist?

Definition. Ein X' -Objekt mit Abstiegsdatum über X ist ein X' -Objekt $F' \rightarrow X'$ zusammen mit einem Isomorphismus $\sigma : F' \times_X X' \rightarrow X' \times_X F'$ von $X' \times_X X'$ -Objekten, für den das induzierte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F' \times_X X' \times_X X' & \xrightarrow{\quad} & X' \times_X X' \times_X F' \\ & \searrow & \nearrow \\ & X' \times_X F' \times_X X' & \end{array}$$

kommutiert („Kozykelbedingung“). Die X' -Objekte mit Abstiegsdatum über X bilden auf die offensichtliche Art eine Kategorie, die wir mit $\mathbf{Desc}_{\mathbf{C}}(X' \rightarrow X)$ oder nur $\mathbf{Desc}(X' \rightarrow X)$ bezeichnen wollen (von engl. *descent* oder frz. *descente*).

Ist F ein X -Objekt, so haben wir mit $F' = F \times_X X'$ einen kanonischen Isomorphismus $F' \times_X X' \cong X' \times_X F'$ von $X' \times_X X'$ -Mengen, der, wie man leicht nachrechnet, ein Abstiegsdatum liefert. Dies definiert einen Funktor $\mathbf{C}/X \rightarrow \mathbf{Desc}_{\mathbf{C}}(X', X)$. Abstiegsstheorie ist das Studium dieses Funktors. Grob gesagt, ist Abstiegsstheorie das Studium dieses Funktors: in vielen interessanten Fällen ist er eine Äquivalenz von Kategorien.

1.4.1 Verkleben von Mengen

Zunächst ein nützliches technisches Resultat:

1.4.1 Lemma. *Es sei $\pi : Y \rightarrow X$ eine Abbildung von Mengen. Dann vertauscht der Faserproduktfunktor $\pi^* = _ \times_X Y : \mathbf{Set}/X \rightarrow \mathbf{Set}/Y$ mit beliebigen projektiven und induktiven Limites.*

Man beachte allerdings die Gestalt von Limites in \mathbf{Set}/X : Da der Vergißfunktor $\mathbf{Set}/X \rightarrow \mathbf{Set}$ einen rechtsadjungierten Funktor (nämlich $_ \times X$) besitzt, vertauscht er mit induktiven Limites; ein induktiver Limes von X -Mengen ist also tatsächlich einfach der induktive Limes des zugrundeliegenden Systems von Mengen. Für projektive Limites ist die Situation anders: sind etwa X -Mengen F_1, F_2 gegeben, so ist das kategorielle Produkt von $F_1 \rightarrow X$ und $F_2 \rightarrow X$ in \mathbf{Sch}/X als Menge das Faserprodukt $F_1 \times_X F_2$.

Beweis des Lemmas (Skizze). Da $_ \times_X Y$ einen linksadjungierten Funktor besitzt (den Vergißfunktor $\mathbf{Set}/Y \rightarrow \mathbf{Set}/X$), ist die Aussage über projektive Limites klar. Für induktive Limites bemerke man, daß $\mathbf{Set}/X \rightarrow \prod_{x \in X} \mathbf{Set}$, $(F \rightarrow X) \mapsto (F \times_X \{x\})_{x \in X}$ eine Äquivalenz von Kategorien ist. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}/X & \xrightarrow{_ \times_X Y} & \mathbf{Set}/Y \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \prod_{x \in X} \mathbf{Set} & \xrightarrow{\quad} & \prod_{y \in Y} \mathbf{Set} \end{array}$$

ist dann der untere horizontale Funktor gegeben durch $(F_x)_{x \in X} \mapsto (F_{\pi(y)})_{y \in Y}$. Die Behauptung ist nun klar, wenn man bedenkt, daß induktive (und auch projektive) Limites in Produktkategorien „komponentenweise“ gebildet werden. \square

1.4.2 Satz. *Es sei $\pi : X' \rightarrow X$ eine surjektive Abbildung von Mengen. Dann ist der Funktor $\mathbf{Set}/X \rightarrow \mathbf{Desc}_{\mathbf{Set}}(X', X)$, $F \mapsto F \times_X X'$, eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweis. Sei $\varphi : F' \rightarrow X'$ mit einem Abstiegsdatum σ gegeben. Es sei F der Koequalizer im Diagramm

$$F' \times_X X' \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{proj.}} \\ \xrightarrow{\text{proj.} \circ \sigma} \end{array} F' \longrightarrow F.$$

Dann ist auch F ein X -Objekt (und die Konstruktion von F ist offensichtlich funktoriell). Wir wollen zeigen, daß die kanonische Abbildung $F' \rightarrow F \times_X X'$ bijektiv ist.

Zum Beweis können wir (durch faserweise Betrachtung, oder – äquivalent dazu – durch Ausnutzen der Beziehung $\mathbf{Set}/X = \prod_{x \in X} \mathbf{Set}$) annehmen, daß $X = \{\star\}$ ein Punkt ist, und alle Faserprodukte zu gewöhnlichen Produkten machen. Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} F' \times X' & \xrightarrow[\cong]{\sigma} & X' \times F' \\ & \searrow & \swarrow \\ & X' \times X' & \end{array}$$

ergibt sich die Beziehung $\sigma(f', x') = (\varphi(f'), \sigma_0(f', x'))$ für alle (f', x') mit einer gewissen Abbildung $\sigma_0 : F' \times X' \rightarrow F'$. Schreiben wir $f' \odot x' := \sigma_0(f', x')$, so haben wir $\varphi(f' \odot x') = x'$, und die Kozykelbedingung liefert die Kürzungsregel $(f' \odot x') \odot y' = f' \odot y'$.

Für $f', g' \in F'$ sei nun $f' \sim g'$ genau dann, wenn es ein $x' \in X'$ gibt mit $g' = f' \odot x'$. Nach Definition ist F der Quotient von F' nach der von \sim erzeugten Äquivalenzrelation. Wir zeigen, daß \sim selbst bereits eine Äquivalenzrelation ist.

Für die *Transitivität* sei $g' = f' \odot x'$ und $h' = g' \odot y'$. Dann ist aber $h' = (f' \odot x') \odot y' = f' \odot y'$ nach der Kürzungsregel, also $f' \sim h'$. Für die *Reflexivität* sei f' gegeben; wegen der Bijektivität von σ finden wir dann g' und x' mit $\sigma(g', x') = (\varphi(f'), f')$. Dann ist $g' \odot x' = f'$ und damit $f' \odot x' = (g' \odot x') \odot x' = g' \odot x' = f'$. Für die *Symmetrie* sei schließlich $f' \sim g'$, also $g' = f' \odot x'$. Wegen der Reflexivität finden wir ein y' mit $f' \odot y' = f'$, und dann ist $g' \odot y' = (f' \odot x') \odot y' = f' \odot y' = f'$, also $g' \sim f'$.

Also ist $F = F'/\sim$, und damit ist die Bijektivität von $F' \rightarrow F \times X'$ schnell zu zeigen: für die Surjektivität seien $([f'], x') \in F \times X'$ gegeben. Wähle ein Urbild f' von $[f']$ und g', y' mit $\sigma(g', y') = (x', f')$. Dann gilt $\varphi(g') = x'$ und $f' = g' \odot y'$, also $f' \sim g'$, und damit ist $g' \in F'$ ein Urbild von $([f'], x')$. Für die Injektivität seien $f', g' \in F'$ mit $[f'] = [g']$ und $\varphi(f') = \varphi(g')$. Dann finden wir ein $x' \in X'$ mit $g' = f' \odot x'$, und wegen $g' \odot x' = f' \odot x' \odot x'$ folgt $\sigma(f', x') = (\varphi(f'), f' \odot x') = (\varphi(g'), g' \odot x') = \sigma(g', x')$. Wegen der Bijektivität von σ bedeutet das $f' = g'$.

Es bleibt noch zu zeigen: ist F ein X -Objekt und $F' = F \times_X X'$ mit dem kanonischen Abstiegsdatum, so erhalten wir durch Abstieg wieder F zurück. Wir haben $\sigma : F' \times_X X' \rightarrow X' \times_X F'$, $((f, x'), y') \mapsto (x', (f, y'))$. (Insbesondere $(f, x') \odot y' = (f, y')$, woran man die Kürzungsregel gut sehen kann.) Die beiden Abbildungen $F' \times_X X' \rightarrow F'$ sind nun gegeben durch $((f', x'), y') \mapsto (f', x')$ bzw. (f', y') . Durch Ausdividieren von $(f', x') \sim (f', y')$ (für alle f', x', y') aus $F' = F \times_X X'$ erhalten wir nun die Teilmenge von F , die auf das Bild von $\pi : X' \rightarrow X$ projiziert. Ist insbesondere π surjektiv, so erhalten wir F zurück. \square

1.4.2 Verkleben von Garben

Sei nun \mathbf{C}_E ein Situs.

1.4.3 Satz. *Es sei $\pi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ eine Epimorphismus von Garben in $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$. Dann ist die Kategorie der \mathcal{X} -Garben $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$ mittels $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ äquivalent zur Kategorie der \mathcal{X}' -Garben $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{X}'$ mit Abstiegsdatum über \mathcal{X} .*

Beweis. Es sei $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{X}'$ mit einem Abstiegsdatum gegeben. Durch objektweise Anwendung von 1.4.2 (in dessen Beweis wir die Surjektivität von $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ nur im allerletzten Schritt benötigt haben) erhalten wir eine Prägarbe $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{X}$. Deren Garbifizierung $\alpha\mathcal{F}$ tut das Gewünschte. Zum Beweis müssen wir wieder nur zeigen: beginnen wir mit einer \mathcal{X} -Garbe \mathcal{F} , so erhalten wir durch Abstieg von $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ wieder \mathcal{F} zurück. Sei $\widetilde{\mathcal{X}} \subset \mathcal{X}'$ das Prägarbenbild von $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, und sei $\widetilde{\mathcal{F}}$ die verklebte Prägarbe. Nach 1.4.2 haben wir dann ein kartesisches Diagramm von Prägarben:

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{F}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

Nach Garbifizierung bleibt dieses Diagramm kartesisch, aber $\alpha\widetilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ wird invertierbar (denn $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ist Epimorphismus). Also folgt $\alpha\widetilde{\mathcal{F}} \cong \mathcal{F}$. \square

Der Leser überlege sich, wie ein Abstiegsdatum bezüglich eines Epimorphismus $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ aussieht, der gegeben ist als Koproduct von Morphismen $\mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{X}$. Dies ist besonders wichtig für Garben über einer darstellbaren Garbe X : ist dann $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine Überdeckung, so ist ja $\coprod_i Y_i \rightarrow X$ ein Epimorphismus nach 1.3.16.

1.4.4 Lemma. *Es sei $Y \rightarrow X$ ein Morphismus in \mathcal{C}_E . Dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/X) & \longrightarrow & \mathbf{Presh}(\mathbf{C}/Y) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \mathbf{Presh}(\mathbf{C})/\underline{X} & \longrightarrow & \mathbf{Presh}(\mathbf{C})/\underline{Y} \end{array}$$

wobei die vertikalen Äquivalenzen durch $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{Z}\mathcal{F}$ gegeben sind, die obere horizontale Abbildung durch $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}|_{\mathbf{C}/Y}$ und die untere horizontale durch den Pullbackfunktork $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F} \times_{\underline{X}} \underline{Y}$.

Den einfachen Beweis lassen wir aus; er läuft im Wesentlichen auf die Beziehung

$$\coprod_{\mathbf{U} \rightarrow Y} \mathcal{F}(\mathbf{U} \rightarrow Y \rightarrow X) \cong \underline{Y}(\mathbf{U}) \times_{\underline{X}(\mathbf{U})} \coprod_{\mathbf{U} \rightarrow X} \mathcal{F}(\mathbf{U} \rightarrow X)$$

für ein beliebiges Objekt $\mathbf{U} \in \mathbf{C}$ hinaus.

Von nun an sei die E-Topologie auf \mathbf{C} gröber als die kanonische. Dann gilt das Lemma analog für Garben.

Definition. Es sei $\mathcal{U} = (Y_i \rightarrow X)_i$ eine E-Überdeckung in \mathbf{C} . Dann ist $\mathbf{Desc}_{\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)}(\mathcal{U})$ die Kategorie aller Familien (\mathcal{F}'_i) , wobei jedes \mathcal{F}'_i eine Garbe auf \mathbf{C}/Y_i ist, zusammen mit „Abstiegsdaten“, d.h. für jedes Paar i, j einem Isomorphismus von Garben $\sigma_{ij} : \mathcal{F}'_i|_{\mathbf{C}/Y_i \times_X Y_j} \rightarrow \mathcal{F}'_j|_{\mathbf{C}/Y_i \times_X Y_j}$, so daß die Kozykelbedingung $\sigma_{jk} \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ik}$ erfüllt ist.

Das Lemma erlaubt dann die folgende Umformulierung des Satzes über das Verkleben von Garben:

1.4.5 Satz. *Die E-Topologie auf \mathbf{C} sei gröber als die kanonische. Es sei $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine Überdeckung. Dann ist der kanonische Funktor $\mathbf{Shv}((\mathbf{C}/X)_{E/X}) \rightarrow \mathbf{Desc}_{\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)}(\mathcal{U})$ eine Äquivalenz von Kategorien.*

1.4.3 Verkleben von Modulgarben

Wir betrachten nun den Situs $\mathbf{Sch}_{\text{fppf}}$ bzw. $(\mathbf{Sch}/X)_{\text{fppf}} := (\mathbf{Sch}/X)_{\text{fppf}/X}$ für ein Schema X . Die Prägarbe von Ringen $U \mapsto \mathcal{O}_U(U)$ auf \mathbf{Sch}/X ist eine fppf-Garbe (denn sie wird dargestellt durch das Schema \mathbb{A}_X^1). Wir bezeichnen sie ebenfalls mit \mathcal{O}_X .

Definition. Eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe \mathcal{F} auf $(\mathbf{Sch}/X)_{\text{fppf}}$ heißt *quasikohärent*, wenn die Einschränkung von \mathcal{F} auf $\text{Op}(X)$ eine quasikohärente Garbe auf X im klassischen Sinn ist, und wenn für jeden Morphismus $f : U \rightarrow X$ der kanonische Morphismus $f^*(\mathcal{F}|_{\text{Op}(X)}) \rightarrow \mathcal{F}|_{\text{Op}(U)}$ invertierbar ist.

Insbesondere ist dann auch $\mathcal{F}|_{\text{Op}(U)}$ ein quasikohärenter Modul auf U im klassischen Sinn, und für jeden Morphismus $f : U \rightarrow V$ von X -Schemata ist der kanonische Morphismus $f^*(\mathcal{F}|_{\text{Op}(V)}) \rightarrow \mathcal{F}|_{\text{Op}(U)}$ invertierbar.

1.4.6 Proposition. *Der Einschränkungsfunktor $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}|_{\text{Op}(X)}$ von der Kategorie der quasikohärenten Moduln auf $(\mathbf{Sch}/X)_{\text{fppf}}$ in die Kategorie der quasikohärenten Moduln auf X ist eine Äquivalenz von Kategorien.*

Beweisskizze. Wir konstruieren einen quasiinversen Funktor W : sei nämlich \mathcal{F} eine quasikohärente Garbe auf X im klassischen Sinne. Für jedes X -Schema Y setzen wir $W(\mathcal{F})(Y \rightarrow X) := ((Y \rightarrow X)^* \mathcal{F})(Y)$. $W(\mathcal{F})$ wird auf die offensichtliche Art zu einer Prägarbe. Für jede offene Teilmenge $U \hookrightarrow Y$ gilt dann $W(\mathcal{F})(U) = ((Y \rightarrow X)^* \mathcal{F})(U)$, insbesondere ist $W(\mathcal{F})$ eine Zariski-Prägarbe. Nach 1.3.5 und 1.3.8 folgt dann, daß $W(\mathcal{F})$ eine fppf-Garbe ist. Zuletzt zeigt man schnell, daß $W(\mathcal{F})$ quasikohärenter \mathcal{O}_X -Modul ist, und daß der so definierte Funktor W quasiinvers zum Einschränkungsfunktor ist. \square

Da das Verkleben von Garben Produkte erhält (!), können wir auch Modulgarben zu Modulgarben verkleben. Die wesentliche Aussage ist nun, daß Verklebungen *quasikohärenter* Modulgarben wieder quasikohärent sind. Dies folgt aus dem

1.4.7 Lemma. *Es seien $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$ affine Schemata und $f : Y \rightarrow X$ treufach und endlich präsentierbar. Es sei \mathcal{F} eine \mathcal{O}_X -Modulgarbe auf $(\mathbf{Sch}/X)_{\text{fppf}}$, so daß die Einschränkung von \mathcal{F} auf $(\mathbf{Sch}/Y)_{\text{fppf}}$ eine quasikohärente \mathcal{O}_Y -Modulgarbe ist. Dann ist auch \mathcal{F} selbst quasikohärent.*

Beweisskizze. Es sei $M := \mathcal{F}(A)$ als A -Modul und $\mathcal{G} := W(\widetilde{M})$. Wir wollen zeigen, daß der kanonische Morphismus $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ invertierbar ist. Dazu genügt es, die Invertierbarkeit seiner Einschränkung auf $(\mathbf{Sch}/Y)_{\text{fppf}}$ zu beweisen; diese ist der kanonische Morphismus $W(f^* \widetilde{M}) = W(\widetilde{M \otimes_A B}) \rightarrow \mathcal{F}|_{\mathbf{Sch}/Y}$. Da $\mathcal{F}|_{\mathbf{Sch}/Y}$ quasikohärent ist, genügt es nach dem nächsten Lemma zu zeigen, daß $M \otimes_A B \rightarrow \mathcal{F}(B)$ ein Isomorphismus von B -Moduln ist.

Dazu zeigen wir allgemeiner: ist $R \rightarrow S$ ein flacher Homomorphismus von A -Algebren, so ist $\mathcal{F}(R) \otimes_R S \rightarrow \mathcal{F}(S)$ invertierbar. Falls R eine B -Algebrastruktur zuläßt, folgt dies daraus, daß $\mathcal{F}|_{\mathbf{Sch}/B}$ quasikohärent ist. Im allgemeinen Fall haben wir das folgende kommutative Diagramm von Equalizern:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(R) \otimes_R S & \longrightarrow & \mathcal{F}(R \otimes_A B) \otimes_R S & \rightrightarrows & \mathcal{F}(R \otimes_A B \otimes_A B) \otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(S) & \longrightarrow & \mathcal{F}(S \otimes_A B) & \rightrightarrows & \mathcal{F}(S \otimes_A B \otimes_A B) \end{array}$$

Wegen $_ \otimes_{(R \otimes_A B)} (S \otimes_A B) = _ \otimes_R S$ usw. sind nach dem schon behandelten Fall die beiden rechten vertikalen Pfeile invertierbar und damit auch der linke. \square

1.4.8 Lemma. *Ist \mathcal{F} quasikohärent auf $(\mathbf{Sch}/X)_{\text{fppf}}$, $X = \text{Spec } A$ affin, so ist $W(\widetilde{\mathcal{F}(X)}) \rightarrow \mathcal{F}$ invertierbar.*

Beweis. Dies ist nur eine präzisere Version der Isomorphie $W(\widetilde{\mathcal{F}}(X)) \cong W(\mathcal{F}|_{\text{Op}(X)}) \cong \mathcal{F}$. \square

1.4.9 Satz (Treuflicher Abstieg quasikohärenter Garben). *Es sei $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine fppf-Überdeckung eines Schemas X . Dann ist die Kategorie der quasikohärenten Moduln auf X (im klassischen Sinn) äquivalent zur Kategorie aller Familien (\mathcal{F}_i) , wobei \mathcal{F}_i ein quasikohärenter Y_i -Modul ist, zusammen mit einer Familie von Isomorphismen (σ_{ij}) mit $\sigma_{ij} : (Y_i \times_X Y_j \rightarrow Y_i)^* \mathcal{F}_i \xrightarrow{\cong} (Y_i \times_X Y_j \rightarrow Y_j)^* \mathcal{F}_j$, so daß $\sigma_{jk} \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ik}$ (bei Unterdrückung der notwendigen Restriktionen) gilt.*

Beweisskizze. Für jedes i ist $W(\mathcal{F}_i)$ eine fppf-Garbe auf \mathbf{Sch}/Y_i . Die σ_{ij} liefern Verklebedaten, so daß wir eine fppf-Garbe \mathcal{F} auf \mathbf{Sch}/X erhalten mit $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|_{\mathbf{Sch}/Y_i}$ für alle i . Auf \mathcal{F} erhalten wir eine \mathcal{O}_X -Modulstruktur, und nach Reduktion auf den affinen Fall zeigt Lemma 1.4.7, daß \mathcal{F} quasikohärent ist. \square

Mittels der üblichen Identifikation affiner Schemata über X mit quasikohärenten \mathcal{O}_X -Algebren auf X ([Har, Ex. II.5.17]) erhalten wir daraus:

1.4.10 Korollar. *Es sei $(Y_i \rightarrow X)_i$ eine fppf-Überdeckung eines Schemas X . Dann ist die Kategorie der über X affinen Schemata äquivalent zur Kategorie aller Familien (U_i) , wobei U_i ein über Y_i affines Schema ist, zusammen mit einer Familie von Isomorphismen $\sigma_{ij} : U_i \times_X Y_j \xrightarrow{\cong} Y_i \times_X U_j$ über $Y_i \times_X Y_j$, so daß $\sigma_{jk} \circ \sigma_{ij} = \sigma_{ik}$ (bei Unterdrückung der notwendigen Restriktionen) gilt.*

1.4.4 Abstieg von Eigenschaften von Morphismen

In der Theorie der Garbentorseure werden wir ständig Basiswechsel mit einem Epimorphismus von Garben vornehmen. Von wesentlicher Bedeutung wird dann sein:

1.4.11 Proposition. *Es sei C_E ein Situs, $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ ein Morphismus von Garben in $\mathbf{Shv}(C_E)$, $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ein Epimorphismus und f' der Morphismus $\mathcal{E}' := \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$. Dann gilt: f' ist genau dann Mono- bzw. Epi- bzw. Isomorphismus, wenn f es ist.*

Beweis. „Immer dann“: dies ist (ohne Voraussetzung an $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$) für Monomorphismen rein formal, für Epimorphismen eine einfache Folgerung aus der Charakterisierung von Garbenepimorphismen. „Nur dann“: dies ist für Epimorphismen rein formal. Für Monomorphismen sei $X \in \mathcal{C}$, und seien $a, b \in \mathcal{E}(X)$ mit $f(a) = f(b) =: x$. Nach der Charakterisierung von Epimorphismen finden wir eine Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ und Elemente $x'_i \in \mathcal{X}'(Y_i)$, die in $\mathcal{X}(Y_i)$ das Bild $x|_{Y_i}$ haben. Dann haben wir aber $(a|_{Y_i}, x'_i), (b|_{Y_i}, x'_i) \in \mathcal{E}'(Y_i)$ mit Bild x'_i in $\mathcal{X}'(Y_i)$, und wegen der Injektivität von f' folgt daraus $a|_{Y_i} = b|_{Y_i}$ für alle i , also $a = b$. \square

Insbesondere folgt: Ist $f : U \rightarrow V$ ein Morphismus von X -Schemata, und ist $Y \rightarrow X$ treuflich und lokal endlich präsentierbar, so ist f genau dann invertierbar, wenn $f_Y : U \times_X Y \rightarrow V \times_X Y$ invertierbar ist. Analoge Aussagen gelten aber auch für andere Eigenschaften von Morphismen von Schemata. Ohne Beweis listen wir diejenigen auf, die wir in dieser Arbeit benötigen:

1.4.12 Satz. *Es sei $f : U \rightarrow V$ ein Morphismus von X -Schemata, und $Y \rightarrow X$ sei treuflich und lokal endlich präsentierbar. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus (ein Monomorphismus, surjektiv, affin, quasiaffin, quasikompakt, (lokal) von endlichem Typ, (lokal) endlich präsentierbar, endlich, glatt, étale), wenn $f_Y : U \times_X Y \rightarrow V \times_X Y$ es ist.*

Beweis. Man kann immer $V = X$ annehmen. Die Fälle „glatt“ und „étale“ finden sich in [EGA, IV.17.7.4]. Die übrigen werden im Fall, daß f *quasikompakt* ist^(viii) (dabei nicht mehr notwendig lokal endlich präsentierbar) in [EGA, IV.2.6.1, 2.6.4 und 2.7.1] bewiesen. Um daraus die Aussage in unserer Situation zu folgern, können wir annehmen, daß X affin ist. Nach dem nächsten Lemma können wir dann Y ersetzen durch ein Schema, das sogar endlich präsentierbar über X ist. \square

1.4.13 Lemma. *Es sei X ein quasikompaktes und quasisepariertes Schema (beispielsweise quasiaffin). Ist $f : Y \rightarrow X$ ein treuflacher und lokal endlich präsentierbarer Morphismus, so finden wir einen Morphismus $\tilde{Y} \rightarrow Y$, so daß $\tilde{Y} \rightarrow X$ treuflach und endlich präsentierbar ist.*

Beweis. Es sei $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ eine offene affine Überdeckung. Da f offen ist, finden wir eine endliche Teilmenge $J \subset I$, so daß $\tilde{Y} := \coprod_{i \in J} Y_i \rightarrow X$ immer noch surjektiv ist. Aber \tilde{Y} ist affin, insbesondere quasikompakt, und nach [EGA, IV.1.2.4] ist der Morphismus $\tilde{Y} \rightarrow X$ dann quasikompakt. Nach [EGA, IV.1.2.2(v)] er auch quasisepariert und damit insgesamt treuflach und endlich präsentierbar. \square

Wir erinnern an dieser Stelle daran, daß ein Morphismus $f : X \rightarrow Y$ von Schemata *quasiaffin* heißt, wenn es einen affinen Morphismus ([Har, Ex. II.5.17]) $\tilde{X} \rightarrow Y$ und eine quasikompakte offene Einbettung $X \hookrightarrow \tilde{X}$ gibt, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \searrow & \nearrow \\ & \tilde{X} & \end{array}$$

kommutiert. Insbesondere ist f dann quasikompakt. Man kann zeigen ([EGA, II.5.1.6]), daß f genau dann quasiaffin ist, wenn für jede offene affine Teilmenge $V \subset Y$ das Schema $f^{-1}(V)$ quasiaffin, d.h. isomorph zu einem quasikompakten offenen Unterschema eines affinen Schemas, ist, oder wenn es eine offene affine Überdeckung $Y = \bigcup_i V_i$ gibt, so daß jedes V_i diese Eigenschaft hat. Außerdem sind quasiaffine Morphismen stabil bezüglich Basiswechsel und Komposition ([EGA, II.5.1.10(ii)]).

1.5 Algebraische Gruppen

Es sei \mathbf{C} eine Kategorie mit endlichen Produkten (und insbesondere einem finalen Element \star). Ein *Gruppenobjekt* in \mathbf{C} ist ein Objekt $G \in \mathbf{C}$ zusammen mit einer Faktorisierung des Funktors $\underline{G} : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$ über die Kategorie \mathbf{Grp} der Gruppen. Nach dem Lemma von Yoneda ist die Angabe einer solchen Faktorisierung äquivalent zur Angabe von Morphismen $G \times G \rightarrow G$ (Multiplikation), $G \rightarrow G$ (Inversenbildung) und $\star \rightarrow G$ (Inklusion des neutralen Elements), unter denen die offensichtlichen Relationen zu gelten haben.

1.5.1 Konstante endliche Gruppen

Sei \mathbf{C} eine *distributive* Kategorie, also eine Kategorie mit endlichen Produkten und Koprodukten, in der stets $X \times (Y \coprod Z) \xrightarrow{\cong} (X \times Y) \coprod (X \times Z)$ gilt. (Beispielsweise haben die Kategorien der Mengen, der topologischen Räume, der S -Schemata, der Garben auf einem Situs usw. diese Eigenschaft.)

Es sei G eine endliche Gruppe. Für jedes $g \in G$ sei X_g ein Exemplar des finalen Objekts \star von \mathbf{C} . Wir wollen $X := \coprod_{g \in G} X_g$ zu einem Gruppenobjekt machen. Als Inklusion des neutralen Elements nehmen wir dazu den Morphismus $\star \rightarrow X_1 \rightarrow X$, als Inversenbildung den durch $X_g \rightarrow X_{g^{-1}} \rightarrow X$ für alle $g \in G$ induzierten Morphismus, und als Produktabbildung können wir wegen $X \times X \cong \coprod_{g,h \in G} X_g \times X_h$ den

^(viii) und teilweise sogar unter schwächeren Voraussetzungen

durch $X_g \times X_h \rightarrow X_{gh} \rightarrow X$ für alle g, h induzierten Morphismus nehmen. Man überzeugt sich leicht, daß diese Konstruktion tatsächlich ein Gruppenobjekt liefert.

Definition. Man nennt X das *konstante endliche Gruppenobjekt* in \mathbf{C} zur Gruppe G .

Offensichtlich ist jedes Gruppenobjekt, das als Objekt ein endliches Koprodukt von Kopien von \star ist, ein konstantes endliches Gruppenobjekt zu einer gewissen endlichen Gruppe.

1.5.1 Beispiele. Das zu einer endlichen Gruppe G assoziierte endliche konstante Gruppenobjekt in \mathbf{Set} ist einfach wieder die Gruppe G ; das assoziierte Gruppenobjekt in $\mathbf{C} = \mathbf{Top}$ ist ebenfalls wieder G , nun aber aufgefaßt als diskrete Gruppe. Ist \mathbf{C}_E ein Situs, so ist das zu G assoziierte Gruppenobjekt in $\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$ die zur konstanten Prägarbe $U \mapsto G$ assoziierte Garbe.

Ein linksexakter Funktor zwischen Kategorien erhält offenbar konstante endliche Gruppenobjekte.

1.5.2 Gruppenschemata

Definition. Es sei S ein Schema. Ein *Gruppenschema* über S ist ein Gruppenobjekt in der Kategorie \mathbf{Sch}/S .

Gruppenschemata werden in dieser Allgemeinheit studiert in [SGA 3] und in [D–G]. Der Fall, daß S und G affine Schemata sind, ist äquivalent zur Theorie der (kommutativen) Hopfalgebren. Dies ist die vorherrschende Sichtweise in [Wa].

Definition. Es sei k ein Körper. Eine *algebraische Gruppe* über k ist ein *geometrisch reduziertes* Gruppenschema von endlichem Typ über $\text{Spec } k$.

In der Definition kann man „geometrisch reduziert“ ersetzen durch „glatt“: die nichttriviale Richtung ist dabei die Folgerung der Glattheit aus der Reduziertheit. Nach Abstiegstheorie können wir aber annehmen, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Nach dem Satz über generische Glattheit ([EGA, IV.17.15.12]) gibt es dann eine nichtleere offene Teilmenge, auf der eine solche Gruppe glatt ist; deren Translate überdecken aber die Gruppe. – Im Fall $\text{Char } k = 0$ ist die Forderung nach Reduziertheit keine Einschränkung, da nach einem Satz von Cartier jedes Gruppenschema von endlichem Typ über einem solchen Körper automatisch reduziert ist, vgl. [SGA 3, Exp. VI_B, § 1.6.1] oder [Oo].

Eine algebraische Gruppe über einem Körper k ist genau dann affin, wenn sie *linear*, also ein abgeschlossenes Untergruppenschema von $\text{GL}_{n,k}$ ist ([Wa, 3.4]).

In der Theorie algebraischer Gruppen ist die folgende Sprechweise üblich: es seien G, H algebraische Gruppen über einem Körper k . Ein *Homomorphismus* $G \rightarrow H$ ist definitionsgemäß ein Homomorphismus von \bar{k} -Gruppenschemata $G \times_k \bar{k} \rightarrow H \times_k \bar{k}$. Eine (*abgeschlossene*) *Untergruppe* $U \subset G$ ist ein abgeschlossenes, reduziertes Untergruppenschema von $G \times_k \bar{k}$, usw. – Ist ein Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ von algebraischen Gruppen gegeben durch Pullback eines Morphismus von k -Gruppenschemata nach \bar{k} , so sagt man, φ sei *über k definiert*. Ist eine Untergruppe $U \subset G$ Pullback eines Untergruppenschemas von G , so sagt man, U sei *über k definiert*, usw.

Die Bücher [Hu], [Bor], [Sp] verwenden diesen Standpunkt in der Theorie algebraischer Gruppen: sie betrachten Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und untersuchen gesondert Fragen der Definiertheit über Unterkörpern. Vergleiche auch das Manuskript [Mi05].

Ein weiterer möglicher Standpunkt in der Untersuchung von Gruppenschemata ist es, die von einem Gruppenschema über S definierte Gruppengarbe auf $(\mathbf{Sch}/S)_{\text{fppf}}$ zu betrachten. Diese Sichtweise wird

in [D–G] besonders betont, und sie liefert uns im nächsten Kapitel den Rahmen zur Entwicklung der Theorie der Torseure. Beispielsweise sieht man schnell: ist $\varphi : G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von S -Gruppenschemata, so ist $\ker \varphi := G \times_H S$ (mit dem zum neutralen Element gehörenden Morphismus $S \rightarrow H$) wieder ein S -Gruppenschema, und $\underline{\ker} \varphi = \ker \varphi$ in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/S)_{\text{fppf}})$ (denn die Yoneda-Einbettung ist linksexakt).

Als Beispiel betrachten wir die konstanten endlichen Gruppenschemata: ist G eine endliche Gruppe, so ist das zu G assoziierte konstante endliche Gruppenobjekt X in \mathbf{Sch}/S einfach die nach G indizierte disjunkte Vereinigung von Kopien von S ; insbesondere ist X stets endlich und étale über S . Ist S zusammenhängend, so ergibt sich $X(Y) \cong G$ für jedes *zusammenhängende* S -Schema Y , und allgemeiner haben wir für jedes *lokal zusammenhängende* (beispielsweise lokal noethersche) S -Schema Y eine natürliche Bijektion $X(Y) \cong \text{Abb}(\pi_0(Y), G)$, wobei $\pi_0(Y)$ die Menge der (dann automatisch offenen) Zusammenhangskomponenten von Y bezeichnet.

Ist insbesondere $S = \text{Spec } k$ ein Körper, so ist jedes konstante endliche Gruppenschema über S eine algebraische Gruppe über k . Die Klassifikation der étalen Algebren über einem Körper liefert außerdem sofort, daß *jede* endliche étale algebraische Gruppe über einem *separabel abgeschlossenen* Körper ein konstantes endliches Gruppenschema ist. Ist insbesondere k ein beliebiger Körper und X eine endliche étale algebraische Gruppe über k , so wird k nach einer endlichen separablen Erweiterung des Grundkörpers isomorph zu einem konstanten endlichen Gruppenschema. Aus diesem Grund nennt man endliche étale algebraische Gruppen auch „getwistete endliche Gruppenschemata“; wir werden unten (1.5.14) sehen, daß jede endliche algebraische Gruppe über einem Körper bereits étale ist.

1.5.3 Quotienten

Die Frage nach der Existenz von Quotienten ist eine der Hauptschwierigkeiten in der Grundlegung der Theorie der algebraischen Gruppen. Wir beschränken uns auf Gruppenschemata von endlichem Typ über einem Körper.

1.5.2 Proposition. *In der Kategorie der geringten Räume existieren Koequalizer.*

Beweisskizze. Es seien $f, g : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ Morphismen. Es sei Z der Koequalizer von f und g in der Kategorie der topologischen Räume, also $Z = Y/\sim$, wobei \sim die von $f(x) \sim g(x)$ für alle $x \in X$ erzeugte Äquivalenzrelation ist. Es sei $\pi : Y \rightarrow Z$ die Projektion. Definiere dann \mathcal{O}_Z als den Equalizer der beiden Garbenmorphismen $\pi_* \mathcal{O}_Y \rightarrow \pi_* f_* \mathcal{O}_X = \pi_* g_* \mathcal{O}_X$. Dann überzeugt man sich ohne Mühe davon, daß (Z, \mathcal{O}_Z) tatsächlich ein Koequalizer von f und g in der Kategorie der geringten Räume ist. \square

Der zentrale Existenzsatz für Quotienten algebraischer Gruppen ist nun:

1.5.3 Satz. *Es sei k ein Körper und $i : H \rightarrow G$ ein Monomorphismus von k -Gruppenschemata, die lokal von endlichem Typ sind. Es sei G/H der geringte Raum, der das Diagramm*

$$H \times_k G \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Multiplikation}} \\ \xrightarrow{\text{Projektion}} \end{array} G \longrightarrow G/H$$

exakt macht. (Intuitiv: wir wollen hg und g miteinander identifizieren.) Dann gilt:

1. G/H ist ein k -Schema, genauer eine direkte Summe von k -Schemata von endlichem Typ.
2. Der Morphismus $G \rightarrow G/H$ ist treuflach und lokal endlich präsentierbar (insbesondere offen).
3. Der Morphismus $H \times_k G \rightarrow G \times_{G/H} G$, gegeben durch $(h, g) \mapsto (hg, g)$, ist invertierbar.

Beweis. [SGA 3, Exp. VI_A, § 3.2]. □

Aus der zweiten und dritten Aussage des Satzes folgt insbesondere, daß das Schema G/H tatsächlich auch vom Garbenstandpunkt aus gesehen der „richtige“ Quotient von G nach H ist. Wir haben nämlich:

1.5.4 Korollar. *In der Situation des Satzes ist $G/H = \underline{G}/\underline{H}$ der Quotient in $\mathbf{Shv}(\mathbf{Sch}_{\text{fppf}}/k)$.*

Beweis. Es ist $\underline{G}/\underline{H} = a_{\mathcal{Q}}$, wobei \mathcal{Q} die Prägarbe $X \mapsto \underline{G}(X)/\underline{H}(X)$ ist. Nach Konstruktion von G/H faktorisiert nun $\underline{G} \rightarrow G/H$ über \mathcal{Q} . Nach dem Satz ist $\underline{G} \rightarrow \underline{G}/\underline{H}$ Epimorphismus (vgl. 1.3.16), also auch $a_{\mathcal{Q}} \rightarrow \underline{G}/\underline{H}$. Wir müssen nur zeigen, daß diese Abbildung auch injektiv ist, wofür es wegen der Exaktheit der Garbifizierung genügt, die Injektivität von $\mathcal{Q} \rightarrow \underline{G}/\underline{H}$ zu beweisen. Seien also $\overline{g_1}, \overline{g_2} \in \mathcal{Q}(X)$ Elemente, die in $\underline{G}/\underline{H}$ übereinstimmen. Nach 3. im Satz gibt es dann ein $h \in H(X)$ mit $g_2 = hg_1$, und das bedeutet $\overline{g_2} = \overline{g_1}$. □

Der so (schema- oder garbentheoretisch) konstruierte Quotient algebraischer Gruppen fällt auch zusammen mit dem in der klassischen „mengentheoretischen“ Sichtweise konstruierten Quotienten. Zum Beweis verwenden wir die folgende

1.5.5 Proposition. *Es sei k ein Körper, G ein Gruppenfunktork auf \mathbf{Sch}/k und $f : X \rightarrow Y$ ein G -äquivarianter Morphismus von k -Schemata von endlichem Typ. $G(\overline{k})$ operiere transitiv auf $X(\overline{k})$, und X sei reduziert. Dann ist $f(X) \subset Y$ lokal abgeschlossen. Versehen wir $f(X)$ mit der reduzierten Schemastruktur, so faktorisiert f als $X \rightarrow f(X) \rightarrow Y$, wobei $f(X)$ stabil unter G ist, und $X \rightarrow f(X)$ ist treuflach.*

Beweis. [D–G, II, § 5, 3.1] □

Definition. Es sei \mathbf{C} eine Kategorie und \mathcal{G} eine Prägarbe von Gruppen auf \mathbf{C} , die auf einer Prägarbe \mathcal{Y} operiere. Ist $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ eine Unterprägarbe, so ist der \mathcal{G} -Stabilisator von \mathcal{X} in \mathcal{Y} die Prägarbe $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) \subset \mathcal{G}$ mit

$$\text{Stab}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X})(C) = \{g \in \mathcal{G}(C) \mid g \cdot \mathcal{Y}(C') = \mathcal{Y}(C') \text{ für alle } C' \rightarrow C\}.$$

Ist speziell $\mathcal{X} = \{x\}$ mit einem $x \in \mathcal{X}(\star)$, so schreiben wir $\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x) := \text{Stab}_{\mathcal{G}}(\mathcal{X})$, und es ist

$$\text{Stab}_{\mathcal{G}}(x)(C) = \{g \in \mathcal{G}(C) \mid g \cdot x = x\}.$$

1.5.6 Satz. *Es sei k ein Körper, G ein k -Gruppenschema von endlichem Typ, das auf einem k -Schema Y von endlichem Typ operiert. Es sei $H \subset G$ ein abgeschlossenes Untergruppenschema und $y \in Y(k)$ ein Punkt mit $\text{Stab}_G(y) = \underline{H}$. Dann ist G/H ein lokal abgeschlossenes Unterschema von Y .*

Beweis. Wir behandeln nur den für uns interessanten Fall, daß G reduziert ist (der allgemeine Fall findet sich in [D–G, III, § 3, 5.2]). Es sei $f : G \rightarrow Y$ der durch $g \mapsto g \cdot y$ gegebene Morphismus. Mit $X = G$ (mit der kanonischen Linksoperation) zeigt dann die Proposition, daß $\tilde{Y} := f(G) \subset Y$ lokal abgeschlossen ist, und daß – versehen wir \tilde{Y} mit der reduzierten Schemastruktur – der Morphismus $G \rightarrow \tilde{Y}$ treuflach ist. Da er außerdem endlich präsentierbar ist, ist $\underline{G} \rightarrow \underline{\tilde{Y}}$ ein Epimorphismus in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/k)_{\text{fppf}})$. Da \underline{H} auch der Stabilisator von y in $\tilde{Y}(k)$ ist, erhalten wir das folgende kommutative Diagramm von Garben:

$$\begin{array}{ccc} \underline{G} & \longrightarrow & \underline{\tilde{Y}} \\ \downarrow & \searrow & \uparrow \\ \underline{G}/\underline{H} & & \end{array}$$

Also ist $\underline{\tilde{Y}} \cong \underline{G}/\underline{H}$. Nach 1.5.4 ist aber $\underline{G}/\underline{H} = \underline{G}/\underline{H}$, und nach dem Lemma von Yoneda folgt $\tilde{Y} \cong G/H$. (Insbesondere ist in unserer Situation, falls G reduziert ist, auch G/H reduziert.) □

1.5.7 Proposition. *Es sei k ein Körper und G eine lineare algebraische Gruppe über k . Ist $H \subset G$ eine (über k definierte) abgeschlossene Untergruppe, so gibt es eine lineare Operation von G auf einem \mathbb{A}_k^n und einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{A}_k^n(k)$, so daß der Stabilisator der Geraden kv gerade H ist.*

Beweis. [Wa, 16.1] □

Insbesondere erhalten wir in der Situation der Proposition einer Operation von G auf \mathbb{P}_k^{n-1} zusammen mit einem Punkt $[v] \in \mathbb{P}_k^{n-1}(k)$, dessen Stabilisator genau H ist. Der Satz zeigt dann also:

1.5.8 Korollar. *Es sei k ein Körper, G eine lineare algebraische Gruppe über k und $H \subset G$ eine (über k definierte) abgeschlossene Untergruppe. Dann ist G/H ein lokal abgeschlossenes, reduziertes Unterschema eines projektiven Raumes über k .*

1.5.4 Zusammenhangskomponenten

Es sei k ein Körper.

1.5.9 Lemma. *Sind A, A' étale k -Algebren, so sind auch $A \times A'$, $A \otimes_k A'$ und jeder Quotient von A étale über k .*

Beweis. Die Aussage über Produkte und Tensorprodukte folgt aus den Rechenregeln für étale Morphismen. Die Aussage über Quotienten ergibt sich aus der Klassifikation (1.2.8) étaler Algebren über einem Körper: denn jede solche Algebra ist endliches Produkt endlicher separabler Erweiterungskörper von k . □

1.5.10 Korollar. *Ist A eine k -Algebra, und sind $A_0, A'_0 \subset A$ étale k -Unteralgebren, so ist die von A_0 und A'_0 erzeugte Unteralgebra wieder étale.*

1.5.11 Lemma. *Es sei A eine k -Algebra von endlichem Typ und $A_0 \subset A$ eine étale Unteralgebra. Dann ist $\dim_k A_0 \leq e$, wobei e die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $\text{Spec}(A \otimes_k k_{\text{sep}})$ ist.*

Beweis. Durch Basiswechsel können wir $k = k_{\text{sep}}$ annehmen. Dann ist aber $A_0 \cong k^d$ mit $d = \dim_k A_0$. Also besitzt $\text{Spec } A_0$ genau d Zusammenhangskomponenten, und da $\text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A_0$ dominant ist, folgt $e \geq d$. □

Zusammen zeigen diese Resultate, daß A eine eindeutig bestimmte maximale étale Unteralgebra $\pi_0(A)$ enthält, und für jede étale Unteralgebra $A_0 \subset A$ gilt $A_0 \subset \pi_0(A)$. Da Quotienten étaler Algebren wieder étale sind, definiert π_0 einen Funktor. Man zeigt außerdem leicht, daß $\text{Spec } \pi_0(A)$ in Bijektion steht zu den Zusammenhangskomponenten von $\text{Spec } A$, wodurch sich die Bezeichnung π_0 erklärt.

1.5.12 Satz. *Es seien A, B k -Algebren von endlichem Typ.*

1. *Für jede Körpererweiterung $k \subset K$ ist $\pi_0(A \otimes_k K) = \pi_0(A) \otimes_k K$.*
2. *Es seien A, B k -Algebren von endlichem Typ. Dann gilt $\pi_0(A) \otimes_k \pi_0(B) \xrightarrow{\cong} \pi_0(A \otimes_k B)$.*

Beweis. [Wa, 6.5]. □

Insbesondere folgt: ist $G = \text{Spec } H$ eine lineare algebraische Gruppe über k , so ist $\pi_0(G) := \text{Spec } \pi_0(H)$ eine endliche étale algebraische Gruppe über k . Es sei $G^\circ := \ker(G \rightarrow \pi_0(G))$. Man sieht leicht, daß für $H = \prod_i H_i$ mit zusammenhängenden Algebren H_i gilt $G^\circ = \text{Spec } H_0$, wobei H_0 derjenige Faktor ist, über den die zum neutralen Element korrespondierende Abbildung $H \rightarrow k$ faktorisiert.

1.5.13 Proposition. *Es sei G eine lineare algebraische Gruppe über k . Dann ist die Sequenz $1 \rightarrow G^\circ \rightarrow G \rightarrow \pi_0(G) \rightarrow 1$ exakt in der fppf-Topologie (d.h. die zugehörige Sequenz von Garben in $\text{Shv}((\text{Sch}_k)_{\text{fppf}})$ ist exakt).*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, daß $\underline{G} \rightarrow \underline{\pi_0(G)}$ Epimorphismus ist. Aber $G \rightarrow \pi_0(G)$ ist sogar treufach (und ohnehin endlich präsentierbar) nach [Wa, 14.1]. \square

1.5.14 Korollar. *Jede endliche algebraische Gruppe G über k ist étale.*

Beweis. Sei $G = \text{Spec } H$. Dann ist H eine reduzierte, endliche k -Algebra, also $H = \prod_i L_i$ mit endlichen Erweiterungskörpern L_i von k . Dann ist $G^\circ = \text{Spec } L_0$, und da G° als k -Gruppenschema einen k -rationalen Punkt besitzen muß, folgt $L_0 = k$. Dann ist \underline{G}° aber die triviale Gruppe, und nach der Proposition folgt $G \xrightarrow{\cong} \pi_0(G)$. (Ein anderer möglicher Beweis wäre: nach Abstiegstheorie können wir $k = \bar{k}$ annehmen, aber dann ist $H = k^n$ für ein n , insbesondere offensichtlich étale.) \square

Man kann die Konstruktion von π_0 auf nicht notwendig affine k -Schemata von endlichem Typ ausdehnen, vgl. [D–G, I, § 4, No. 6]. Wir werden diese Verallgemeinerung nicht benötigen.

1.5.5 Boreluntergruppen, maximale Tori und Bruhat-Zerlegung

Es sei G eine *zusammenhängende* lineare algebraische Gruppe über einem *algebraisch abgeschlossenen* Körper k ; wir schreiben dann G anstelle von $G(k)$. Es sei \mathfrak{B} die Menge der Boreluntergruppen von G . Die Operation von G auf \mathfrak{B} durch Konjugation ist transitiv ([Hu, 21.3]), und da Boreluntergruppen selbstnormalisierend sind ([Hu, 23.1]), ist der Stabilisator jedes $B \in \mathfrak{B}$ gerade B . Für eine Untergruppe $H \subset G$ ist dann insbesondere die Fixmenge \mathfrak{B}^H gerade die Menge aller $B \in \mathfrak{B}$ mit $H \subset B$.

Es sei $T \subset G$ ein maximaler Torus. Dann operiert $N_G(T)$ durch Konjugation auf \mathfrak{B}^T . Für jedes $B \in \mathfrak{B}^T$ gilt aber sogar $Z_G(T) \subset B$ ([Hu, Lm. 24.1]), so daß wir eine Operation der *Weylgruppe* $W(G, T) := N_G(T)/Z_G(T)$ auf \mathfrak{B}^T erhalten. Diese Operation ist frei und transitiv ([Hu, Prop. 24.1A]). Die Weylgruppe, und damit \mathfrak{B}^T , ist aufgrund der Starrheit von Tori ([Hu, 16.3]) *endlich*.

Fixieren wir nun eine Boreluntergruppe $B \in \mathfrak{B}$, so induziert die Surjektion $G \rightarrow \mathfrak{B}$, $g \mapsto gBg^{-1}$, eine Bijektion $G/B \rightarrow \mathfrak{B}$. (Insbesondere erhalten wir auf \mathfrak{B} die Struktur einer projektiven Varietät, die, wie man sich leicht überlegen kann, nicht von der Wahl von B abhängt.) Diese Bijektion überführt die natürliche Linksoperation von G auf G/B in die Operation von G auf \mathfrak{B} durch Konjugation.

Sei nun G zusätzlich reduktiv. Es sei $T \subset G$ ein maximaler Torus und $B \in \mathfrak{B}^T$ eine Boreluntergruppe, die T enthält. Wegen $Z_G(T) \subset B$ hängt für ein $w \in N_G(T)$ die Nebenklasse wB nur von $[w] \in N_G(T)$ ab.

1.5.15 Satz (Bruhat-Zerlegung).

1. Die *Doppelnebenklassen* $C(w) := BwB$ sind lokal abgeschlossen, und es gibt genau eine Klasse $[w_0] \in W(G, T)$, so daß $C(w_0) \subset G$ offen ist.
2. G ist die disjunkte Vereinigung der $C(w)$, $[w] \in W(G, T)$.

3. Für jede Klasse $[w] \in W(G, T)$ gibt es einen Isomorphismus von Varietäten $\mathbb{A}^n \times B \rightarrow C(w)$ (wobei n von $[w]$ abhängt).

Beweis. [Sp, 8.3.6, 8.3.8, 8.3.11]. □

1.5.16 Korollar. Es gilt $G = \bigcup_{[w] \in W(G, T)} wC(w_0)$.

Beweis (vgl. [Sp, 8.5.10 (1)]). Die Bruhat-Zerlegung von G induziert eine Zerlegung

$$G/B = \bigcup_{[w] \in W(G, T)} X(w),$$

wobei $X(w)$ das Bild von $C(w)$ unter der (offenen) Abbildung $\pi : G \rightarrow G/B$ ist, also $X(w) = B\pi(w)$. Setze $Y = \bigcup_{[w]} wX(w_0) \subset G/B$; es genügt zu zeigen, daß $Y = G/B$ ist. Y ist stabil unter der Operation von T auf G/B , denn für $t \in T, w \in N_G(T)$ gibt es ein $t' \in T$ mit $tw = wt'$, und daraus folgt

$$twB\pi(w_0) = wt'B\pi(w_0) = wB\pi(w_0).$$

Identifizieren wir nun G/B vermöge $[g] \mapsto gBg^{-1}$ mit \mathfrak{B} ; dann entspricht Y der (insbesondere offenen) Teilmenge $\mathfrak{Y} = \{(wb)B_0(wb)^{-1} \mid b \in B, w \in N_G(T)\}$ mit $B_0 := w_0Bw_0^{-1}$, und \mathfrak{Y} ist stabil unter der Operation von T auf \mathfrak{B} durch Konjugation. Also operiert T durch Konjugation auf der projektiven Varietät $\mathfrak{B} - \mathfrak{Y}$. Ist diese nichtleer, so existiert nach dem Borelschen Fixpunktsatz ein Fixpunkt, d.h. eine Boreluntergruppe $\tilde{B} \in (\mathfrak{B} - \mathfrak{Y})^T \subset \mathfrak{B}^T$. Insbesondere gilt dann $T \subset \tilde{B}$. Da $N_G(T)$ aber transitiv auf \mathfrak{B}^T operiert, finden wir dann ein $w \in N_G(T)$ mit $\tilde{B} = wBw^{-1}$, aber dann folgt $\tilde{B} \in \mathfrak{Y}$, Widerspruch. □

1.5.6 Rationalitätsfragen

Sei nun k ein beliebiger Körper. Die Literatur zu linearen algebraischen Gruppen über beliebigen Körpern ist etwas verstreut; will man nicht die extreme Allgemeinheit von [SGA 3] bemühen, scheint die parallele Konsultation der Bücher [Hu], [Bor], [Sp] mit gelegentlichen Blicken in die Artikel [B-T] und [Ro] (neben anderen Artikeln von Rosenlicht) die einzige Alternative zu sein.

1.5.17 Satz. Es sei G eine lineare algebraische Gruppe k . Dann besitzt G einen maximalen Torus, der über k definiert ist.

Beweis. [Sp, 13.3.6 und 13.3.7] oder [Bor, 18.2(i)]. □

1.5.18 Satz. Ist G eine zusammenhängende reductive lineare algebraische Gruppe über k , so sind Zentrum $Z(G)$ und Radikal $R(G)$ über k definiert.

Beweis. Für das Zentrum siehe [Bor, 18.2(ii)]. Für das Radikal beachte $R(G) = Z(G)^\circ$ ([Hu, Lm. 19.5]), und daß die Einheitskomponente einer k -Gruppe eine k -Gruppe ist ([Sp, 12.1.1]). □

Definition. Eine zusammenhängende, auflösbare k -Gruppe G heißt *zerfallend* (über k), wenn es eine Kompositionsreihe $\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ gibt, so daß jedes G_i eine zusammenhängende abgeschlossene k -Untergruppe ist, und so daß jeder Quotient G_i/G_{i-1} über k isomorph zu $\mathbb{G}_{m,k}$ oder $\mathbb{G}_{a,k}$ ist. Eine lineare algebraische Gruppe G über k heißt *zerfallend* (über k), wenn sie eine Boreluntergruppe besitzt, die über k definiert und zerfallend ist.

1.5.19 Satz (Rosenlicht). Es sei G eine zusammenhängende, zerfallende auflösbare k -Gruppe. Dann ist G als Varietät isomorph zu $\mathbb{G}_{a,k}^r \times \mathbb{G}_{m,k}^s$ mit $r = \dim G/G_u, s = \dim G_u$.

Beweis. [Sp, 14.2.7] □

1.5.20 Satz. *Es sei G eine zusammenhängende, auflösbare lineare algebraische Gruppe über k . Zerfällt G über k , so auch jeder über k definierte maximale Torus.*

Beweis. [Ro, Thm. 4] □

1.5.21 Satz. *Eine zusammenhängende, reductive k -Gruppe G ist genau dann zerfallend, wenn sie einen maximalen Torus besitzt, der über k definiert und zerfallend ist.*

Beweis. „Nur dann“. Es sei $B \subset G$ eine k -zerfallende Boreluntergruppe. Wähle nach 1.5.17 einen über k definierten maximalen Torus T in B . Nach dem letzten Satz ist T dann zerfallend. Außerdem ist auch maximaler Torus in G : denn wäre $T \subset T' \subset G$ ein weiterer Torus, so wäre $T' \subset B'$ in einer Boreluntergruppe enthalten. Aber $B = gB'g^{-1}$ mit einem $g \in G(\bar{k})$, und damit enthält B ein Konjugat von T' . Aber alle maximalen Tori in B haben die gleiche Dimension.

„Immer dann“. Besitzt G einen k -zerfallenden maximalen Torus T , so nach [Sp, 16.2.2] auch eine über k definierte Boreluntergruppe B , die T enthält. Deren unipotentes Radikal B_u ist über k definiert und zerfallend ([Sp, 16.1.1]). Die Abbildung $T \times B_u \rightarrow B$ ist ein Isomorphismus von k -Varietäten ([Sp, 6.3.5]), insbesondere wird B von T und B_u erzeugt und ist damit selbst k -zerfallend ([Ro, Cor. zu Thm. 2]). □

1.5.22 Korollar. *Jede zusammenhängende, reductive Gruppe über einem separabel abgeschlossenen Körper zerfällt.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß sie einen zerfallenden maximalen Torus besitzt; aber jeder Torus über einem separabel abgeschlossenen Körper zerfällt ([Sp, 13.1.1]). □

Der Rest dieses Abschnitts ist Rationalitätsfragen der Bruhat-Zerlegung gewidmet.

1.5.23 Lemma. *Es sei G zusammenhängende, zerfallende reductive k -Gruppe. Es sei $T \subset G$ ein über k (definierter und) zerfallender maximaler Torus. Dann besitzt die Weylgruppe $W(G, T) = N_G(T)/Z_G(T)$ ein Repräsentantensystem in $G(k)$.*

Beweis. [Sp, S. 270]. □

1.5.24 Korollar. *Es sei G eine zusammenhängende, zerfallende reductive k -Gruppe. Wähle einen über k (definierten und) zerfallenden maximalen Torus T und eine k -zerfallende Boreluntergruppe $B \supset T$. Dann sind die Doppelnebenklassen $C(w)$, $[w] \in W(G, T)$, über k definiert, ebenso die Isomorphismen von Varietäten $\mathbb{A}^h \times B \rightarrow C(w)$.*

Beweisskizze. Es bleibt nur die Aussage über die Isomorphismen zu zeigen. Diese erkennt man aber an der expliziten Gestalt der Isomorphismen, wie sie in [Sp, 8.3.6] angegeben ist: dort treten im Wesentlichen (nach dem Lemma über k wählbare) Repräsentanten von Elementen der Weylgruppe auf, außerdem gewisse Morphismen $\mathbb{G}_a \rightarrow G$. Letztere können jedoch nach [Bor, 18.7] ebenfalls als über k definiert angenommen werden. □

1.5.25 Satz. *Es sei k eine zusammenhängende, zerfallende reductive k -Gruppe. Dann gibt es eine offene Überdeckung $G = \bigcup_i U_i$ (als k -Schema), so daß jedes U_i als k -Schema isomorph ist zu $\mathbb{A}_k^h \times_k \mathbb{G}_{m,k}^r$.*

Beweis. Wähle einen k -zerfallenden maximalen Torus und eine k -zerfallende Boreluntergruppe $B \supset T$. Die große Zelle $C(w_0) \xrightarrow{\sim} G$ ist als k -Varietät isomorph zu $\mathbb{A}^h \times B \cong \mathbb{A}^h \times \mathbb{A}^r \times \mathbb{G}_{m,k}^s$ mit $r = \dim G/G_u$, $s = \dim G_u$. Wir müssen nur zeigen, daß die $G(k)$ -Translate von $C(w_0)$ das Schema G überdecken; aber bereits die $wC(w_0)$ mit $[w] \in W(G, T)$ überdecken $G(\bar{k})$, und die Repräsentanten w lassen sich in $G(k)$ wählen. \square

2 Torseure und die Serre–Grothendiecksche Vermutung

2.1 Faserbündel, Torseure und Kohomologie

Die allgemeine Theorie von Faserbündeln und Hauptfaserbündeln (Torseuren), also Sätze über Twisting, Erweiterung und Restriktion der Strukturgruppe usw., behandeln wir im abstrakten Kontext von Garben auf einem Situs. Dieser abstrakte Zugang ist zum einen sehr allgemein (der Fall von Schematorseuren oder auch klassischen Faserbündeln der Topologie ist in dieser Situation über die Yoneda-Einbettung enthalten); sein entscheidender Vorteil ist jedoch, daß Garben und ihre Morphismen sehr viel leichter zu konstruieren sind als etwa topologische Räume oder gar Schemata und deren Morphismen. Im Wesentlichen übertragen wir einen Teil von Serres Exposé [Se] in die Sprache von Garben.

2.1.1 Faserbündel und Torseure von Garben

Es sei $\mathbf{S} = \mathbf{C}_E$ ein Situs (beispielsweise der Situs der topologischen Räume mit der üblichen Topologie oder auch $\mathbf{S} = (\mathbf{Sch}/\mathbf{S})_{\text{ét}}$). Es sei $\mathcal{X} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{S})$ eine Garbe. Eine \mathcal{X} -Garbe ist einfach eine Garbe $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ über \mathcal{X} . Ist \mathcal{E} eine \mathcal{X} -Garbe und $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ein Morphismus, so bezeichnen wir mit $f^*\mathcal{E}$ den Pullback $\mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$. Ist \mathcal{F} eine weitere Garbe, so nennen wir die \mathcal{X} -Garbe $\mathcal{X} \times \mathcal{F}$ das *triviale Bündel mit typischer Faser \mathcal{F}* .

Definition. Eine \mathcal{X} -Garbe $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ heißt *Faserbündel mit typischer Faser $\mathcal{F} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{S})$* , wenn es einen Epimorphismus $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ gibt, so daß $\mathcal{E}' = f^*\mathcal{E}$ isomorph ist zum trivialen Bündel über \mathcal{X}' mit typischer Faser \mathcal{F} , so daß es also einen Isomorphismus von \mathcal{X}' -Garben (eine „Trivialisierung“) $\mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \cong \mathcal{X}' \times \mathcal{F}$ gibt.

Unter einem *Schnitt* eines Faserbündels $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ verstehen wir einen \mathcal{X} -Morphismus $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$, also ein Rechtsinverses zu $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$.

Es sei nun \mathcal{G} eine Garbe von Gruppen. Eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{G} -Aktion ist eine Garbe \mathcal{E} mit einer \mathcal{G} -Operation $\mathcal{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$ zusammen mit einem Morphismus $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$, der äquivariant bezüglich der trivialen \mathcal{G} -Operation auf \mathcal{X} ist, so daß also $\pi(e.g) = \pi(e)$ für alle $e \in \mathcal{E}(X)$, $g \in \mathcal{G}(X)$ ist. Ein Morphismus von \mathcal{X} -Garben mit \mathcal{G} -Aktion ist auf die offensichtliche Art erklärt. Die Tatsache, daß ein Pullback mittels $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ Garben mit \mathcal{G} -Aktion erhält, ermöglicht die folgende

Definition. Ein \mathcal{G} -Torseur oder \mathcal{G} -Hauptfaserbündel über \mathcal{X} ist eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{G} -Aktion $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$, für die es einen Epimorphismus $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ gibt, so daß $f^*\mathcal{E} = \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$ als \mathcal{X}' -Garbe mit \mathcal{G} -Aktion isomorph ist zu $\mathcal{X}' \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}'$ mit der natürlichen \mathcal{G} -Aktion (dem sogenannten „trivialen \mathcal{G} -Bündel“).

Ein \mathcal{G} -Hauptfaserbündel ist also insbesondere ein Faserbündel mit typischer Faser \mathcal{G} .

Sind $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}$ Epimorphismen, so ist $\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'' \rightarrow \mathcal{X}$ ein Epimorphismus, der beide majorisiert. Dies bedeutet beispielsweise, daß man zwei Faserbündel über \mathcal{X} „gleichzeitig“ trivialisieren kann. Eine typische Anwendung dieser Beobachtung ist:

2.1.1 Proposition. Jeder Morphismus von \mathcal{G} -Torseuren über \mathcal{X} ist invertierbar. (Die Kategorie der \mathcal{G} -Torseure über \mathcal{X} ist also ein Gruppoid.)

Beweis. Da man zwei Torseure stets gleichzeitig trivialisieren kann, können wir uns nach Abstiegs-
theorie (1.4.11) auf den Fall trivialer Torseure beschränken; dieser ist aber enthalten im nächsten Lemma. \square

2.1.2 Lemma. Es sei \mathcal{G} eine Gruppengarbe und \mathcal{X} eine Garbe. Dann gibt es einen Isomorphismus von Monoiden

$$\text{End}_{\mathcal{X}\text{-Garbe mit } \mathcal{G}\text{-Aktion}}(\mathcal{X} \times \mathcal{G}) \cong \mathcal{G}(\mathcal{X}),$$

wobei $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ die Gruppe $\text{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ (mit punktweiser Multiplikation) bezeichnet.⁽ⁱ⁾ Insbesondere ist jeder Endomorphismus von $\mathcal{X} \times \mathcal{G}$ invertierbar.

Beweis. Ist $f : \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ gegeben, so definiere $\varphi_f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ durch $f(x, 1_G) = (x, \varphi_f(x))$. Ist umgekehrt φ gegeben, so definiere f_φ durch $f_\varphi(x, g) := (x, \varphi(x) \cdot g)$. Man rechnet ohne Mühe nach, daß auf diese Art wohldefinierte inverse Bijektionen gegeben sind. Für Morphismen $\psi, \varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}$ gilt außerdem

$$f_\psi \circ f_\varphi(x, g) = f_\psi(x, \varphi(x) \cdot g) = (x, \psi(x) \cdot \varphi(x) \cdot g) = (x, (\psi \cdot \varphi)(x) \cdot g) = f_{\psi \cdot \varphi}(x, g),$$

also erhält diese Identifikation Produkte. Da zur konstanten Abbildung $x \mapsto 1_G$ außerdem offensichtlich die Identität von $\mathcal{X} \times \mathcal{G}$ gehört, ist sie tatsächlich ein Isomorphismus von Monoiden. \square

2.1.3 Proposition. Für eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{G} -Aktion $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. \mathcal{E} ist \mathcal{G} -Torseur.
2. $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ ist ein Epimorphismus, und der Morphismus $\mathcal{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E}, (e, g) \mapsto (e, e \cdot g)$ ist invertierbar.

Beweis. 1. \implies 2. Nach Abstiegs-
theorie können wir annehmen, daß $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ trivial ist. Aber dann ist $\mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ offensichtlich surjektiv, und $\mathcal{E} \times \mathcal{G} = \mathcal{X} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ ist der Morphismus $(x, g, g') \mapsto (x, g, gg')$, der offensichtlich invertierbar ist.

2. \implies 1. Durch Basiswechsel mit $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ erhalten wir aus \mathcal{E} das Bündel $\mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, (e, e') \mapsto e$, auf dem \mathcal{G} operiert vermöge $(e, e') \cdot g = (e, e' \cdot g)$. Man überzeugt sich dann schnell davon, daß der Isomorphismus von Garben $\mathcal{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E}$ tatsächlich ein Isomorphismus von \mathcal{G} -Bündeln über \mathcal{E} ist. \square

Ist \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} , so ist $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ ein Epimorphismus, der \mathcal{E} trivialisiert. Dies wird beim Studium von Torseuren über glatten oder endlichen Gruppen eine Rolle spielen, vgl. 2.1.23 und den Beweis von 2.4.2.

2.1.4 Beispiel. Es sei \mathcal{G} eine Gruppengarbe und $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ eine Untergruppe. Dann ist \mathcal{G} ein \mathcal{H} -Torseur über \mathcal{G}/\mathcal{H} (mit der natürlichen Rechtsoperation von \mathcal{H} auf \mathcal{G}).

Beweis. Wir prüfen die Bedingungen der Proposition nach. Natürlich ist $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ ein Epimorphismus, und die Invertierbarkeit des Morphismus $\mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \times_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \mathcal{G}, (g, h) \mapsto (g, g \cdot h)$ rechnet man leicht nach (vgl. auch Satz 1.5.3). (Da der Garbifizierungsfunktor α mit endlichen direkten Limites vertauscht, können wir zum Beweis statt \mathcal{G}/\mathcal{H} die Prägarbe $X \mapsto \mathcal{G}(X)/\mathcal{H}(X)$ verwenden.) \square

⁽ⁱ⁾Man beachte die suggestive Notation: ist $\mathcal{X} = \underline{X}$ darstellbar, so ist $\mathcal{G}(\mathcal{X}) = \mathcal{G}(X)$ nach dem Lemma von Yoneda.

Sei wieder \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} . Die Operation $\mathcal{E} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}$ induziert, für jeden Morphismus $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$, eine Operation $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E}) \times \mathcal{G}(\mathcal{Y}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$, wobei wir wieder $\mathcal{G}(\mathcal{Y}) := \text{Hom}(\mathcal{Y}, \mathcal{G})$ schreiben. Die Proposition zeigt dann, daß die Abbildung $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E}) \times \mathcal{G}(\mathcal{Y}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E}) \times \text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ invertierbar ist. Das bedeutet:

2.1.5 Korollar. Für jede \mathcal{X} -Garbe $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ ist $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ entweder leer oder ein $\mathcal{G}(\mathcal{Y})$ -Torseur im mengentheoretischen Sinne.

2.1.6 Proposition. Es sei \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} und $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ ein beliebiger Morphismus. Genau dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E})$ nichtleer, wenn der Pullback von \mathcal{E} nach \mathcal{Y} trivial ist.

Beweis. Wegen $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E}) = \text{Hom}_{\mathcal{Y}}(\mathcal{Y}, \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{Y})$ können wir durch einen Basiswechsel annehmen, daß $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ ist, und müssen nur zeigen: ein Torseur $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ ist genau dann trivial, wenn er einen Schnitt besitzt. Der triviale Torseur $\mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ besitzt den Schnitt $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{G}, x \mapsto (x, 1)$. Ist umgekehrt $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$ ein \mathcal{X} -Morphismus, so definiert $\mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E}, (x, g) \mapsto \varphi(x).g$, einen Morphismus von \mathcal{G} -Torseuren über \mathcal{X} , also nach 2.1.1 einen Isomorphismus. \square

2.1.2 Konstruktion von Faserbündeln durch Twisting mit Torseuren

Ist \mathcal{E} eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{G} -Aktion, so erhalten wir durch Ausdividieren der \mathcal{G} -Aktion eine \mathcal{X} -Garbe $\mathcal{E}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$. Diese Konstruktion ist funktoriell bezüglich Morphismen von \mathcal{X} -Garben mit \mathcal{G} -Aktion.

2.1.7 Proposition. Es sei \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} . Dann ist der natürliche Morphismus $\mathcal{E}/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$ invertierbar.

Beweis. Da Faktorisieren nach \mathcal{G} mit Pullback vertauscht (dies folgt etwa aus Lemma 1.4.1), können wir nach Abstiegstheorie annehmen, daß \mathcal{E} der triviale \mathcal{G} -Torseur ist; aber dann ist die Aussage klar. \square

Definition. Es sei \mathcal{E} eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{G} -Aktion. Es sei weiter \mathcal{F} eine Garbe, auf der \mathcal{G} von links operiert. Dann bezeichnet $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ die \mathcal{X} -Garbe $(\mathcal{E} \times \mathcal{F})/\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$, wobei $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{G} -Aktion ist durch $(e, f).g := (e.g, g^{-1}.f)$.

Diese Konstruktion ist offenbar funktoriell in \mathcal{E} und in \mathcal{F} (letzteres bezüglich \mathcal{G} -äquivarianter Morphismen). Ist $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ der triviale \mathcal{G} -Torseur, so haben wir einen natürlichen Isomorphismus von \mathcal{X} -Garben $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F} \cong \mathcal{X} \times \mathcal{F}, [(x, g), f] \mapsto (x, g.f)$, was man suggestiv notieren kann als $(\mathcal{X} \times \mathcal{G}) \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F} \cong \mathcal{X} \times \mathcal{F}$. Insbesondere ist also $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ das triviale Bündel mit typischer Faser \mathcal{F} auf \mathcal{X} . Da der Funktor $_ \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ außerdem mit Pullback der Basis vertauscht, haben wir gezeigt:

2.1.8 Proposition. Ist \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} , so ist $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ Faserbündel mit typischer Faser \mathcal{F} .

Man sagt, $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ entstehe durch Twisting von \mathcal{F} mit \mathcal{G} .

2.1.9 Beispiel. Es sei $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{G}$ eine Kette von Untergruppengarben. Dann ist $\mathcal{G}/\mathcal{H}_1$ ein Faserbündel über $\mathcal{G}/\mathcal{H}_2$ mit typischer Faser $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1$.

Beweis. Nach Beispiel 2.1.4 ist \mathcal{G} ein \mathcal{H}_2 -Torseur über $\mathcal{G}/\mathcal{H}_2$. Wir konstruieren inverse Isomorphismen $\mathcal{G} \times^{\mathcal{H}_2} (\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1) \cong \mathcal{G}/\mathcal{H}_1$ von Garben über $\mathcal{G}/\mathcal{H}_2$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \times^{\mathcal{H}_2} (\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_1) &\leftrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}_1 \\ [g, [h_2]] &\mapsto [gh_2] \\ [g, [1]] &\mapsto [g]. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich ohne Mühe davon, daß beide Morphismen wohldefiniert und invers zueinander sind sowie Morphismen von Bündeln über \mathcal{G}/H_2 . \square

2.1.10 Proposition. *Der Funktor $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} _$ von den Garben mit \mathcal{G} -Operation in die Faserbündel über \mathcal{X} vertauscht mit Produkten. (Dabei ist das Produkt zweier Faserbündel einfach das Faserprodukt über \mathcal{X} .)*

Beweis. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ zwei Garben mit \mathcal{G} -Operation, so haben wir einen natürlichen Morphismus $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{F} \times \mathcal{F}') \rightarrow (\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}) \times_{\mathcal{X}} (\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}')$, $[e, (f, f')] \mapsto ([e, f], [e, f'])$. Um zu zeigen, daß dieser invertierbar ist, können wir nach dem Abstiegslemma annehmen, daß $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ trivialer Torseur ist; aber dann wird der Morphismus einfach zur üblichen Identifikation $\mathcal{X} \times (\mathcal{F} \times \mathcal{F}') \xrightarrow{\cong} (\mathcal{X} \times \mathcal{F}) \times_{\mathcal{X}} (\mathcal{X} \times \mathcal{F}')$. \square

Operiert die Gruppe \mathcal{G} auf sich selbst durch Konjugation, so wird die Produktabbildung $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ kompatibel mit der \mathcal{G} -Operation; ebenso die Inversenbildung $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ und die Inklusion $\star \rightarrow \mathcal{G}$ des neutralen Elementes. Da außerdem $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \star \cong \mathcal{E}/\mathcal{G} \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}$ ist, erhalten wir aus der Proposition:

2.1.11 Satz. *Ist $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ ein \mathcal{G} -Torseur, und operiert \mathcal{G} auf sich selbst durch Konjugation, so ist $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{G}$ ein Gruppenobjekt in der Kategorie der Garben über \mathcal{X} .*

Im Falle $\mathcal{X} = \star$ bedeutet das:

2.1.12 Korollar. *Ist \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur (über dem finalen Objekt \star), und operiert \mathcal{G} auf sich selbst durch Konjugation, so ist $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{G}$ wieder eine Gruppengarbe.*

Definition. Diese „mit \mathcal{E} getwistete Version von \mathcal{G} “ bezeichnet man mit $\mathcal{E}(\mathcal{G})$.

Eine Anwendung ist das Twisten von algebraischen Gruppen über einem Körper mit Galoiskohomologieklassen, vgl. etwa [Gi].

2.1.3 Erweiterung und Reduktion der Strukturgruppe

Operiert eine Gruppe \mathcal{H} von rechts auf \mathcal{F} , kompatibel mit der \mathcal{G} -Linksaktion, so induziert diese Operation eine Rechtsoperation von \mathcal{H} auf $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$, die $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$ zu einer \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{H} -Aktion macht.

Der wichtigste Fall ist der folgende: ist ein \mathcal{G} -Torseur \mathcal{E} und ein Homomorphismus von Gruppengarben $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ gegeben, so ist $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{H} -Operation.

2.1.13 Proposition (Erweiterung der Strukturgruppe). *In dieser Situation ist $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{H}$ ein \mathcal{H} -Torseur über \mathcal{X} .*

Beweis. Da die Konstruktion mit Pullback vertauscht, können wir $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ als trivial annehmen. Dann ist aber $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{H} = \mathcal{X} \times \mathcal{H}$, und das ist der triviale \mathcal{H} -Torseur. \square

2.1.14 Proposition (Kürzungsregel). *Es sei \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} , $\varphi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Homomorphismus von Gruppengarben und \mathcal{F} eine Garbe mit \mathcal{H} -Linksaktion. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus von Faserbündeln $(\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{H}) \times^{\mathcal{H}} \mathcal{F} \cong \mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F}$, $[[e, 1_H], f] \mapsto [e, f]$, wobei \mathcal{G} vermöge φ auf \mathcal{F} operiert.*

Beweisskizze. Betrachte die Abbildung $\mathcal{E} \times \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{H}) \times^{\mathcal{H}} \mathcal{F}$, $(e, f) \mapsto [[e, 1_{\mathcal{H}}], f]$. Diese ist offenbar ein \mathcal{X} -Morphismus, und sie ignoriert die \mathcal{G} -Operation auf der linken Seite, denn

$$\begin{aligned} (e, f) \cdot g &= (e \cdot g, \varphi(g)^{-1} \cdot f) \mapsto [[e \cdot g, 1_{\mathcal{H}}], \varphi(g)^{-1} \cdot f] = [[e \cdot g, 1_{\mathcal{H}}] \cdot \varphi(g)^{-1}, f] \\ &= [[e, \varphi(g)^{-1}], f] = [[e, 1_{\mathcal{H}}], f]. \end{aligned}$$

Also erhalten wir einen Morphismus $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \mathcal{H}) \times^{\mathcal{H}} \mathcal{F}$ von Bündeln über \mathcal{X} . Um zu zeigen, daß dieser invertierbar ist, kann man nach dem Abstiegslemma durch Basiswechsel annehmen, daß $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ trivial ist. Aber dann überzeugt man sich leicht, daß die von uns konstruierte Abbildung gerade der kanonische Isomorphismus zwischen

$$\begin{aligned} (\mathcal{X} \times \mathcal{G}) \times^{\mathcal{G}} \mathcal{F} &\cong \mathcal{X} \times \mathcal{F} \quad \text{und} \\ ((\mathcal{X} \times \mathcal{G}) \times^{\mathcal{G}} \mathcal{H}) \times^{\mathcal{H}} \mathcal{F} &\cong (\mathcal{X} \times \mathcal{H}) \times^{\mathcal{H}} \mathcal{F} \cong \mathcal{X} \times \mathcal{F} \end{aligned}$$

ist. □

2.1.15 Lemma. *Es sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ eine Untergruppengarbe und \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} . Der Morphismus $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$, $e \mapsto [e, [1]]$, macht \mathcal{E} zu einem \mathcal{H} -Torseur über $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$.*

Beweis. Der Morphismus sieht die \mathcal{H} -Operation auf \mathcal{E} nicht, denn $e \cdot h \mapsto [e \cdot h, [1]] = [e, [h]] = [e, [1]]$, also haben wir eine \mathcal{X} -Garbe mit \mathcal{H} -Rechtsaktion.

Falls $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G}$ trivial ist, haben wir $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \cong \mathcal{X} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H})$, $[(x, g), [g']] \mapsto (x, [gg'])$. Der Morphismus $\mathcal{E} = \mathcal{X} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H})$ ist dann gegeben durch $(x, g) \mapsto (x, [g])$. Aber dies ist der Pullback des \mathcal{H} -Torseurs $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ nach $\mathcal{X} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H})$.

Im allgemeinen Fall können wir durch Basiserweiterung $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ zu einem trivialen Torseur \mathcal{E}' übergehen; dabei verwenden wir, daß Twisting mit Basiserweiterung vertauscht und Pullbacks Epimorphismen erhalten. □

2.1.16 Satz (Reduktion der Strukturgruppe). *Es sei $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ eine Untergruppengarbe. Dann ist ein \mathcal{H} -Torseur über \mathcal{X} „dasselbe“ wie ein \mathcal{G} -Torseur \mathcal{E} zusammen mit einem Schnitt des Faserbündels $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{X}$.*

Genauer haben wir eine Äquivalenz von Kategorien, wobei ein Morphismus von \mathcal{G} -Torseuren mit Schnitten ein Morphismus von \mathcal{G} -Torseuren $\tau : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ ist, so daß das induzierte Diagramm von Schnitten

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{X} & \\ & \swarrow & \searrow \\ \mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) & \xrightarrow{\tau \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})} & \mathcal{E}' \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \end{array}$$

kommutiert.

Außerdem vertauscht diese Äquivalenz mit Basiswechseln $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$, und zum trivialen \mathcal{H} -Torseur korrespondiert der Schnitt $\mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{X} \times \mathcal{G}) \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \cong \mathcal{X} \times \mathcal{G}/\mathcal{H}$ mit $x \mapsto (x, [1])$.

Beweisskizze. Sei \mathcal{E}_0 ein \mathcal{H} -Torseur über \mathcal{X} . Setze $\mathcal{E} := \mathcal{E}_0 \times^{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ als \mathcal{G} -Torseur; nach der Kürzungsregel gilt dann $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \cong \mathcal{E}_0 \times^{\mathcal{H}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$. Die Linksoperation von \mathcal{H} auf \mathcal{G}/\mathcal{H} fixiert aber die Klasse des neutralen Elements, so daß wir eine Einbettung von \mathcal{X} -Garben mit \mathcal{G} -Aktion $\mathcal{E}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}_0 \times \mathcal{G}/\mathcal{H}$, $e \mapsto (e, [1])$ erhalten. Ausdividieren der \mathcal{H} -Aktion liefert eine Einbettung von \mathcal{X} -Garben $\mathcal{E}_0/\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{E}_0 \times^{\mathcal{H}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \cong \mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$. Aber $\mathcal{E}_0/\mathcal{H} \cong \mathcal{X}$, also haben wir einen Schnitt $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$.

Sei umgekehrt \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur, und es sei ein \mathcal{X} -Morphismus $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$ gegeben. Nach dem Lemma definiert \mathcal{E} einen \mathcal{H} -Torseur über $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H})$; diesen können wir mit Hilfe des gegebenen Schnitts zurückziehen zu einem \mathcal{H} -Torseur über \mathcal{X} .

Wir überlassen dem Leser die Überprüfung, daß beide Konstruktionen invers zueinander sind, und die der restlichen Aussagen. \square

2.1.17 Bemerkung. Ist im Satz speziell $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ sogar normal, also $\overline{\mathcal{G}} := \mathcal{G}/\mathcal{H}$ eine Garbe von Gruppen, so ist $\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} \overline{\mathcal{G}}$ ein $\overline{\mathcal{G}}$ -Torseur über \mathcal{X} . Die Menge der Schnitte dieses Torseurs ist nach 2.1.5 ein (möglicherweise leerer) $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X})$ -Torseur im mengentheoretischen Sinne. Der Satz liefert dann eine Rechtsoperation von $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X})$ auf der Kategorie der \mathcal{H} -Torseure über \mathcal{X} , wobei zwei solche Torseure $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}'_0$ genau dann in der gleichen $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X})$ -Bahn liegen, wenn $\mathcal{E}_0 \times^{\mathcal{H}} \mathcal{G} \cong \mathcal{E}'_0 \times^{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ ist.

2.1.4 Die Kohomologiesequenz

Einige der Ergebnisse der letzten Abschnitte lassen sich besonders prägnant (wenn auch weniger explizit) durch exakte Sequenzen gewisser Kohomologiemengen ausdrücken.

Es sei $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ die Menge der Isomorphieklassen von \mathcal{G} -Torseuren über \mathcal{X} und $\text{Fib}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ die Menge der Isomorphieklassen von Faserbündeln über \mathcal{X} mit typischer Faser \mathcal{F} . Beides sind (durch die trivialen Torseure bzw. Bündel) punktierte Mengen. Wir haben eine Vergrößerungsabbildung $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Fib}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$, und Tors und Fib sind vermöge Basiswechsels kontravariant funktoriell in \mathcal{X} .

Operiert \mathcal{G} von links auf \mathcal{F} , so liefert Twisting eine punktierte Abbildung $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Fib}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Ist insbesondere $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Gruppenhomomorphismus, so faktorisiert $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Fib}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ kanonisch über $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$.

Sei nun $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ eine Untergruppengarbe. Ein Morphismus $\mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{H})$ liefert einen Schnitt des trivialen Faserbündels $\mathcal{X} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{X}$ und damit nach dem Satz über die Reduktion der Strukturgruppe einen \mathcal{H} -Torseur \mathcal{E}_0 (für den $\mathcal{E}_0 \times^{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ nach Konstruktion trivial ist). Diese Konstruktion liefert die Abbildung $(\mathcal{G}/\mathcal{H})(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ in der folgenden

2.1.18 Proposition (Exakte Kohomologiesequenz). *Die Sequenz*

$$1 \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{X}) \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{H})(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \rightarrow \text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Fib}(\mathcal{X}, \mathcal{G}/\mathcal{H})$$

ist im folgenden Sinne exakt: in den Gruppen $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ und $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ stimmen wie üblich Kern und Bild überein; in $(\mathcal{G}/\mathcal{H})(\mathcal{X})$ und $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ ist das Bild der ankommenden Abbildung genau das Urbild des trivialen Elements bei der ausgehenden Abbildung, und in $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ ist das Bild der ankommenden Abbildung das Urbild der Menge aller Faserbündel mit typischer Faser \mathcal{G}/\mathcal{H} , die einen Schnitt besitzen.

Ist $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ normal, so können wir $\text{Fib}(\mathcal{X}, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ durch $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}/\mathcal{H})$ ersetzen, und die Gruppe $(\mathcal{G}/\mathcal{H})(\mathcal{X})$ operiert derart (von rechts) auf $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$, daß die Orbits genau die Fasern der Erweiterungsabbildung $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{H}) \rightarrow \text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ sind.

Beweisskizze. Die Exaktheit in $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ ist klar; diejenige in $\mathcal{G}(\mathcal{X})$ folgt aus der Invertierbarkeit von $\mathcal{G} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{G} \times_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \mathcal{G}$, $(g, h) \mapsto (g, g.h)$. Für die Exaktheit in $(\mathcal{G}/\mathcal{H})(\mathcal{X})$ sei $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$ ein Morphismus. Nach Konstruktion induziert dieser den \mathcal{H} -Torseur $\mathcal{X} \times_{\mathcal{G}/\mathcal{H}} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$. Dieser ist genau dann trivial, wenn er einen Schnitt besitzt, wenn also f über \mathcal{G} faktorisiert.

Für die Exaktheit in $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{H})$ haben wir schon gesehen, daß die Komposition trivial ist. Ist aber ein \mathcal{H} -Torseur \mathcal{E}_0 über \mathcal{X} gegeben, so daß $\mathcal{E} := \mathcal{E}_0 \times^{\mathcal{H}} \mathcal{G}$ trivial ist, so finden wir einen Isomorphismus

$\mathcal{E} \times^{\mathcal{G}} (\mathcal{G}/\mathcal{H}) \cong \mathcal{X} \times (\mathcal{G}/\mathcal{H})$, und der Schnitt dieses Faserbündels ist gegeben durch einen Morphismus $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{G}/\mathcal{H}$. Die Exaktheit in $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ folgt unmittelbar aus dem Satz über die Reduktion der Strukturgruppe, und die übrigen Aussagen folgen aus 2.1.17. \square

Insbesondere sieht man, daß die \mathcal{H} -Torseure über \mathcal{X} in gewisser Weise den „Surjektivitätsdefekt“ von $\mathcal{G}(\mathcal{X}) \rightarrow (\mathcal{G}/\mathcal{H})(\mathcal{X})$ messen.

Ist \mathcal{G} eine Garbe von Gruppen, so kann die Mengen $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G})$ auch explizit durch Erzeugende und Relationen definieren. Dies wollen wir im nächsten Abschnitt tun.

2.1.5 Kohomologiemengen

Es sei \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} , dazu $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ein Epimorphismus, der \mathcal{E} trivialisiert, und es seien $p_i : \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}'$, $(x'_1, x'_2) \mapsto x'_i$, die Projektionen ($i = 1, 2$). Dann gibt es nach 2.1.6 einen \mathcal{X} -Morphismus $\varphi : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{E}$, und da $\text{Hom}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}', \mathcal{E})$ ein $\mathcal{G}(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}')$ -Torseur ist (2.1.5), finden wir ein eindeutig bestimmtes $g \in \mathcal{G}(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}')$ mit $(p_1^* \varphi) \cdot g = p_2^* \varphi$, wobei wir $p_1^* \varphi := \varphi \circ p_1$ schreiben. Dieses g erfüllt zudem eine nichttriviale Relation: Es seien $q_{12}, q_{13}, q_{23} : \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ die Projektionen. Dann gilt

$$p_2 q_{13} = p_2 q_{23}, \quad p_1 q_{23} = p_2 q_{12} \quad \text{und} \quad p_1 q_{12} = p_1 q_{13},$$

woraus sich ergibt:

$$\begin{aligned} (p_1 q_{13})^*(\varphi) \cdot q_{13}^*(g) &= (p_2 q_{13})^*(\varphi) \\ &= (p_2 q_{23})^*(\varphi) = (p_1 q_{23})^*(\varphi) \cdot q_{23}^*(g) \\ &= (p_2 q_{12})^*(\varphi) \cdot q_{23}^*(g) = (p_1 q_{12})^*(\varphi) \cdot q_{12}^*(g) \cdot q_{23}^*(g) \\ &= (p_1 q_{13})^*(\varphi) \cdot q_{12}^*(g) \cdot q_{23}^*(g). \end{aligned}$$

Die Elemente der Menge

$$\mathcal{Z}(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}') := \{g \in \mathcal{G}(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}') \mid q_{12}^*(g) \cdot q_{23}^*(g) = q_{13}^*(g)\}$$

nennen wir „Kozyklen“; dann ist also $g \in \mathcal{Z}(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}')$ ein Kozyklus. Ersetzen wir φ durch einen anderen Morphismus $\tilde{\varphi} : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{E}$, so finden wir ein eindeutig bestimmtes $h \in \mathcal{G}(\mathcal{X}')$ mit $\varphi = \tilde{\varphi} \cdot h$. Dann ist

$$\begin{aligned} \text{einerseits} \quad p_2^* \varphi &= p_2^*(\tilde{\varphi} \cdot h) = p_2^* \tilde{\varphi} \cdot p_2^* h, \\ \text{andererseits aber auch} \quad p_2^* \varphi &= (p_1^* \varphi) \cdot g = p_1^*(\tilde{\varphi} \cdot h) \cdot g = p_1^* \tilde{\varphi} \cdot p_1^* h \cdot g, \end{aligned}$$

also $p_2^* \tilde{\varphi} = p_1^* \tilde{\varphi} \cdot \tilde{g}$ mit $\tilde{g} = (p_1^* h) \cdot g \cdot (p_2^* h)^{-1}$. Für $g, \tilde{g} \in \mathcal{G}(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}')$ setzen wir $g \sim \tilde{g}$, falls es ein $h \in \mathcal{G}(\mathcal{X}')$ gibt mit $\tilde{g} = (p_1^* h) \cdot g \cdot (p_2^* h)^{-1}$. Offensichtlich ist \sim eine Äquivalenzrelation, und man rechnet schnell nach, daß alle zu einem Zyklus äquivalenten Elemente wieder Kozyklen sind.

Definition. Wir setzen $\check{H}^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}') := \mathcal{Z}(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}') / \sim$.

Für einen Epimorphismus $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ setzen wir

$$\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}') := \{[\mathcal{E}] \in \text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \mid \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \text{ ist trivial}\}.$$

Die obigen Überlegungen zeigen, daß wir eine natürliche wohldefinierte Abbildung $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}') \rightarrow \check{H}^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}')$ haben.

2.1.19 Proposition. *Diese Abbildung ist bijektiv.*

Beweisskizze. Wir konstruieren eine Umkehrabbildung. Sei also $g \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}') \subset \mathcal{G}(\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}')$ ein Kozyklus. Es sei $\mathcal{E}' = \mathcal{X}' \times \mathcal{G}$ der triviale \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X}' . Dann haben wir kanonische Identifikationen von $p_1^* \mathcal{E}' = \mathcal{E}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$ und $p_2^* \mathcal{E}' = \mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{E}'$ mit dem trivialen \mathcal{G} -Torseur über $\mathcal{X}' \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$. Sei, mit dieser Identifikation, $\sigma : p_1^* \mathcal{E}' \rightarrow p_2^* \mathcal{E}'$ der Isomorphismus mit $1 \mapsto g$. Die Kozykelbedingung für g garantiert, daß σ ein Abstiegsdatum für $\mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{X}'$ vermöge $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ ist. Wir finden also eine Garbe $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$ mit $\mathcal{E}' \cong \mathcal{E} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}'$. Man zeige nun, daß auch die \mathcal{G} -Operation auf \mathcal{E}' induziert ist von einer \mathcal{G} -Operation auf \mathcal{E} . Dann ist \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über \mathcal{X} . Man überlege sich nur noch, daß äquivalente Kozyklen zu isomorphen Torseuren führen, und daß beide Konstruktionen invers zueinander sind. \square

Wir überlassen dem Leser die Ausarbeitung der offensichtlichen Funktorialitätseigenschaften.

Definition. Wir setzen $\check{H}^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}) := \varinjlim \check{H}^1(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}')$, wobei der Limes über alle Epimorphismen einer Garbe \mathcal{X}' auf \mathcal{X} läuft.

Aus der Proposition folgt insbesondere, daß alle Übergangsabbildungen in diesem direkten Limes injektiv sind, und außerdem das

2.1.20 Korollar. *Wir haben eine natürliche Bijektion $\text{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \check{H}^1(\mathcal{X}, \mathcal{G})$.*

2.1.6 Darstellbare Faserbündel und Torseure

Es sei nun $\mathbf{S} = \mathbf{C}_E$ ein Situs, dessen Topologie gröber ist als die kanonische (d.h. jedes Objekt stellt eine Garbe dar). Korollar 1.3.16 ermöglicht eine andere Charakterisierung von Faserbündeln und Torseuren über einer *darstellbaren* Basis:

2.1.21 Proposition. *Ein Morphismus $\mathcal{E} \rightarrow \underline{X}$ ist genau dann ein Faserbündel zur Basis \mathcal{F} , wenn es eine Überdeckung $(Y_i \rightarrow X)_i$ gibt, so daß jedes $\mathcal{E} \times_{\underline{X}} Y_i$ als Y_i -Garbe isomorph ist zu $Y_i \times \mathcal{F} \rightarrow Y_i$, und man kann erreichen, daß diese Familie aus nur einem fppf-Morphismus besteht. Die analoge Aussage gilt für \mathcal{G} -Torseure.*

Beweisskizze. Der entscheidene Punkt ist die Tatsache, daß ein Faserbündel über einer disjunkten Vereinigung von Schemata genau dann trivial ist, wenn es über jedem Summanden trivial ist. Diese Beobachtung ist im Prinzip Folge einer Äquivalenz von Kategorien $\mathbf{Sch} / \coprod_i Y_i \cong \prod_i \mathbf{Sch} / Y_i$. \square

Außerdem können wir die Kohomologiemengen konkreter angeben. Sei nämlich $X \in \mathbf{C}$ ein Objekt und \mathcal{G} eine Gruppengarbe. Wir schreiben $\check{H}_E^1(X, \mathcal{G}) := \check{H}^1(\underline{X}, \mathcal{G})$ und $\check{H}_E^1(X, \mathcal{G}; \mathcal{U}) := \check{H}^1(\underline{X}, \mathcal{G}; \coprod_i Y_i)$ für eine Überdeckung $\mathcal{U} = (Y_i \rightarrow X)_i$. Ein Element von $\check{H}^1(\underline{X}, \mathcal{G}; \mathcal{U})$ wird dann repräsentiert durch eine Familie $(g_{ij})_{i,j}$ mit $g_{ij} \in \mathcal{G}(Y_i \times_{\underline{X}} Y_j) = \mathcal{G}(Y_i \times_X Y_j) \cong \mathcal{G}(Y_i \times_X Y_j)$ (Yoneda), für die $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$ in $\mathcal{G}(Y_i \times_X Y_j \times_X Y_k)$ gilt, wobei zwei Familien (g_{ij}) und (\tilde{g}_{ij}) genau dann äquivalent sind, wenn es eine Familie (h_i) , $h_i \in \mathcal{G}(Y_i)$, gibt mit $\tilde{g}_{ij} = h_i \cdot g_{ij} \cdot h_j^{-1}$ (wobei wir die notwendigen Restriktionsabbildungen nicht notieren). Nach der Proposition gilt dann

$$\check{H}_E^1(\underline{X}, \mathcal{G}) = \varinjlim_{\mathcal{U}} \check{H}_E^1(\underline{X}, \mathcal{G}; \mathcal{U}).$$

Ist klar, welche Topologie auf \mathbf{C} gemeint ist, schreiben wir auch \check{H}^1 anstelle von \check{H}_E^1 . Im Fall $\mathbf{C} = \mathbf{Sch}$ oder \mathbf{Sch} / S wollen wir Torseure und Kohomologie immer bezüglich der fppf-Topologie verstehen, wenn nichts anderes gesagt wird.

Ist $\mathcal{G} = \underline{G}$ darstellbar, so stellt sich die Frage, ob ein \mathcal{G} -Torseur über einem Objekt X möglicherweise ebenfalls wieder darstellbar ist. Im allgemeinen ist das nicht zu erwarten; im Fall von Schemakategorien gibt es jedoch gewisse Kriterien (vgl. [Mi80, III.4.3]), von denen für uns der folgende Satz relevant ist:

2.1.22 Satz. *Es sei S ein Schema, X ein S -Schema und $G \rightarrow S$ ein affines Gruppenschema. Dann ist jeder G -Torseur über X (d.h. jeder \underline{G} -Torseur über \underline{X} in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/S)_{\text{fppf}})$) darstellbar.*

Beweisskizze. Ein G -Torseur \mathcal{E} über X wird repräsentiert durch ein Element $[(g_{ij})] \in \check{H}^1(\underline{X}, \underline{G}; \mathcal{U})$, wobei $\mathcal{U} = (Y_i \rightarrow X)_i$ eine fppf-Überdeckung ist. Insbesondere ist $\mathcal{E} \times_X Y_i \cong Y_i \times_S G$, wird also durch das über Y_i affine Schema $Y_i \times_S G$ repräsentiert. Die g_{ij} liefern Automorphismen von $Y_i \times_X Y_j \times_S G$, die als Abstiegsdatum dienen, um nach 1.4.10 die $Y_i \times_S G$ zu einem X -Schema E zu verkleben. Auf diesem erhält man sofort die Struktur eines G -Torseurs und schließlich einen Isomorphismus von Torseuren $\underline{E} \cong \mathcal{E}$. \square

Ist insbesondere $G \rightarrow H$ ein Homomorphismus von S -Gruppenschemata, H affin, und E ein G -Torseur über S , so ist der H -Torseur $\underline{E} \times^{\underline{G}} \underline{H}$ dargestellt durch ein S -Schema, das wir $E \times^G H$ nennen wollen. (Man kann allgemeinere Darstellbarkeitssätze für Twisting beweisen, die wir jedoch nicht benötigen.)

In den für uns interessanten Fällen kann man bei der Untersuchung von Torseuren anstelle der fppf- die étale Topologie verwenden:

2.1.23 Satz. *Es sei S ein Schema, X ein S -Schema und G ein glattes affines Gruppenschema über S . Dann ist die natürliche Abbildung $\check{H}_{\text{ét}}^1(X, G) \rightarrow \check{H}_{\text{fppf}}^1(X, G)$ invertierbar, d.h. jeder fppf-Torseur unter G ist bereits lokal trivial in der étalen Topologie.*

Beweisskizze. Die Injektivität ist klar. Für die Surjektivität sei \mathcal{E} ein G -Torseur über X . Nach dem letzten Satz ist $\mathcal{E} = \underline{E}$ darstellbar. Der Morphismus $E \rightarrow X$ ist glatt und surjektiv: denn wählen wir einen fppf-Morphismus $X' \rightarrow X$, so daß $E \times_X X' \rightarrow X'$ trivial ist, so haben wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} E \times_X X' & \xrightarrow{\cong} & X' \times_S G \\ & \searrow & \swarrow \\ & X' & \end{array}$$

Aber $G \rightarrow S$ ist glatt und surjektiv, also auch $X' \times_S G \rightarrow X'$ und damit nach Abstiegstheorie auch $E \rightarrow X$. Nach 2.1.3 läßt E sich durch $E \rightarrow X$ trivialisieren, aber nach 1.2.16 können wir diese „glatte“ Trivialisierung zu einer étalen Trivialisierung verfeinern. \square

2.1.24 Bemerkung. *Das Argument, das im Beweis die Glattheit von $E \rightarrow X$ zeigt, läßt sich in vielen Situationen anwenden: ist $G \rightarrow S$ ein flaches, lokal endlich präsentierbares Gruppenschema und E ein (darstellbarer) G -Torseur über einem S -Schema X , so ererbt $E \rightarrow X$ die in der Abstiegstheorie auftretenden Eigenschaften von $G \rightarrow S$: ist also etwa G endlich über S , so ist auch E endlich über X .*

2.1.7 Torseure und Morphismen von Sitūs

Es sei $F : \mathbf{C}_E \rightarrow \mathbf{D}_F$ ein stetiger Funktor. Der Pushforward-Funktor $F_* : \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E) \rightarrow \mathbf{Shv}(\mathbf{D}_F)$ ist exakt, erhält also insbesondere Gruppengarben, Epimorphismen, Faserprodukte und Produkte. Das zeigt:

2.1.25 Proposition. *Ist \mathcal{E} ein \mathcal{G} -Torseur über $\mathcal{X} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)$, so ist $F_* \mathcal{E}$ ein $F_* \mathcal{G}$ -Torseur über $F_* \mathcal{X}$. Ist \mathcal{E} trivial, so auch $F_* \mathcal{E}$.*

Ein stetiger Funktor $F : \mathbf{C}_E \rightarrow \mathbf{D}_F$ induziert also für jeden Epimorphismus $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ eine natürliche Abbildung $\mathrm{Tors}(\mathcal{X}, \mathcal{G}; \mathcal{X}') \rightarrow \mathrm{Tors}(F_*\mathcal{X}, F_*\mathcal{G}; F_*\mathcal{X}')$.

Falls die Gruppengarbe \mathcal{G} ihrerseits Pullback einer Gruppengarbe ist, also $\mathcal{G} = F^*\mathcal{H}$ mit einer Gruppengarbe $\mathcal{H} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{D}_F)$ ist, läßt sich noch mehr aussagen: zunächst haben wir, da F_* linksadjungiert zu F^* ist, einen natürlichen Morphismus $F_*\mathcal{G} = F_*F^*\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Durch Erweiterung der Strukturgruppe erhalten wir damit eine Abbildung $\mathrm{Tors}(\mathcal{X}, F^*\mathcal{H}; \mathcal{X}') \rightarrow \mathrm{Tors}(F_*\mathcal{X}, F_*F^*\mathcal{H}; F_*\mathcal{X}') \rightarrow \mathrm{Tors}(F_*\mathcal{X}, \mathcal{H}; F_*\mathcal{X}')$.

2.1.26 Proposition. *Die Abbildung $\mathrm{Tors}(\mathcal{X}, F^*\mathcal{H}; \mathcal{X}') \rightarrow \mathrm{Tors}(F_*\mathcal{X}, \mathcal{H}; F_*\mathcal{X}')$ ist bijektiv.*

Beweis. Es genügt, die entsprechende Aussage für \check{H}^1 zu zeigen. Für jede \mathcal{X} -Garbe $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ gilt aber

$$\mathcal{H}(F_*\mathcal{Y}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(\mathbf{D}_F)}(F_*\mathcal{Y}, \mathcal{H}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Shv}(\mathbf{C}_E)}(\mathcal{Y}, F^*\mathcal{H}) = (F^*\mathcal{H})(\mathcal{Y}),$$

und diese Identifikation induziert eine Bijektionen $\mathcal{L}(\mathcal{X}, F^*\mathcal{H}; \mathcal{X}') \cong \mathcal{L}(F_*\mathcal{X}, \mathcal{H}; F_*\mathcal{X}')$ und weiter $\check{H}^1(\mathcal{X}, F^*\mathcal{H}; \mathcal{X}') \cong \check{H}^1(F_*\mathcal{X}, \mathcal{H}; F_*\mathcal{X}')$. Wir überlassen dem Leser die Überprüfung, daß diese Bijektion mit der uns interessierenden Abbildung übereinstimmt. \square

Es sei beispielsweise $f : X \rightarrow S$ ein Morphismus von Schemata und G ein S -Gruppenschema. Mit dem Vergißfunktork $i_f : \mathbf{Sch}/X \rightarrow \mathbf{Sch}/S$ und dem Pullbackfunktork $\alpha_f : \mathbf{Sch}/S \rightarrow \mathbf{Sch}/X$, $U \mapsto U \times_S X$, gilt dann wegen $(i_f)^* = (\alpha_f)_*$

$$\mathrm{Tors}_{(\mathbf{Sch}/X)_{\mathrm{fppf}}}(X, G \times_S X, \mathcal{X}') \cong \mathrm{Tors}_{(\mathbf{Sch}/S)_{\mathrm{fppf}}}(X, G, (i_f)_*\mathcal{X}')$$

für jeden Garbenepimorphismus $\mathcal{X}' \rightarrow \underline{X}$ in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/X)_{\mathrm{fppf}})$. Ist G glatt und affin über S , so interessieren uns nur darstellbare Garben $\mathcal{X}' = \underline{X}'$ mit einem fppf-Morphismus $X' \rightarrow X$, und daraus folgt, daß ein G -Torseur über X in \mathbf{Sch}/S dasselbe ist wie ein $G \times_S X$ -Torseur über X in \mathbf{Sch}/X .

2.2 Lokalisierung und Kohomologie

Es sei X ein Schema und G ein glattes, affines S -Gruppenschema. Ist $U \subset X$ eine offene Teilmenge, so erhalten wir auf natürliche Art eine Einschränkungabbildung $\check{H}_{\acute{e}t}^1(X, G) \rightarrow \check{H}_{\acute{e}t}^1(U, G)$. Dies definiert eine Prägarbe auf X im klassischen Sinne; die zu ihr assoziierte Garbe bezeichnen wir mit $\check{\mathcal{H}}_{\acute{e}t}^1(X, G)$. In diesem Abschnitt beweisen wir ein wichtiges technisches Resultat, nämlich die Beschreibung der Halme dieser Garbe. Es gilt nämlich:

2.2.1 Satz. *Es sei X ein S -Schema und G ein glattes, affines S -Gruppenschema. Ist $x \in X$, so ist die kanonische Abbildung $\check{\mathcal{H}}_{\acute{e}t}^1(X, G)_x \rightarrow \check{H}_{\acute{e}t}^1(\mathrm{Spec} \mathcal{O}_{X,x}, G)$ invertierbar.*

Die Aussage ist Spezialfall sehr viel allgemeinerer Resultate von Grothendieck über die Vertauschbarkeit étaler Kohomologie mit projektiven Limites von Schemata. Vergleiche dazu etwa [Mi80, III.1.16] oder in voller Allgemeinheit [SGA 4, Exp. VII, § 5].

Zum Beweis geben wir zunächst eine Charakterisierung endlich präsentierbarer Algebren über einem filtrierenden direkten Limes von Ringen (vgl. auch [EGA, IV.8.8]). Ist A ein Ring, so bezeichnen wir mit $\mathbf{Alg}_{\mathrm{e.p.}}(A)$ die Kategorie der endlich präsentierbaren A -Algebren. Jeder Ringhomomorphismus $A \rightarrow B$ liefert durch Basiswechsel einen Funktor $\mathbf{Alg}_{\mathrm{e.p.}}(A) \rightarrow \mathbf{Alg}_{\mathrm{e.p.}}(B)$.

2.2.2 Proposition. Es sei (A_i) ein filtrierendes System von Ringen und $A_\infty := \varinjlim_i A_i$. Dann ist der kanonische Funktor

$$\ell : \varinjlim_i \mathbf{Alg}_{\text{e.p.}}(A_i) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Alg}_{\text{e.p.}}(A_\infty)$$

$$[B_i \in \mathbf{Alg}_{\text{e.p.}}(A_i)] \mapsto B \otimes_{A_i} A_\infty$$

eine Äquivalenz von Kategorien, die mit Tensorprodukten vertauscht (die in $\varinjlim_i \mathbf{Alg}_{\text{e.p.}}(A_i)$ repräsentantenweise erklärt werden).

Beweis.

1. Der Funktor ist im Wesentlichen surjektiv: sei dazu B_∞ eine endlich präsentierbare A_∞ -Algebra. Wir können annehmen, daß $B_\infty = A_\infty[X_1, \dots, X_n]/(F_1, \dots, F_m)$ mit gewissen Polynomen F_j ist. Wegen $A_\infty[X_1, \dots, X_n] = \varinjlim_i (A_i[X_1, \dots, X_n])$ können wir annehmen, daß $F_1, \dots, F_m \in A_i[X_1, \dots, X_n]$ für ein gewisses i gilt.⁽ⁱⁱ⁾ Dann ist $B_i := A_i[X_1, \dots, X_n]/(F_1, \dots, F_m)$ eine endlich präsentierbare A_i -Algebra mit $B_i \otimes_{A_i} A_\infty \cong B_\infty$.
2. Um zu zeigen, daß der Funktor voll ist, genügt es zu zeigen: ist i fest, sind B_i, B'_i endlich präsentierbare A_i -Algebren und $\varphi : B_i \rightarrow B'_\infty = B' \otimes_{A_i} A_\infty$ ein Homomorphismus, so kann φ (evtl. nach Vergrößern von i) geliftet werden zu einem Homomorphismus $B_i \rightarrow B'_i$. Schreibe dazu $B_i = A_i[X_1, \dots, X_n]/(F_1, \dots, F_m)$. Nach Vergrößern von i lassen sich die $\varphi(X_j) \in B'_\infty$ nach B'_i liften, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_i[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\varphi_0} & B'_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_i & \xrightarrow{\varphi} & B'_\infty \end{array}$$

Dann verschwindet jedes $\varphi_0(F_j)$ in B'_∞ , und nach Vergrößern von i können wir annehmen, daß $\varphi_0(F_j)$ bereits in B'_i verschwindet. Dann faktorisiert aber $A_i[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B'_i$ über B_i , wie gewünscht.

3. Zu guter Letzt ist der Funktor auch treu: seien nämlich B_i, B'_i endlich erzeugte A_i -Algebren und $\varphi, \varphi' : B_i \rightarrow B'_\infty$ Homomorphismen, für die die induzierten Homomorphismen $B_\infty \rightarrow B'_\infty$ übereinstimmen. Dann stimmen auch beide Abbildungen $B_i \rightarrow B'_\infty$ überein. Sei B_i erzeugt von b_1, \dots, b_n . Nach Vergrößern von i können wir dann annehmen, daß bereits $\varphi(b_j) = \varphi'(b_j)$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt, und das bedeutet $\varphi = \varphi'$.

□

2.2.3 Proposition. Es sei A ein Ring und B eine endlich präsentierbare A -Algebra. Dann erhält der Funktor $\text{Hom}_{\text{Alg}_A}(B, _)$ beliebige projektive und filtrierende induktive Limites.

Beweisskizze. Für projektive Limites ist die Aussage trivial. Der Beweis für filtrierende induktive Limites geht vollkommen analog zum Beweis von 2. und 3. in der letzten Proposition. □

Wir sagen, ein Morphismus in $\varinjlim_i \mathbf{Alg}_{\text{e.p.}}(A_i)$ sei étale (standard-étale, flach, ...), wenn er einen Repräsentanten besitzt, der die entsprechende Eigenschaft hat.

⁽ⁱⁱ⁾Wir verwenden diese suggestive Ausdrucksweise, obwohl $A_i \rightarrow A_\infty$ natürlich im allgemeinen nicht injektiv ist. Gemeint ist: es gibt Polynome $\tilde{F}_1, \dots, \tilde{F}_m$ in $A_i[X_1, \dots, X_n]$, deren Bilder in $A_\infty[X_1, \dots, X_n]$ die F_1, \dots, F_m sind.

2.2.4 Proposition. Ein Morphismus $[\varphi_i] : [B_i] \rightarrow [B'_i]$ in $\varinjlim_i \mathbf{Alg}_{\mathbf{e.p.}}(A)$ ist genau dann étale, wenn $\ell[\varphi] = \varphi_\infty$ étale ist.

Vergleiche auch [EGA, IV.17.7.8]. Der Beweis reduziert sich im Wesentlichen auf das folgende

2.2.5 Lemma. Ein Morphismus $[\varphi_i] : [B_i] \rightarrow [B'_i]$ in $\varinjlim_i \mathbf{Alg}_{\mathbf{e.p.}}(A)$ ist genau dann standard-étale, wenn $\ell[\varphi] = \varphi_\infty$ standard-étale ist.

Beweis. Standard-étale Morphismen sind stabil unter Basiswechsel, also ist „nur dann“ trivial. Seien umgekehrt B_i, B'_i endlich präsentierbare A_i -Algebren und $\varphi : B \rightarrow B'$ ein Homomorphismus, so daß $\varphi_\infty : B_\infty \rightarrow B'_\infty$ standard-étale ist. Dann gibt es also Polynome $F, P \in B_\infty[X] = \varinjlim_i (B_i[X])$, so daß F unitär ist und F' invertierbar in $(B_\infty[X]/(F))_P$, und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & B_\infty & \\ & \swarrow & \searrow \varphi_\infty \\ (B_\infty[X]/(F))_P & \xrightarrow{\cong} & B'_\infty \end{array}$$

Durch Vergrößern von i können wir annehmen, daß F und P in $B_i[X]$ liegen, F dort unitär ist und F' in $C_i := (B_i[X]/(F))_P$ invertierbar. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \ell[B_i] & \\ & \swarrow & \searrow \varphi \\ \ell[C_i] & \xrightarrow{\cong} & \ell[B'_i]. \end{array}$$

Dieses liefert (evtl. nach weiterer Vergrößerung von i) einen Isomorphismus $[C_i] \xrightarrow{\cong} [B'_i]$ über $[B_i]$, aber $[B_i] \rightarrow [C_i]$ ist standard-étale. \square

Beweis der Proposition. Es ist wieder nur „immer dann“ zu zeigen. Es sei also $B_i \rightarrow B'_i$ ein Morphismus endlich präsentierbarer A_i -Algebren, so daß $B_\infty \rightarrow B'_\infty$ étale ist. Nach 1.2.11 finden wir dann Elemente $b_1, \dots, b_n \in B_\infty$ mit $(b_1, \dots, b_n) = (1)$ und Elemente $b'_1, \dots, b'_m \in B'_\infty$, so daß jedes $B_\infty \rightarrow (B'_\infty)_{b'_\ell}$ über ein $(B_\infty)_{b_k(\ell)}$ faktorisiert, und so daß die Abbildungen $(B_\infty)_{b_k(\ell)} \rightarrow (B'_\infty)_{b'_\ell}$ standard-étale sind. Durch Vergrößern von i können wir erreichen, daß alle $b_k \in B_i, b'_\ell \in B'_i$ sind, immer noch die Einheitsideale erzeugen und immer noch $B_i \rightarrow (B'_i)_{b'_\ell}$ über $(B_i)_{b_k(\ell)}$ faktorisiert. Nach der Proposition ist dann, nach einer weiteren Vergrößerung von i , jedes $(B_i)_{b_k(\ell)} \rightarrow (B'_i)_{b'_\ell}$ standard-étale. Dann ist aber, wieder nach 1.2.11, $B \rightarrow B'$ étale. \square

Gehen wir nun über zur speziellen Situation der Lokalisierung eines Rings nach einem Primideal:

2.2.6 Korollar. Es sei A ein Ring, \mathfrak{p} ein Primideal. Dann ist $[B] \in \varinjlim_{f \in A - \mathfrak{p}} \mathbf{Alg}_{\mathbf{e.p.}}(A_f)$ genau dann eine étale Überdeckung von $[A]_{\mathfrak{p}}$, wenn $B_{\mathfrak{p}}$ étale Überdeckung von $A_{\mathfrak{p}}$ ist.

Beweis. „Nur dann“ ist klar. Für „immer dann“ können wir nach der Proposition durch Verkleinern von A (d.h. Übergang zu einem A_f) ohne Einschränkung annehmen, daß B eine étale A -Algebra ist. Da $\text{Spec } B_{\mathfrak{p}} \rightarrow \text{Spec } A_{\mathfrak{p}}$ surjektiv ist, liegt insbesondere \mathfrak{p} im Bild von $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$. Dieses Bild ist aber offen, enthält also ein $\text{Spec } A_f$ mit $f \notin \mathfrak{p}$. Dann ist $A_f \rightarrow B_f$ eine étale Überdeckung. \square

Beweis von Satz 2.2.1. Wir können annehmen, daß $S = X = \text{Spec } A$ affin ist. Dann ist auch $G = \text{Spec } H$ affin, und H ist eine glatte Hopfalgebra über H , insbesondere endlich präsentierbar. Ein G -Torseur über A ist dann eine A -Algebra B zusammen mit einem Homomorphismus $B \rightarrow B \otimes_A H$ (nebst einigen Relationen), so daß es eine étale Überdeckung $A \rightarrow A'$ gibt mit einem (diese Relationen respektierenden) Isomorphismus $B \otimes_A A' \cong H \otimes_A A'$. Nach Abstiegstheorie ist dann auch B endlich präsentierbar.

Die vorangegangenen Propositionen zeigen dann zusammen, daß sich jeder H_p -Torseur B_p nach Verkleinerung von A zu einem H -Torseur B liften läßt, also die Surjektivität von $\lim_{f \notin p} \check{H}_{\text{ét}}^1(A_f, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(A_p, G)$, und ebenso die Injektivität. \square

2.2.7 Korollar. *Es sei X ein integrales S -Schema und G ein glattes affines Gruppenschema über S . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Jeder G -Torseur über X (in der étalen bzw. fppf-Topologie), der über einer offenen Teilmenge von X trivial ist, ist lokal trivial bezüglich der Zariskitopologie.*
2. *Für jeden Punkt $x \in X$ hat die Abbildung $\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathcal{O}_{X,x}, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(K(X), G)$ trivialen Kern.*

Die Serre–Grothendiecksche Vermutung besagt, daß die äquivalenten Aussagen des Korollars erfüllt sind, falls X eine glatte Varietät über einem Körper k und G eine reduktive algebraische Gruppe über k ist.

Für uns interessant ist auch noch eine weitere Situation:

2.2.8 Korollar. *Es sei (A_i) ein filtrierendes System von Ringen, $A_\infty = \varinjlim_i A_i$. Wenn $\text{Spec } A_\infty \rightarrow \text{Spec } A_i$ für alle i surjektiv ist, so ist $[B_i] \in \varinjlim_i \mathbf{Alg}_{\text{e.p.}}(A_i)$ genau dann étale Überdeckung von $[A_i]$, wenn B_∞ étale Überdeckung von A_∞ ist.*

Beweis. Wieder ist nur „immer dann“ zu zeigen, und wieder können wir annehmen, daß B_i eine étale A_i -Algebra ist. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B_\infty & \twoheadrightarrow & \text{Spec } A_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } B_i & \twoheadrightarrow & \text{Spec } A_i \end{array}$$

liest man jedoch sofort die Surjektivität von $\text{Spec } B_i \rightarrow \text{Spec } A_i$ ab. \square

Die Voraussetzung des Korollars ist insbesondere in folgender Situation erfüllt: es sei k ein Körper und A eine k -Algebra. Ist (K_i) ein filtrierendes System von Körpererweiterungen von k und $K_\infty = \varinjlim_i K_i = \bigcup_i K_i$, so ist für $A_i := A \otimes_k K_i$, $A_\infty := A \otimes_k K_\infty$, jeder Morphismus $\text{Spec } A_\infty \rightarrow \text{Spec } A_i$ surjektiv.

2.2.9 Satz. *Es sei k ein Körper, A eine k -Algebra und G ein glattes affines Gruppenschema über A . Ist (K_i) ein filtrierendes System von Körpererweiterungen von k , so ist die kanonische Abbildung*

$$\varinjlim_i \check{H}_{\text{ét}}^1(A_{K_i}, G) = \check{H}_{\text{ét}}^1(A_{K_\infty}, G),$$

invertierbar.

2.3 Exkurs: Berechnung von $\check{H}^1(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{GL}_n)$

2.3.1 Proposition (Hilbert 90). *Es sei A ein lokaler Ring, $X = \mathrm{Spec} A$. Dann ist $\check{H}_{\mathrm{fppf}}^1(X, \mathrm{GL}_n) = \{1\}$.*

Beweis. [Mi80, III.4.10] □

2.3.2 Korollar. *Für jedes Schema X gilt $\check{H}_{\mathrm{Zar}}^1(X, \mathrm{GL}_n) \xrightarrow{\cong} \check{H}_{\mathrm{\acute{e}t}}^1(X, \mathrm{GL}_n) \xrightarrow{\cong} \check{H}_{\mathrm{fppf}}^1(X, \mathrm{GL}_n)$.*

Beweis. Es ist jeweils nur die Surjektivität zu zeigen. Für die zweite Abbildung gilt sie allgemein für jedes glatte Gruppenschema. Für die erste folgt die Aussage aus der Proposition: denn nach Satz 2.2.1 bedeutet die Trivialität des Pullbacks eines GL_n -Torseurs E auf $\mathrm{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ genau, daß es eine offene Umgebung U von x gibt, auf der E trivial wird; also ist E lokal trivial bezüglich der Zariskitopologie. □

Da $\check{H}_{\mathrm{Zar}}^1(X, \mathrm{GL}_n)$ aber in natürlicher Bijektion steht zu den Isomorphieklassen von Vektorbündeln vom Rang n auf X (der in [Har, Ex. III.4.5] zitierte Beweis im Fall $n = 1$ funktioniert allgemein), können wir GL_n -Torseure (etwa in der étalen Topologie) als Vektorbündel auffassen. Dies wird in der Anwendung des Grothendieckschen Starrheitssatzes für Vektorbündel (Satz 3.3.1) auf Torseure eine wesentliche Rolle spielen, vgl. Satz 3.4.1.

Das Korollar erlaubt uns außerdem, nur $\check{H}^1(X, \mathrm{GL}_n)$ ohne Angabe der Topologie zu schreiben. Desweiteren kann man nun $\check{H}^1(X, \mathrm{GL}_n)$ berechnen, indem man die algebraischen Vektorbündel vom Rang n auf X klassifiziert. Im Fall, daß X die projektive Gerade über einem Körper ist, werden wir das in diesem Abschnitt durchführen.

2.3.3 Proposition. *Sei k ein Körper. Dann ist jedes Vektorbündel auf \mathbb{A}_k^1 trivial.*

Beweis. Vektorbündel auf \mathbb{A}_k^1 sind dasselbe wie endliche projektive Moduln über dem Polynomring $k[T]$. Solche sind als direkte Summanden freier Moduln torsionsfrei, aber torsionsfreie endliche Moduln über Hauptidealringen sind frei. □

Die gleiche Aussage gilt auch für Vektorbündel auf \mathbb{A}_k^d , wobei $d \geq 1$ beliebig ist – dies ist der Satz von Quillen–Suslin, den wir im Fall $|k| = \infty$ im letzten Kapitel mitbeweisen werden (3.6.7).

Das Schema \mathbb{P}_k^1 besteht aus zwei affinen Geraden $U = \mathrm{Spec} k[X]$ und $U' = \mathrm{Spec} k[X^{-1}]$, die entlang $V = \mathrm{Spec} k[X, X^{-1}]$ verklebt sind. Ein Vektorbündel E auf \mathbb{P}_k^1 ist nach der Proposition also sowohl auf U als auch auf U' trivial. Da Vektorbündel auf affinen Schemata dasselbe sind wie endliche projektive Moduln, ist E also bis auf Isomorphie gegeben durch einen Automorphismus von $k[X, X^{-1}]$ als $k[X, X^{-1}]$ -Modul, d.h. durch eine invertierbare Matrix $Q \in \mathrm{GL}_n(k[X, X^{-1}])$, und zwei solche Matrizen Q, Q' repräsentieren genau dann dieselbe Isomorphieklasse von Vektorbündeln, wenn es Matrizen $P \in \mathrm{GL}_n(k[X])$ und $R \in \mathrm{GL}_n(k[X^{-1}])$ gibt mit $Q' = PQR$. Dies beweist:

2.3.4 Proposition. *Für einen Körper k haben wir einen (in k natürlichen) Isomorphismus $\check{H}^1(\mathbb{P}_k^1, \mathrm{GL}_n) \cong \mathrm{GL}_n(k[X, X^{-1}]) / \sim$, wobei $Q' \sim Q$ genau dann gilt, wenn es $P \in \mathrm{GL}_n(k[X])$ und $R \in \mathrm{GL}_n(k[X^{-1}])$ gibt mit $Q' = PQR$.*

Es bleibt also die Aufgabe, invertierbare Matrizen über $k[X, X^{-1}]$ bis auf Äquivalenz im angegebenen Sinne zu klassifizieren.

2.3.5 Satz. Es sei k ein Körper, $n \geq 1$. Dann bilden die Matrizen

$$\begin{pmatrix} X^{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & X^{e_n} \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(k[X, X^{-1}])$$

mit ganzen Zahlen $e_1 \geq \dots \geq e_n$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\text{GL}_n(k[X, X^{-1}]) / \sim$.

2.3.6 Korollar (Klassifikation der Vektorbündel auf \mathbb{P}_k^1). Ist k ein Körper, so gilt

$$\check{H}^1(\mathbb{P}_k^1, \text{GL}_n) \cong \{(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^n \mid e_1 \geq \dots \geq e_n\}$$

mit trivialem Element $(0, \dots, 0)$.

2.3.7 Korollar. Es sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung. Dann ist $\check{H}^1(\mathbb{P}_k^1, \text{GL}_n) \rightarrow \check{H}^1(\mathbb{P}_K^1, \text{GL}_n)$ bijektiv.

2.3.8 Korollar (Grothendiecks Spaltungssatz). Ist k ein Körper, so ist jedes Vektorbündel auf \mathbb{P}_k^1 direkte Summe von Geradenbündeln, und diese sind bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Der Rest dieses Abschnitts ist dem Beweis von Satz 2.3.5 gewidmet. Dazu verwenden wir eine Abwandlung von Ideen von Dedekind und Weber zur Untersuchung von Ganzheitsbasen in algebraischen Funktionenkörpern, [D–W, § 22]. Vergleiche auch [Has, III, § 24], [Sch] und insbesondere den dort zitierten Artikel [Ge].

Im Folgenden sei V ein freier $k[X, X^{-1}]$ -Modul von endlichem Rang n .

Definition. Ein freier $k[X]$ -Untermodul $U \subset V$ heißt *erzeugend*, wenn eine (und damit jede) $k[X]$ -Basis von U auch eine $k[X, X^{-1}]$ -Basis von V ist.

Offenbar ist ein $k[X]$ -Untermodul $U \subset V$ genau dann erzeugend, wenn U endlich mit $\text{rg}_{k[X]} U = n$ ist und V als $k[X, X^{-1}]$ -Modul erzeugt. – Natürlich läßt sich die gleiche Definition für $k[X^{-1}]$ -Untermoduln (beachte $k[X, X^{-1}] = k[X^{-1}, (X^{-1})^{-1}]$) geben. Diese Dualität werden wir im Folgenden intensiv ausnutzen. Beispielsweise besitzen erzeugende $k[X]$ -Untermoduln im folgenden Sinne „komplementäre“ erzeugende $k[X^{-1}]$ -Untermoduln:

2.3.9 Proposition. Es sei $U \subset V$ ein erzeugender $k[X]$ -Untermodul. Dann gibt es einen erzeugenden $k[X^{-1}]$ -Untermodul $W \subset V$ mit $U \cap W = 0$.

Beweisskizze. Wähle eine $k[X]$ -Basis u_1, \dots, u_n von U . Dann tut der von den $w_i := X^{-1} \cdot u_i$ erzeugte $k[X^{-1}]$ -Untermodul W das Gewünschte. \square

Definition. Es sei $U \subset V$ erzeugender $k[X]$ -Untermodul und $v \in V$. Dann nennen wir

$$e_{X,U}(v) := \inf\{e \in \mathbb{Z} \mid X^e \cdot v \in U\}$$

den *Exponenten* von v bezüglich X und U .

2.3.10 Proposition. Es sei $U \subset V$ erzeugender $k[X]$ -Untermodul.

1. Für alle $v \in V$ gilt $e_{X,U}(v) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ (insbesondere gibt es stets ein e mit $X^e \cdot v \in U$).
2. Für alle $v \in V$ gilt

$$e_{X,U}(v) \begin{cases} = -\infty & \iff v = 0, \\ \leq 0 & \iff v \in U, \\ = 0 & \iff v \in U \setminus X \cdot U. \end{cases}$$

sowie $e_{X,U}(Xv) = e_{X,U}(v) - 1$ und $e_{X,U}(av) = e_{X,U}(v)$ für alle $a \in k^\times$.

3. Für $v, v' \in V$ gilt $e_{X,U}(v + v') \leq \max\{e_{X,U}(v), e_{X,U}(v')\}$.

Beweis. Wir beweisen die beiden einzigen nicht völlig offensichtlichen Aussagen; sei dazu u_1, \dots, u_n eine $k[X]$ -Basis von U . Ist $v \in V$ beliebig, so finden wir $P_1, \dots, P_n \in k[X, X^{-1}]$ mit $v = \sum_i P_i u_i$. Für ein genügend großes e gilt dann aber $X^e \cdot P_i \in k[X]$ für alle i , und das bedeutet $X^e \cdot v \in U$, womit 1. gezeigt ist.

Ist außerdem $v \in V$ mit $e_{X,U}(v) = -\infty$, so gilt insbesondere $v \in U$. Schreibe also $v = \sum_i P_i u_i$ mit $P_i \in k[X]$. Für alle $e \geq 0$ folgt wegen $X^{-e}v \in U$ aber $P_i \in X^e k[X]$, also $P_i \in \bigcap_{e \geq 0} X^e k[X] = 0$ und damit $v = 0$. \square

Fixieren wir von nun an einen erzeugenden $k[X]$ -Untermodul $U \subset V$ und einen erzeugenden $k[X^{-1}]$ -Untermodul $W \subset V$. Wir konstruieren der Reihe nach Elemente u_1, \dots, u_n von U wie folgt: ist $1 \leq i \leq n$, und sind u_1, \dots, u_{i-1} bereits konstruiert, so wähle $u_i \in U$ derart, daß $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i$ in $U/(X.U) \cong k^n$ k -linear unabhängig sind, und so daß $e_{X^{-1},W}(u_i)$ minimal unter allen Elementen mit dieser Eigenschaft ist. Dies ist möglich wegen $\dim_k U/(X.U) = n$ und nach dem folgenden

2.3.11 Lemma. $e_{X^{-1},W}$ ist auf $U \setminus \{0\}$ nach unten beschränkt.

Beweis. Ist $e_{X^{-1},W}(x) \leq e$, so folgt $x \in X^e W$. Es genügt also zu zeigen, daß es ein e gibt mit $U \cap X^e W = 0$. Wähle nach 2.3.9 einen erzeugenden $k[X^{-1}]$ -Untermodul $W' \subset X$ mit $U \cap W' = 0$. Es genügt dann zu zeigen, daß $X^e W \subset W'$ ist für genügend kleines e . Dies ist aber klar, denn W ist endlich erzeugt, und für jedes $w \in W$ gibt es ein e mit $X^e \cdot w \in W'$. \square

Damit haben wir bewiesen:

2.3.12 Satz. U besitzt eine Normalbasis bezüglich X und W , d.h. eine Familie (u_1, \dots, u_n) von Elementen von U mit folgenden Eigenschaften:

1. $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ ist eine k -Basis von $U/X.U$.
2. Ist $u \in U$ mit $e_{X^{-1},W}(u) < e_{X^{-1},W}(u_\ell)$ für ein $\ell \in \{1, \dots, n\}$, so gilt $\bar{u} \in \text{Span}_k(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{\ell-1})$ in $U/X.U$.

Für eine Normalbasis gilt insbesondere $e_{X,U}(u_i) = 0$ für alle i , $e_{X^{-1},W}(u_1) \leq \dots \leq e_{X^{-1},W}(u_n)$, und für $u = \sum_{i=1}^{\ell} a_i u_i$ mit $a_i \in k$, $a_\ell \neq 0$, ist $e_{X^{-1},W}(u) = e_{X^{-1},W}(u_\ell)$. – Beispielsweise ist jede $k[X, X^{-1}]$ -Basis von V Normalbasis eines geeigneten U bezüglich eines geeigneten W :

2.3.13 Beispiel. Es sei $u_1, \dots, u_n \in V$ eine $k[X, X^{-1}]$ -Basis, $e_1 \leq \dots \leq e_n$ ganze Zahlen. Sei $w_i := X^{-e_i} u_i$ für $1 \leq i \leq n$, $U := \sum_i k[X] \cdot u_i$ und $W := \sum_i k[X^{-1}] \cdot w_i$. Dann ist u_1, \dots, u_n eine Normalbasis von U bezüglich X und W mit $e_{X^{-1},W}(u_i) = e_i$ für alle i .

Beweis. Natürlich ist $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ eine k -Basis von $U/X.U = U \otimes_{k[X]} k[X]/(X)$, so daß nur die zweite Eigenschaft nachzuprüfen ist. Für ein Element $u = \sum_i P_i \cdot u_i \in U$ (mit $P_i \in k[X]$) gilt $e_{X^{-1},W}(u) = \max_i (e_i + \deg P_i)$ (wobei wir $\deg 0 := -\infty$ setzen): denn es gilt $X^{-e} \cdot u \in W$ genau dann, wenn $X^{-e} \cdot P_i \in X^{-e_i} \cdot k[X^{-1}]$ für alle i gilt, und das ist äquivalent zu $e \geq \deg P_i + e_i$. Insbesondere gilt $e_{X^{-1},W}(u_i) = e_i$. Ist nun $u = \sum_i P_i \cdot u_i \in U$ mit $e_{X^{-1},W}(u) < e_\ell$ für ein ℓ , so bedeutet das $e_i + \deg P_i < e_\ell$ für alle i , also $P_i = 0$ für alle $i \geq \ell$. \square

Wir werden unten sehen, daß die so konstruierten die einzigen Beispiele von Normalbasen sind.

2.3.14 Satz. Jede Normalbasis u_1, \dots, u_n von U (bezüglich X und W) ist eine $k[X]$ -Basis von U .

Beweisskizze. Es sei zunächst $U' = \sum_i k \cdot u_i$ das k -lineare Erzeugnis der Normalbasis. Zeige zunächst folgende Variante einer „Division durch X mit Rest“: Zu jedem $u \in U$ gibt es $r \in U'$ und $u \in U$ mit $u = Xq + r$, und im Fall $u \neq 0$ gilt dabei $e_{X^{-1},W}(q) < e_{X^{-1},W}(u)$. (Zum Beweis wähle $r \in U'$ derart, daß $u - r \in X \cdot U$ gilt.) Durch wiederholte Anwendung dieser Aussage folgt dann, daß jedes Element von U im $k[X]$ -linearen Erzeugnis der Normalbasis liegt (denn das Verfahren muß abbrechen, da $e_{X^{-1},W}(q)$ für $q \neq 0$ nicht beliebig klein werden kann). Aber U ist freier $k[X]$ -Modul, also ist u_1, \dots, u_n eine Basis. ⁽ⁱⁱⁱ⁾ \square

2.3.15 Korollar. Ist u_1, \dots, u_n Normalbasis von U bezüglich X und W , und setzen wir $e_i := e_{X^{-1},W}(u_i)$, so ist $w_1 := X^{-e_1} u_1, \dots, w_n := X^{-e_n} u_n$ eine Normalbasis von W bezüglich X^{-1} und U .

Beweis. Es gilt $e_{X,U}(w_i) = e_{X,U}(u_i) + e_i = e_i$. Da mit u_1, \dots, u_n auch w_1, \dots, w_n eine $k[X, X^{-1}]$ -Basis von V ist, folgt die Aussage aus Beispiel 2.3.13 (wobei die Rollen von (U, X) und (W, X^{-1}) vertauscht sind). \square

2.3.16 Korollar. Es sei $U \subset V$ ein erzeugender $k[X]$ -Untermodul und $W \subset V$ ein erzeugender $k[X^{-1}]$ -Untermodul. Dann gibt es eine $k[X]$ -Basis u_1, \dots, u_n von U und Zahlen $e_1 \leq \dots \leq e_n \in \mathbb{Z}$, so daß $w_1 := X^{-e_1} \cdot u_1, \dots, w_n := X^{-e_n} \cdot u_n$ eine $k[X^{-1}]$ -Basis von W ist.

2.3.17 Lemma. Es sei u_1, \dots, u_n eine Normalbasis (bezüglich X und W) und u'_1, \dots, u'_n eine beliebige $k[X]$ -Basis von U , die so sortiert sei, daß $e_{X^{-1},W}(u'_1) \leq \dots \leq e_{X^{-1},W}(u'_n)$ ist. Dann gilt $e_{X^{-1},W}(u'_i) \geq e_{X^{-1},W}(u_i)$ für alle i .

Beweis. Auch $\overline{u'_1}, \dots, \overline{u'_n}$ ist eine k -Basis von $U/X \cdot U$. Wäre nun $e_{X^{-1},W}(u'_\ell) < e_{X^{-1},W}(u_\ell)$ für ein $\ell = 1 \dots n$, so wäre auch $e_{X^{-1},W}(u'_i) < e_{X^{-1},W}(u_\ell)$ für alle $1 \leq i \leq \ell$ und damit $\text{Span}_k(\overline{u'_1}, \dots, \overline{u'_\ell}) \subset \text{Span}_k(\overline{u_1}, \dots, \overline{u_{\ell-1}})$, was aus Dimensionsgründen unmöglich ist. \square

Beweis von Satz 2.3.5. Es sei $Q \in \text{GL}_n(k[X, X^{-1}])$ beliebig. Wähle eine $k[X, X^{-1}]$ -Basis u_1, \dots, u_n von $V = k[X, X^{-1}]^n$ und setze $(w_1 \dots w_n) := (u_1 \dots u_n)Q$. Sei U der von den u_i aufgespannte erzeugende $k[X]$ -Untermodul und W der von den w_i aufgespannte $k[X^{-1}]$ -Untermodul. Wähle weiter Basen u'_1, \dots, u'_n von U und w'_1, \dots, w'_n von W wie in Korollar 2.3.16, und seien $P \in \text{GL}_n(k[X])$ und $R \in \text{GL}_n(k[X^{-1}])$ die Matrizen mit

$$\begin{aligned} (u'_1 \dots u'_n)P &= (u_1 \dots u_n), \\ (w'_1 \dots w'_n) &= (w_1 \dots w_n)R. \end{aligned}$$

Dann haben wir

$$(w'_1 \dots w'_n) = (w_1 \dots w_n)R = (u_1 \dots u_n)QR = (u'_1 \dots u'_n)PQR,$$

und wegen $w'_i = X^{-e_i} \cdot u_i$ (mit $e_1 \leq \dots \leq e_n$) folgt $PQR = \text{diag}(X^{-e_1}, \dots, X^{-e_n})$. Die Matrizen dieser Form repräsentieren also tatsächlich alle Äquivalenzklassen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß verschiedene Matrizen verschiedene Äquivalenzklassen repräsentieren. Seien also $e_1 \leq \dots \leq e_n$ und $f_1 \leq \dots \leq f_n$ ganze Zahlen, und seien $P \in \text{GL}_n(k[X])$ und $R \in \text{GL}_n(k[X^{-1}])$ mit

$$P \begin{pmatrix} X^{-f_1} & & \\ & \ddots & \\ & & X^{-f_n} \end{pmatrix} R = \begin{pmatrix} X^{-e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & X^{-e_n} \end{pmatrix}.$$

⁽ⁱⁱⁱ⁾ Ist nämlich A ein Integritätsring, so ist jedes Erzeugendensystem $v_1, \dots, v_n \in A^n$ der Länge n bereits eine Basis. Zum Beweis sei $K = \text{Quot } A$; dann ist $v_1 \otimes 1, \dots, v_n \otimes 1 \in A^n \otimes_A K \cong K^n$ ein Erzeugendensystem, also eine K -Basis, und damit müssen die v_1, \dots, v_n bereits A -linear unabhängig gewesen sein.

Aus Symmetriegründen sind wir fertig, wenn wir $f_i \geq e_i$ für alle i zeigen können. Sei dazu $u_1, \dots, u_n \in V$ eine $k[X, X^{-1}]$ -Basis. Setzen $w_i := X^{-e_i} u_i$ sowie $U := \sum_i k[X] \cdot u_i$ und $W := \sum_i k[X^{-1}] \cdot w_i$. Dann ist u_1, \dots, u_n eine Normalbasis von U (bezüglich X und W) mit $e_{X^{-1}, W}(u_i) = e_i$ für alle i .

Mit $Q = \text{diag}(X^{-e_1}, \dots, X^{-e_n})$ und $Q' = \text{diag}(X^{-f_1}, \dots, X^{-f_n})$ haben wir dann

$$(u_1 \dots u_n)PQ' = (u_1 \dots u_n)QR^{-1} = (w_1 \dots w_n)R^{-1},$$

also ist $(u'_1 \dots u'_n) := (u_1 \dots u_n)P$ eine $k[X]$ -Basis von U mit der Eigenschaft, daß w'_1, \dots, w'_n mit $w'_i = X^{-f_i} u'_i$ eine $k[X^{-1}]$ -Basis von W ist. Dann ist auch $\overline{w'_1}, \dots, \overline{w'_n}$ eine k -Basis von $W/X^{-1} \cdot W$, also insbesondere $w'_i \in W - X^{-1} \cdot W$ für alle i , und daraus folgt $e_{X^{-1}, W}(u'_i) = f_i$. Nach 2.3.17 ist dann aber $f_i = e_{X^{-1}, W}(u'_i) \geq e_{X^{-1}, W}(u_i) = e_i$ für alle i , was zu beweisen war. \square

2.4 Der Fall endlicher Gruppenschemata

2.4.1 Die Serre–Grothendiecksche Vermutung für endliche Gruppenschemata

In diesem und dem nächsten Abschnitt untersuchen wir Torseure unter *endlichen* Gruppenschemata. Auch später bedeutsam sein wird das Resultat dieses Abschnittes, daß nämlich für ein normales, integrales noethersches Schema X und ein endliches étales Gruppenschema G über X die Abbildung $\check{H}_{\text{ét}}^1(X, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\text{Spec } K, G)$ injektiv ist. Da ein lokaler Ring von X ebenfalls wieder normal und integer ist, impliziert das insbesondere die Serre–Grothendiecksche Vermutung für G -Torseure über X . – Im nächsten Abschnitt beweisen wir außerdem ein „Reinheitsresultat“, das im Wesentlichen besagt, daß sich – falls X sogar regulär ist – die Klassifikation der G -Torseure über X nicht verändert, wenn man aus X ein Unterschema der Kodimension ≥ 2 entfernt.

Aufgrund verschiedener kursierender Definitionen von Normalität halten wir als erstes die von uns verwendete fest:

Definition. Ein Schema X heißt *normal*, wenn jeder lokale Ring von X ein ganzabgeschlossener Integritätsring ist. Ein Ring A heißt *normal*, wenn $\text{Spec } A$ normal ist.

Ist X ein noethersches Schema und $x \in X$, so entsprechen die minimalen Primideale von $\mathcal{O}_{X,x}$ den irreduziblen Komponenten von X , die x enthalten. Insbesondere ist ein normales noethersches Schema disjunkte Vereinigung irreduzibler Schemata. Ein noetherscher normaler Ring ist also Produkt endlich vieler ganzabgeschlossener Integritätsringe, und ein zusammenhängendes noethersches normales Schema ist irreduzibel. – Wir benötigen das folgende Abstiegsresultat:

2.4.1 Proposition. *Ist X ein normales Schema und $f : Y \rightarrow X$ étale, so ist auch Y normal.*

Beweis. [Mi80, I.3.17(c)] oder [SGA 1, Exp. I, § 9.10]. \square

2.4.2 Satz. *Es sei X ein normales, zusammenhängendes noethersches Schema mit Funktionenkörper K . Ist $G \rightarrow X$ ein endliches étales Gruppenschema, so ist die Abbildung $\check{H}_{\text{ét}}^1(X, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\text{Spec } K, G)$ injektiv.*

2.4.3 Lemma. *Es seien X und K wie im Satz. Sind Y, Y' endlich und étale über X , so ist die natürliche Abbildung*

$$\text{Hom}_X(Y, Y') \rightarrow \text{Hom}_K(Y_K, Y'_K) \quad (\text{mit } Y_K = Y \times_X \text{Spec } K \text{ usw.})$$

bijektiv.

Beweis. Es genügt, die Aussage lokal auf X zu beweisen. Sei also ohne Einschränkung $X = \text{Spec } A$ affin (dann ist A ein Integritätsring). Dann sind auch $Y = \text{Spec } B$ und $Y' = \text{Spec } B'$ affin und normal. Es sei $S = A \setminus \{0\}$. Die Elemente von S sind keine Nullteiler auf B und B' : denn $B = \prod_i B_i$ ist ein Produkt von Integritätsringen, und jede Abbildung $A \rightarrow B_i$ ist endlich und étale und damit injektiv. Also ist $B \rightarrow S^{-1}B$ injektiv, woraus die Injektivität von $\text{Hom}_{\text{Alg}_A}(B', B) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Alg}_{S^{-1}A}}(S^{-1}B', S^{-1}B)$ folgt. Für die Surjektivität sei $\varphi : S^{-1}B' \rightarrow S^{-1}B$ gegeben. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 & B' & \longrightarrow S^{-1}B' \\
 & \nearrow & \\
 A & & \\
 & \searrow & \\
 & B & \longrightarrow S^{-1}B \\
 & & \downarrow \varphi
 \end{array}$$

Für jedes $b' \in B'$ ist $\varphi(b')$ ganz über A , also *a fortiori* auch über B , und da B in $S^{-1}B$ ganzabgeschlossen ist, folgt $\varphi(b') \in B \subset S^{-1}B$. Der dadurch induzierte Homomorphismus $\psi : B' \rightarrow B$ erfüllt offensichtlich $S^{-1}\psi = \varphi$. \square

Beweis des Satzes. Nach Abstiegsstheorie ist jeder G -Torseur endlich und étale über X . Seien nun E, E' zwei G -Torseure über X , die über $\text{Spec } K$ isomorph werden. Wir haben also einen Isomorphismus von K -Schemata $\varphi : E_K \rightarrow E'_K$. Nach dem Lemma ist φ jedoch induziert durch einen Morphismus $\psi : E \rightarrow E'$:

$$\begin{array}{ccccc}
 E_K & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & E'_K & & \\
 \downarrow & \searrow & \swarrow & & \downarrow \\
 & & \text{Spec } K & & \\
 \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \\
 E & \dashrightarrow & E' & & \\
 \downarrow & \searrow & \swarrow & & \downarrow \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Aber ψ ist auch G -äquivariant: denn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 E \times_X G & \xrightarrow{\psi \times \text{id}} & E' \times_X G \\
 \mu \downarrow & & \downarrow \mu' \\
 E & \xrightarrow{\psi} & E'
 \end{array}$$

kommutiert nach Basiswechsel mittels $_ \times_X \text{Spec } K$, aber $E \times_X G$ und E' sind beide endlich und étale über X , so daß wir das Lemma anwenden können. Damit ist ψ ein Morphismus von G -Torseuren, und das heißt $E \cong E'$. \square

2.4.4 Korollar. *Es sei X ein normales, zusammenhängendes noethersches Schema und $G \rightarrow X$ ein endliches étales Gruppenschema. Dann gilt $\check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1(X, G)(U) = \check{H}_{\text{ét}}^1(U, G)$ für jede offene Teilmenge $\emptyset \neq U \subset X$, und die Garbe $\check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1$ hat injektive Restriktionsabbildungen.*

Beweis. Es sei $\mathcal{F}(U) := \check{H}_{\text{ét}}^1(U, G)$. Nach Definition ist $\check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1(X, G)$ die zu \mathcal{F} assoziierte Garbe, so daß es genügt zu zeigen, daß \mathcal{F} eine Garbe ist. Es sei $K = K(X)$ der Funktionenkörper von X . Ist $U \subset X$

offen, so ist nach dem Satz $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow H_{\text{ét}}^1(K, G_K)$ injektiv, also auch $\mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U)$. Dies genügt, um die Injektivität aller Restriktionen einzusehen (ersetze X durch eine offene Teilmenge), und insbesondere ist \mathcal{F} eine separierte Prägarbe.

Für die Verklebeeigenschaft seien $(U_i)_{i \in I}$ beliebige offene Teilmengen von X . Da \mathcal{F} separiert ist, dürfen wir zu Teilüberdeckungen übergehen, und da X noethersch ist, können wir $|I| < \infty$ annehmen. Per Induktion genügt dann der Fall $|I| = 2$. Seien also $U_1, U_2 \subset X$ offen, und sei E_i ein G -Torseur über U_i mit $E_1|_{U_1 \cap U_2} \cong E_2|_{U_1 \cap U_2}$. Dann lassen sich E_1 und E_2 aber zu einem G -Torseur über $U_1 \cup U_2$ verkleben, und damit ist \mathcal{F} eine Garbe. \square

2.4.2 Exkurs: Reinheit für konstante endliche Gruppenschemata

Definition. Ist X ein Schema, so bezeichnen wir mit $X^{(1)}$ die Menge aller $x \in X$ mit $\dim \mathcal{O}_{X,x} = 1$.

Ist $X = \text{Spec } A$ affin, so ist $X^{(1)}$ die Menge aller Primideale der Höhe 1 in A . Im allgemeinen besteht $X^{(1)}$ aus den generischen Punkten der irreduziblen Unterschemata der Kodimension 1 in X ; man nennt sie auch die „Punkte der Kodimension 1“.

Definition. Es sei X ein irreduzibles Schema und \mathcal{F} eine Garbe auf X mit injektiven Restriktionsabbildungen. \mathcal{F} heißt *rein* auf X , wenn $\mathcal{F}(X) = \bigcap_{x \in X^{(1)}} \mathcal{F}_x$ ist.^(iv)

Ist etwa (X, \mathcal{O}_X) ein noethersches, normales Schema, so ist \mathcal{O}_X rein auf X , vgl. [Mat, 17.H, Thm. 38].

2.4.5 Satz. *Es sei X ein reguläres, irreduzibles, noethersches Schema der Dimension ≥ 1 und G ein konstantes endliches Gruppenschema (über \mathbb{Z}). Dann ist $\mathcal{H}_{\text{ét}}^1(X, G)$ rein auf X .*

Der Beweis des Satzes wird den Rest dieses Abschnitts in Anspruch nehmen.

2.4.6 Proposition. *Es sei G endliches konstantes Gruppenschema, X ein normales und zusammenhängendes noethersches Schema und $Y \rightarrow X$ étale. Ist dann $\emptyset \neq U \subset X$ offen und $Y_U = Y \times_X U$, so ist $G(Y) \xrightarrow{\cong} G(Y_U)$ invertierbar.*

Zum Beweis zeigen wir zunächst ein

2.4.7 Lemma. *In der Situation der Proposition ist $\pi_0(Y_U) \xrightarrow{\cong} \pi_0(Y)$ (wobei wir unter $\pi_0(_)$ nur die Menge der Zusammenhangskomponenten verstehen wollen).*

Beweis. Indem wir Zusammenhangskomponenten einzeln betrachten, können wir annehmen, daß Y zusammenhängend und nichtleer ist. Als normales Schema ist Y dann insbesondere irreduzibel. Wir behaupten, daß $\pi_0(Y_U)$ dann ein Punkt ist. Zunächst ist das Bild von $Y \rightarrow X$ offen und nichtleer und schneidet damit U , d.h. $Y_U \neq \emptyset$. Andererseits ist Y_U ebenfalls irreduzibel und damit zusammenhängend. \square

Übrigens ist das Analogon des Lemmas in der klassischen Topologie nicht korrekt: betrachte etwa die Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{it}$.

^(iv)Der Schnitt ist hier in \mathcal{F}_ξ zu nehmen, wobei ξ der generische Punkt von X ist. – Die Voraussetzung der Irreduzibilität von X machen wir schon deswegen, um sinnvoll von immer injektiven Restriktionen sprechen zu können.

Beweis von 2.4.6. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} G(Y) & \longrightarrow & G(Y_U) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Abb}(\pi_0(Y), G(k)) & \longrightarrow & \text{Abb}(\pi_0(Y_U), G(k)) \end{array}$$

ist nach dem Lemma der untere horizontale Pfeil invertierbar. \square

2.4.8 Proposition (Endliche étale Überdeckungen normaler Schemata). *Es sei X ein zusammenhängendes und normales noethersches Schema.*

1. *Ist Y ein irreduzibles Schema und $Y \rightarrow X$ endlich und étale, so ist $K(X) \subset K(Y)$ eine endliche separable Körpererweiterung, und Y ist die Normalisierung von X in $K(Y)$ ([Har, Ex. II.3.8]).*
2. *Ist $K(X) \subset L$ eine endliche separable Körpererweiterung und Y die Normalisierung von X in L , so ist $Y \rightarrow X$ endlich, $K(X) \subset K(Y) = L$, und in allen Punkten, in denen $Y \rightarrow X$ unverzweigt ist, ist die Abbildung étale.*

Beweis.

1. $Y \rightarrow X$ ist offen und abgeschlossen, also surjektiv. Insbesondere ist $K(X) \subset K(Y)$, und die Erweiterung ist endlich und separabel nach der Definition étaler Morphismen. Nach [Mi80, I.3.17] ist auch Y normal. Sei nun ohne Einschränkung $X = \text{Spec } A$ affin; dann ist auch $Y = \text{Spec } B$ affin, und $A \subset B$ ist endlich. Insbesondere ist B ganz über A , und da B ganzabgeschlossen in $\text{Quot } B = K(Y)$ ist, ist B der ganze Abschluß von A in B .
2. Die Endlichkeit ist bekannt, vgl. etwa [Ei, Prop. 13.14]. Der Rest ist [Mi80, I.3.20]. (Beachte, daß die Punkte, in denen der Morphismus unverzweigt ist, eine offene Menge bilden.)

\square

2.4.9 Proposition. *Es sei A ein regulärer lokaler Ring (insbesondere noethersch) und G konstantes endliches Gruppenschema. Ist dann $\emptyset \neq U \subset X$ offen mit $X^{(1)} \subset U$, so ist $\check{H}_{\text{ét}}^1(X, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(U, G)$ bijektiv.*

Beweis. Nach dem letzten Abschnitt ist die Abbildung injektiv. Für die Surjektivität sei E ein G -Torseur über U . Es sei $\tilde{U} \rightarrow U$ eine étale Überdeckung, so daß $E|_{\tilde{U}}$ trivial ist. Wir zeigen unten, daß wir \tilde{U} so wählen können, daß es eine étale Überdeckung $\tilde{X} \rightarrow X$ und ein kartesisches Quadrat

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

gibt. Dann ist E gegeben durch einen Kozyklus $a \in G(\tilde{U} \times_U \tilde{U})$. Aber $\tilde{U} \times_U \tilde{U}$ ist das Urbild von U unter dem étalen Morphismus $\tilde{X} \times_X \tilde{X} \rightarrow X$, also ist $G(\tilde{X} \times_X \tilde{X}) \rightarrow G(\tilde{U} \times_U \tilde{U})$ invertierbar nach 2.4.6. Damit läßt sich a zu einem Element $b \in G(\tilde{X} \times_X \tilde{X})$ liften. Daß b ein Kozyklus ist, sieht man mit dem gleichen Argument, angewandt auf $\tilde{X} \times_X \tilde{X} \times_X \tilde{X}$ usw. Die Klasse $[b] \in \check{H}_{\text{ét}}^1(X, G)$ repräsentiert nun einen Torseur E' über X mit $E'|_U \cong E$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß wir \tilde{U} und \tilde{X} wie oben finden. Sei dazu $\tilde{U} \rightarrow U$ eine étale Überdeckung, die E trivialisiert. Nach 2.1.3 können wir $\tilde{U} = E$ nehmen, also erreichen, daß $\tilde{U} \rightarrow U$ endlich ist (vgl. auch 2.1.24). Ist \tilde{U}' eine beliebige Zusammenhangskomponente von \tilde{U} , so ist $\tilde{U}' \rightarrow U$ immer noch endlich

und étale, also abgeschlossen und offen und damit surjektiv. Wir können also durch Übergang zu \tilde{U}' annehmen, daß \tilde{U} außerdem zusammenhängend und damit, da normal, irreduzibel ist.

Nach der letzten Proposition ist dann \tilde{U} die Normalisierung von U in $\tilde{K} = K(\tilde{U})$. Sei \tilde{X} die Normalisierung von X in \tilde{K} , also $\tilde{X} = \text{Spec } B$, wobei B der ganze Abschluß von A in \tilde{K} ist. Wir zeigen, daß $\tilde{X} \rightarrow X$ étale ist. Für alle $\mathfrak{q} \in \text{Spec } B$ mit $\text{ht } \mathfrak{q} = 1$ ist auch $\text{ht}(\mathfrak{q} \cap A) = 1$ nach Going-Down,^(v) also $\mathfrak{q} \cap A \in U$ und damit $\mathfrak{q} \in \tilde{U}$, und insbesondere ist $A \rightarrow B$ étale in \mathfrak{q} . Nach der dem nächsten Satz und der letzten Proposition ist dann $A \rightarrow B$ étale. \square

2.4.10 Satz (Reinheit des Verzweigungsortes, Zariski–Nagata–Auslander). *Es sei (A, \mathfrak{m}) ein regulärer lokaler Ring mit Quotientenkörper K , $K \subset L$ eine endliche separable Körpererweiterung und B der ganze Abschluß von A in L . Ist $\mathfrak{n} \subset B$ ein maximales Ideal, und ist $A \rightarrow B_{\mathfrak{n}}$ unverzweigt in jedem Primideal der Höhe 1 in $B_{\mathfrak{n}}$, so ist $A \rightarrow B_{\mathfrak{n}}$ unverzweigt.*

Beweis. [Au]; vgl. auch [Mi80, I.3.7]. \square

Beweis von Satz 2.4.5. Es sei $\alpha \in \bigcap_{x \in X^{(1)}} \check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1(X, G)_x$. Wir finden dann eine offene Menge $U \subset X$ mit $X^{(1)} \subset U$ und $\alpha \in \check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1(X, G)(U) = \check{H}_{\text{ét}}^1(U, G)$ (Korollar 2.4.4).

Es sei $x \in X$. Wir müssen zeigen, daß $\alpha \in \check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1(X, G)_x$ gilt; dafür können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\dim \mathcal{O}_{X,x} \geq 1$ (de facto sogar ≥ 2) ist. Es sei $Y := \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ und $i : Y \rightarrow X$ der kanonische Morphismus. Dann ist $Y_U := i^{-1}(U) \neq \emptyset$ wegen $i^{-1}(X^{(1)}) = Y^{(1)} \subset Y_U$. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1(X, G)_x & \xrightarrow{\cong} & \check{H}_{\text{ét}}^1(Y, G) \\ & & \downarrow \cong \\ \check{H}_{\text{ét}}^1(U, G) & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(Y_U, G) \end{array}$$

ist der obere horizontale Pfeil invertierbar nach 2.2.1 und der rechte nach der letzten Proposition. Also finden wir eine offene Menge $x \in V \subset X$ und ein Element $b \in \check{H}_{\text{ét}}^1(V, G)$, dessen Bild in $\check{H}_{\text{ét}}^1(V_U, G)$ mit dem von α übereinstimmt. Die beiden Einschränkungen von α bzw. b auf $U \cap V \neq \emptyset$ stimmen dann aber auch über $K(Y) = K(X)$ überein, und nach Satz 2.4.2 folgt daraus $\alpha|_{U \cap V} = b|_{U \cap V}$, also $\alpha \in \check{\mathcal{H}}_{\text{ét}}^1(X, G)_x$. \square

2.5 Abstiegsstheorie II – Verklebende Ringhomomorphismen

2.5.1 Verklebende Ringhomomorphismen

Ist A ein Ring, und sind $f, g \in A$ mit $Af + Ag = A$, so ist ein A -Modul „dasselbe“ wie ein A_f -Modul, ein A_g -Modul und ein Isomorphismus der beiden induzierten A_{fg} -Moduln. Dies ergibt sich beispielsweise aus unserem Satz über das Verkleben von Modulgarben auf Schemata; man beachte, daß die Kozykelbedingung hier automatisch erfüllt ist, weil für eine offene Einbettung $U \rightarrow X$ von Schemata der Morphismus $U \times_X U \rightarrow X$ einen Isomorphismus $U \times_X U \xrightarrow{\cong} U$ induziert.

In diesem Abschnitt beweisen wir eine Verallgemeinerung dieses Satzes, und zwar wollen wir A_g durch eine allgemeinere A -Algebra B ersetzen. Eine intuitiv plausible Forderung ist dann, daß $A/fA \rightarrow B/fB$ invertierbar sein sollte: denn $\text{Spec } A/fA$ ist das Komplement von $\text{Spec } A_f$ in $\text{Spec } A$, über das wir also keinerlei Information haben, wenn wir nur A_f -Moduln betrachten. Wir beweisen die entsprechende Verklebeaussage unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß $A \rightarrow B$ flach ist.

^(v)vgl. [Mat, 5.E Thm. 5(v)] oder [A–M, Thm. 5.16]

Definition. Ein Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ noetherscher Ringe heißt *verklebend* in $f \in A$, wenn er flach und von endlichem Typ^(vi) ist und einen Isomorphismus $A/fA \rightarrow B/fB$ induziert.

Ist etwa A noethersch und $A = Af + Ag$, so ist $A \rightarrow A_g$ verklebend in f . Denn Lokalisierungen sind flach, und da g in A/fA invertierbar wird, haben wir $A/fA \cong (A/fA)_g = A_g/fA_g$. Ist außerdem $A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$, und ist A' eine flache noethersche A -Algebra, so ist auch $A' \rightarrow B' := A' \otimes_A B$ verklebend in f .

2.5.1 Satz. Es sei $A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$, und f sei kein Nullteiler auf B . Dann ist das kanonische Diagramm von Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Mod}_A & \longrightarrow & \mathbf{Mod}_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Mod}_{A_f} & \longrightarrow & \mathbf{Mod}_{B_f} \end{array}$$

kartesisch. Anders gesagt: ein A -Modul X ist „dasselbe“ wie ein A_f -Modul M und ein B -Modul N zusammen mit einem Isomorphismus von $M \otimes_A B \rightarrow N_f$ von B_f -Moduln.

Der Beweis wird den Rest dieses Abschnittes in Anspruch nehmen. Eine Anleitung zur Konstruktion eines quasiinversen Funktors zum natürlichen Funktor

$$\begin{aligned} \mathbf{Mod}_A &\rightarrow \mathbf{Mod}_{A_f} \times_{\mathbf{Mod}_{B_f}} \mathbf{Mod}_B, \\ X &\mapsto (X_f, X \otimes_A B, X_f \otimes_A B \xrightarrow{\cong} (X \otimes_A B)_f) \end{aligned}$$

liefert die folgende

2.5.2 Proposition. Es sei $A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$. Dann ist für alle A -Moduln X das Diagramm von A -Moduln

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \otimes_A B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_f & \longrightarrow & (X \otimes_A B)_f \end{array}$$

kartesisch.

2.5.3 Lemma. Es sei $\varphi : A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$. Dann ist $A/f^kA \rightarrow B/f^kB$ invertierbar für alle $k \geq 0$.

Beweis. Die Surjektivität von $A \rightarrow B/f^kB$ für alle $k \geq 1$ sieht man durch Induktion: Ist sie für ein k bekannt, und ist $b \in B$, so finden wir zuerst ein a mit $\varphi(a) = b + f^kb'$, dann aber auch ein a' mit $\varphi(a') = b' + f^kb''$, und dann ist $\varphi(a - f^ka') = b - f^{2k}b''$, also stimmt die Aussage auch für $2k$ (und insbesondere alle kleineren Werte).

Außerdem ist die Abbildung $A/f^kA \rightarrow B/f^kB$ flach (denn sie entsteht durch Tensorieren von $A \rightarrow B$ mit A/f^kA). Da außerdem $(A/f^kA)_{\text{red}} = (A/fA)_{\text{red}} \xrightarrow{\cong} (B/fA)_{\text{red}} = (B/f^kB)_{\text{red}}$ invertierbar ist, folgt die Behauptung aus dem nächsten Lemma. \square

2.5.4 Lemma. Es sei A ein noetherscher Ring und $\varphi : A \rightarrow B$ flach und surjektiv. Dann ist $\ker \varphi = (a)$ zyklisch mit $a^2 = a$. Ist $\varphi_{\text{red}} : A_{\text{red}} \rightarrow B_{\text{red}}$ bijektiv, so auch φ .

^(vi)Die Voraussetzung, daß φ von endlichem Typ ist, verwenden wir erst im nächsten Abschnitt.

Beweis. Es genügt, einen flachen Homomorphismus $A \rightarrow A/I$ zu betrachten. Dann ist der Funktor $M \mapsto M/I = M \otimes_A (A/I)$ auf \mathbf{Mod}_A exakt; die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow I \rightarrow A \rightarrow A/I \rightarrow 0$ liefert also eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow I/I^2 \rightarrow A/I \rightarrow A/I \rightarrow 0$. Das bedeutet $I = I^2$, und nach dem allgemeinen Lemma von Nakayama ([Mat, 1.M]) gibt es dann ein $a \in I$ mit $(1 - a)I = 0$. Dann ist insbesondere $(1 - a)a = 0$, also $a = a^2$, und für alle $x \in I$ ist $0 = (1 - a)x = x - ax$, also $x \in (a)$. – Ist nun zusätzlich φ_{red} bijektiv, so ist a außerdem nilpotent, und das erzwingt $a = 0$. \square

2.5.5 Lemma. *Es sei $A \rightarrow B$ ein Homomorphismus noetherscher Ringe, X ein endlicher A -Modul, Y ein endlicher B -Modul und $\Phi : X \rightarrow Y$ A -linear. Für ein Element $f \in A$ sind dann äquivalent:*

1. $X/f^k X \rightarrow Y/f^k Y$ ist invertierbar für alle $k \geq 1$.
2. $X/fX \rightarrow Y/fY$ und $\ker(X \rightarrow X_f) \rightarrow \ker(Y \rightarrow Y_f)$ sind beide invertierbar.
3. $X/fX \rightarrow Y/fY$ ist invertierbar, und das Diagramm von A -Moduln

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_f & \longrightarrow & Y_f \end{array}$$

ist kartesisch.

Beweis. 1. \implies 2. Es sei $I = \ker(X \rightarrow X_f)$ und $J = \ker(Y \rightarrow Y_f)$. Es ist nur zu zeigen, daß $I \rightarrow J$ bijektiv ist. Für jedes $x \in I$ gibt es ein n mit $f^n x = 0$; da I endlich erzeugt ist, finden wir ein n mit $f^n I = 0$. Ist nun $x \in I$ mit $\Phi(x) = 0$, so folgt aus 1. insbesondere $x \in f^n X$, also $x = f^n x'$. Es gilt aber auch $x' \in I$, und daraus folgt $x = 0$. Das zeigt die Injektivität.

Da J als B -Modul endlich erzeugt ist, finden wir wieder ein n mit $f^n J = 0$. Ist $y \in J$, so finden wir nach 1. ein $x \in X$ und ein $y' \in Y$ mit $\Phi(x) = y + f^n y'$. Dann ist $\Phi(f^n x) = f^n y + f^{2n} y' = f^{2n} y'$. Da $X/f^{2n} X \rightarrow Y/f^{2n} Y$ injektiv ist, folgt daraus $f^n x = f^{2n} x'$ mit einem $x' \in X$. Dann gilt $x/1 = f^n x'/1$ in X_f , also $x - f^n x' \in I$, und es ist $\Phi(x - f^n x') = y + f^n (y' - \Phi(x')) = y$ wegen $y' - \Phi(x') \in J$: denn es ist ja $y'/1 = \Phi(x)/f^n = \Phi(x')/1$ in Y_f . Das zeigt die Surjektivität.

2. \implies 1. Die Surjektivität jedes $X \rightarrow Y/f^k Y$ läßt sich genauso beweisen wie in 2.5.3. Ebenfalls durch Induktion nach k sehen wir die Injektivität von $X/f^k \rightarrow Y/f^k$: Sei sie für ein k bewiesen. Ist dann $x \in X$ mit $\Phi(x) = f^{k+1} y$, so finden wir nach Induktionsvoraussetzung ein x' mit $x = f^k x'$. Dann gilt $j := \Phi(x') - f y \in J$ mit $f^k j = 0$, also gibt es ein $i \in I$ mit $\Phi(i) = \Phi(x') - f y$, und es ist $f^k i = 0$. Dann ist $\Phi(x' - i) = f y$, nach dem Induktionsanfang gibt es also ein x'' mit $x' - i = f x''$, und es folgt $x = f^k x' = f^{k+1} x'' + f^k i = f^{k+1} x''$.

2. \implies 3. Wir zeigen, daß die kanonische Abbildung $X \rightarrow X_f \times_{Y_f} Y$ bijektiv ist. Für die Injektivität sei $x \in X$ mit $x/1 = 0$ in X_f und $\Phi(x) = 0$. Dann folgt $x = 0$ wegen $x \in \ker(X \rightarrow X_f)$ nach 2.

Ist nun $(x/f^k, y) \in X_f \times_{Y_f} Y$, so ist $\Phi(x)/f^k = y/1$ in Y_f , also $\Phi(x) - f^k y \in J$, und wir finden ein $i \in I$ mit $\Phi(x - i) = f^k y$. Wir haben schon 2. \implies 1. bewiesen, also gilt dann $x - i = f^k x'$ für ein $x' \in X$. Dann ist $f^k \Phi(x') = f^k y$, also $\Phi(x') - y \in J$, und wir finden ein $i' \in I$ mit $y = \Phi(x' - i)$. Aber es ist auch $(x' - i)/1 = x'/1 = x/f^k$ in X_f , also haben wir ein Urbild von $(x/f^k, y)$ gefunden.

3. \implies 2. Identifiziere X mit $X_f \times_{Y_f} Y$. Zu einem $i \in I$ mit $\Phi(i) = 0$ korrespondiert dann das Element $(0, 0)$, also folgt $i = 0$. Ist dagegen $j \in J$ beliebig, $f^k j = 0$, so ist $(0, j)$ ein Element von $X_f \times_{Y_f} Y$ mit $f^k(0, j) = 0$. \square

Beweis von 2.5.2. Ist M ein A -Modul und $M_B = M \otimes_A B$, so ist wegen $M/f^k M = M \otimes_A (A/f^k A)$ und $M_B/f^k M_B = M_B \otimes_B (B/f^k B) = M \otimes_A (A/f^k A)$ nach 2.5.3 auch $M/f^k M \rightarrow M_B/f^k M_B$ bijektiv. Die Proposition liefert dann unsere Behauptung für endlich erzeugte Moduln X .

Ein beliebiger A -Modul X ist aber filtrierender direkter Limes seiner endlich erzeugten Untermoduln. Da aber $\otimes_A B$ mit filtrierenden direkten Limites vertauscht^(vii), folgt die Behauptung aus dem schon Gezeigten zusammen mit der Bemerkung, daß ein filtrierender direkter Limes kartesischer Quadrate wieder kartesisch ist. \square

2.5.6 Proposition. *Es sei $\varphi : A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$, und f sei kein Nullteiler auf B . Es sei M ein A_f -Modul, N ein B -Modul und $\sigma : M \otimes_{A_f} B_f \rightarrow N_f$ ein Isomorphismus. Sei X der A -Modul, der das Diagramm von A -Moduln*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & N \\ \downarrow p & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{m \mapsto \sigma(m \otimes 1)} & N_f \end{array}$$

kartesisch macht, also $X = M \times_{N_f} N$. Dann sind die induzierten Abbildungen $X_f \rightarrow M$ (von A_f -Moduln) und $X \otimes_A B \rightarrow N$ (von B -Moduln) invertierbar.

2.5.7 Lemma. *Es sei $\varphi : A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$. Dann ist $B/A := B/\varphi(A)$ ein A_f -Modul.*

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die Abbildung $B/\varphi(A) \rightarrow B/\varphi(A)$, $\bar{b} \mapsto \overline{fb}$, bijektiv ist. Für die Surjektivität sei $b \in B$ beliebig. Da $A/fA \rightarrow B/fB$ invertierbar ist, finden wir $a \in A$ mit $\varphi(a) = b - fb'$. In B/A gilt dann $\bar{b} = \overline{fb'}$, wie gewünscht.

Für die Injektivität sei $b \in B$ mit $fb = \varphi(a)$. Wieder aus der Invertierbarkeit von $A/fA \rightarrow B/fB$ folgt dann $a \in fA$, also $a = fa'$. Damit gilt $b - \varphi(a') \in \ker(B \rightarrow B_f)$, und nach 2.5.5 (angewandt auf $\Phi = \varphi : A \rightarrow B$ mit Hilfe von 2.5.3) gibt es dann ein $a'' \in A$ mit $b - \varphi(a') = \varphi(a'')$, also $b \in \varphi(A)$. \square

Beweis von 2.5.6.

1. Sei $m \in M$. Mit $\sigma(m \otimes 1) = n/f^k \in N_f$ gilt dann $(f^k m, n) \in X$, also liegt $f^k m$ im Bild von p , und $X_f \rightarrow M$ ist surjektiv. Ist $x = (m, n) \in X$ mit $0 = p(x) = m$, so folgt $0 = \sigma(m \otimes 1) = n/1$, also gibt es ein k mit $f^k n = 0$, also $f^k x = 0$. Das zeigt die Injektivität von $X_f \rightarrow M$.
2. Zum Beweis der Surjektivität von $X \otimes_A B \rightarrow N$ sei $N' \subset N$ das Bild dieser Abbildung, also der von $q(X)$ erzeugte B -Untermodul. Für gegebenes $n \in N$ schreibe $n/1 = \sigma(\sum_i m_i \otimes b_i)$ (mit $M \otimes_{A_f} B_f = M \otimes_A B$). Wir finden ein $k \geq 0$ und $n_i \in N$ mit $\sigma(m_i \otimes 1) = n_i/f^k$ für alle i .

Nach 2.5.3 finden wir Darstellungen $b_i = \varphi(a_i) + f^k b'_i$ mit $a_i \in A$ und $b'_i \in B$. Dann ist

$$\frac{n}{1} = \sigma\left(\sum_i m_i \otimes b_i\right) = \sigma\left(\sum_i a_i m_i \otimes 1 + \sum_i f^k m_i \otimes b'_i\right) = \sigma(m' \otimes 1) + \sum_i \frac{b'_i n_i}{1},$$

mit $m' = \sum_i a_i m_i$. Setzen wir $n' := n - \sum_i b'_i n_i$, so haben wir $\sigma(m' \otimes 1) = n'/1$, also $(m', n') \in X$ und damit $n' \in N'$. Aber wegen $n_i \in N'$ für alle i (denn $(f^k m_i, n_i) \in X$) folgt daraus $n \in N'$.

3. Es sei $K = \ker(X \otimes_A B \rightarrow N)$; wir wollen $K = 0$ zeigen. Hier wird die Voraussetzung eingehen, daß φ flach ist.

^(vii)Genauer überführt $\otimes_A B$ einen direkten Limes von A -Moduln in einen direkten Limes von B -Moduln, aber die Konstruktion filtrierender Limites von Moduln hängt nicht vom Grundring ab.

a) Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow & \searrow q & \\ X \otimes_A B & \longrightarrow & N \end{array}$$

Dann gilt $\ker q \subset \ker(X \rightarrow X \otimes_A B)$. Betrachte nämlich das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \ker q & \hookrightarrow & X & \xrightarrow{p} & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\ker q) \otimes_A B & \longrightarrow & X \otimes_A B & \longrightarrow & M \otimes_A B \end{array}$$

Wir wollen zeigen, daß $\ker q \rightarrow X \otimes_A B$ trivial ist. Es gilt $(m, n) \in \ker q$ genau dann, wenn $n = 0$ ist und $m \otimes 1 = 0$ in $M \otimes_A B$. Also ist $\ker q \rightarrow M$ injektiv und $\ker q \rightarrow M \otimes_A B$ trivial. Da B flach ist, ist auch $(\ker q) \otimes_A B \rightarrow M \otimes_A B$ injektiv, und damit ist $\ker q \rightarrow (\ker q) \otimes_A B$ trivial, woraus die Behauptung folgt.

b) f ist kein Nullteiler auf K . Betrachten wir nämlich das folgende exakte Diagramm exakter Sequenzen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & X & & & & \\ & & \downarrow & \searrow q & & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & X \otimes_A B & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & X \otimes_A (B/A) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Da wir $\ker q \subset \ker(X \rightarrow X \otimes_A B)$ haben, zeigt eine problemlose Diagrammjagd, daß $K \rightarrow X \otimes_A (B/A)$ injektiv ist. Da B/A aber ein A_f -Modul ist, operiert f auf $X \otimes_A (B/A)$ invertierbar und damit auf K injektiv.

c) Es ist $K_f = 0$. Denn lokalisieren wir im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & N \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ X \otimes_A B & & X \otimes_A B \\ \downarrow p & \searrow p \otimes \text{id} & \downarrow \\ M \otimes_A B & & M \otimes_A B \\ \downarrow p & \searrow \sigma & \downarrow \\ M & \xrightarrow{\cong} & N_f \end{array}$$

alles nach f , so bleibt das äußere Quadrat kartesisch.^(viii) Der vertikale Pfeil ganz rechts wird aber invertierbar, also auch der linke und damit ebenso der mittlere. Daraus folgt aber die Invertierbarkeit von $(X \otimes_A B)_f \rightarrow N_f$, und wegen der Exaktheit der Lokalisierung bedeutet das $K_f = 0$.

^(viii) Dies gilt ganz allgemein für beliebige Lokalisierungen und beliebige kartesische Quadrate von Moduln; den Beweis überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe.

Da aber f kein Nullteiler auf K ist, folgt aus $K_f = 0$ bereits $K = 0$, also die behauptete Injektivität. \square

Beweis von Satz 2.5.1. Wir haben Funktoren

$$\begin{aligned} F : \mathbf{Mod}_A &\rightarrow \mathbf{Mod}_{A_f} \times_{\mathbf{Mod}_{B_f}} \mathbf{Mod}_B, & X &\mapsto \left(X_f, X \otimes_A B, X_f \otimes_{A_f} B \xrightarrow{\cong} (X \otimes_A B)_f \right), \\ G : \mathbf{Mod}_{A_f} \times_{\mathbf{Mod}_{B_f}} \mathbf{Mod}_B &\rightarrow \mathbf{Mod}_A, & (M, N, M \otimes_{A_f} B \xrightarrow{\cong} N_f) &\mapsto M \times_{N_f} N, \end{aligned}$$

wobei die Wirkung auf Morphismen offensichtlich ist. Dann zeigt 2.5.6 gerade $F \circ G \cong \text{id}$ und 2.5.2 gerade $G \circ F \cong \text{id}$. Also sind F und G quasi-inverse Äquivalenzen von Kategorien. \square

Die Sätze in diesem Abschnitt stammen im Wesentlichen von Bhatwadekar ([Bh]). Der Begriff einer verklebenden Abbildung ist bei ihm allerdings schwächer: er verzichtet auf die Flachheit und fordert stattdessen $A/f^k A \xrightarrow{\cong} B/f^k B$ für alle $k \geq 1$ (vgl. 2.5.3). Allerdings kann er dann den Verklebungssatz nur für endlich erzeugte Moduln beweisen, was uns nicht genügt.

2.5.8 Bemerkung. Ist $A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$, so ist $A \rightarrow A_f \times B$ treuflach (und endlich präsentierbar): die Flachheit ist klar, und die Surjektivität auf Spektren entnimmt man dem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } B/fB & \xrightarrow{\cong} & \text{Spec } A/fA \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } B & \longrightarrow & \text{Spec } A \end{array}$$

(Beachte, daß das Bild von $\text{Spec } A/fA \rightarrow \text{Spec } A$ genau das Komplement von $D(f)$ ist.)

Falls $A \rightarrow B$ von endlichem Typ ist, sind wir damit im Prinzip in der Situation des Satzes über treuflachen Abstieg von Moduln: ein $A_f \times B$ -Modul ist dasselbe wie ein Paar (M, N) aus einem A_f -Modul M und einem B -Modul N . Es stellt sich die Frage, ob man Satz 2.5.1 nicht auch aus dem allgemeinen Satz über treuflachen Abstieg gewinnen kann. Dazu müßte man aus einem Isomorphismus $\sigma : M \otimes_{A_f} B \xrightarrow{\cong} N_f$ ein Verklebedatum des $A_f \times B$ -Moduls $M \times N$ konstruieren. Dies läuft auf die Konstruktion eines $B \otimes_{A_f} B$ -linearen Isomorphismus $N \otimes_{A_f} B \xrightarrow{\cong} B \otimes_{A_f} N$ hinaus. De facto verwenden wir hierbei die folgende Konstruktion: es sei $U \subset N$ der A -Untermodul aller $n \in N$, für die es ein $m \in M$ gibt mit $\sigma(m \otimes 1) = \frac{n}{1}$. Dann nehmen wir den Isomorphismus von $B \otimes_{A_f} B$ -Moduln

$$\begin{aligned} N \otimes_{A_f} B &\rightarrow B \otimes_{A_f} N \\ (b \cdot u) \otimes b' &\mapsto b \otimes (b' \cdot u) \quad \text{für alle } u \in U, b, b' \in B. \end{aligned}$$

Zu zeigen, daß diese Vorschrift eine wohldefinierte Abbildung liefert, scheint jedoch nicht einfacher zu sein, als unseren Satz direkt zu beweisen.

2.5.2 Verkleben von Torseuren

Es seien $R \rightarrow S \leftarrow R'$ Homomorphismen von A -Algebren. In $\mathbf{Mod}_R \times_{\mathbf{Mod}_S} \mathbf{Mod}_{R'}$ können wir ein Tensorprodukt definieren durch

$$(M, M', \varphi) \otimes (N, N', \psi) := (M \otimes_R N, M' \otimes_{R'} N', (\varphi \otimes_R S) \otimes_S (\psi \otimes_{R'} S)),$$

wobei $\varphi : M \otimes_R S \xrightarrow{\cong} M' \otimes_{R'} S$ ist usw. Der kanonische Funktor $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_R \times_{\mathbf{Mod}_S} \mathbf{Mod}_{R'}$ vertauscht dann mit Tensorprodukten. Im Fall, daß er eine Äquivalenz von Kategorien ist, vertauscht dann insbesondere auch der quasiinverse Funktor mit Tensorprodukten. Daraus ergibt sich:

2.5.9 Proposition. *Es sei $\varphi : A \rightarrow B$ verklebend in f . Dann gilt der Verklebesatz 2.5.1 entsprechend auch für die Kategorie der Algebren, der Hopfalgebren usw.*

Zur Vereinfachung der Sprechweise vereinbaren wir: ein Objekt $(X, X', \varphi) \in \mathbf{Alg}_R \times_{\mathbf{Alg}_S} \mathbf{Alg}(R')$ heiße endlich erzeugt (endlich präsentierbar, étale, étale Überdeckung, ...), wenn sowohl die R -Algebra X als auch die R' -Algebra X' diese Eigenschaft haben, und dies ist offenbar äquivalent dazu, daß die $R \times R'$ -Algebra $X \times X'$ diese Eigenschaft hat.^(ix) Die letzte Äquivalenz besagt insbesondere auch:

2.5.10 Proposition. *Es sei $\varphi : A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$ und von endlichem Typ. Eine A -Algebra X ist genau dann endlich erzeugt (endlich präsentierbar, étale, étale Überdeckung, ...), wenn sowohl die A_f -Algebra X_f als auch die B -Algebra $X \otimes_A B$ diese Eigenschaft haben.*

Beweis. „Nur dann“ ist klar. Für „immer dann“ beachte, daß $A \rightarrow A_f \times B$ treufach und endlich präsentierbar ist, so daß die Behauptung nach Abstiegstheorie folgt. \square

Beide Propositionen zusammen liefern ohne Mühe den folgenden

2.5.11 Satz. *Es seien A, B noethersche Ringe und $\varphi : A \rightarrow B$ verklebend in $f \in A$. Es sei G ein glattes, affines Gruppenschema über A . Dann ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_{\text{ét}}^1(A, G) & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(B, G) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \check{H}_{\text{ét}}^1(A_f, G) & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(B_f, G) \end{array}$$

kartesisch.

Insbesondere folgt daraus:

2.5.12 Korollar. *In der Situation des Satzes ist die von $A \rightarrow B$ induzierte Abbildung*

$$\ker \left(\check{H}_{\text{ét}}^1(A, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(A_f, G) \right) \rightarrow \ker \left(\check{H}_{\text{ét}}^1(B, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(B_f, G) \right)$$

surjektiv.

2.6 Generische Koordinatentransformationen und Normalformen

Definition. Es sei X ein topologischer Raum und \mathcal{P} eine Eigenschaft von Punkten von X (also eine Abbildung $\mathcal{P} : X \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$). Man sagt, ein *generischer Punkt von X erfülle \mathcal{P}* , wenn es eine dichte offene Teilmenge $U \subset X$ gibt mit $\mathcal{P}(x)$ für alle $x \in U$.

Die Nützlichkeit dieser Begriffsbildung ergibt sich aus folgender Beobachtung: Ist \mathcal{Q} eine weitere Eigenschaft, und erfüllt ein generischer Punkt von X auch \mathcal{Q} , so erfüllt ein generischer Punkt von X sogar $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$. Dies liegt daran, daß zwei dichte offene Teilmengen stets nichtleeren Schnitt haben, der wieder offen und dicht ist.

Besonders oft verwenden wir den Begriff im Falle eines *irreduziblen* Raumes X , denn dann ist ja für offene Teilmengen „dicht“ gleichbedeutend mit „nichtleer“. Ist beispielsweise k ein unendlicher Körper, so ist eine generische Matrix in $M_n(k)$ (mit der k -Topologie) invertierbar (denn $M_n(k) = \mathbb{A}^{n^2}(k)$ ist irreduzibel).

^(ix)Beachte in diesem Zusammenhang die kanonische Äquivalenz von Kategorien $\mathbf{Alg}_R \times \mathbf{Alg}_{R'} \xrightarrow{\cong} \mathbf{Alg}_{R \times R'}$, $(X, X') \mapsto X \times X'$.

2.6.1 Generische Normierung von Polynomen

Ist $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom und $Q = (q_{ij}) \in GL_n(k)$ eine Matrix, so bezeichnen wir mit f^Q das Polynom $f(Y_1, \dots, Y_n) \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $(Y_1, \dots, Y_n) := Q(X_1, \dots, X_n)$, d.h. $Y_i = \sum_{j=1}^n q_{ij} X_j$. In suggestiver Notation gilt dann $f^Q(X_1, \dots, X_n) = f(Q(X_1, \dots, X_n))$. Die durch $f \mapsto f^Q$ dargestellte Abbildung auf Varietätenseite ist die Abbildung $(x_1 \dots x_n)^T \mapsto Q(x_1 \dots x_n)^T$. Die Abbildung $f \mapsto f^Q$ erhält Homogenität und Grad von Polynomen.

Ist k ein Körper und $d \geq 0$, so bezeichnen wir mit $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$ die Menge aller Polynome mit Gesamtgrad $\leq d$ ist. Indem wir ein Polynom mit der Folge seiner Koeffizienten identifizieren, erhalten wir eine Identifikation von $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$ mit einem $\mathbb{A}^s(k)$ und insbesondere eine Topologie auf $k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d}$.

2.6.1 Lemma. *Es sei k ein unendlicher Körper. Betrachte die Funktion $\ell : k[X_1, \dots, X_n]_{\leq d} \times GL_n(k) \rightarrow k$, die einem Polynom f und einer Matrix Q den X_n^d -Koeffizienten von f^Q zuordnet. Dann ist ℓ gegeben durch eine nichttriviale reguläre Funktion.*

Beweis. Direktes Nachrechnen: mit $Q = (q_{ij})$ ist

$$f^Q = f\left(\sum_{j=1}^n q_{1j} X_j, \dots, \sum_{j=1}^n q_{nj} X_j\right).$$

Es sei $f = \sum_{e_1 + \dots + e_n \leq d} a_{e_1, \dots, e_n} X_1^{e_1} \dots X_n^{e_n}$. Dann ist

$$f^Q = \sum_{e_1 + \dots + e_n \leq d} a_{e_1, \dots, e_n} \left(\sum_{j=1}^n q_{1j} X_j\right)^{e_1} \cdot \dots \cdot \left(\sum_{j=1}^n q_{nj} X_j\right)^{e_n},$$

und der Koeffizient von X_n^d in dieser Summe ist

$$\sum_{e_1 + \dots + e_n = d} a_{e_1, \dots, e_n} q_{1n}^{e_1} \cdot \dots \cdot q_{nn}^{e_n}.$$

Dies ist aber ein nichttriviales Polynom in den a_{e_1, \dots, e_n} und den q_{ij} , und ein nichttriviales Polynom stellt eine nichttriviale reguläre Funktion dar, da der Grundkörper unendlich ist. \square

2.6.2 Proposition. *Es sei k ein unendlicher Körper und $0 \neq f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein Polynom. Nach einer generischen Koordinatentransformation aus $GL_n(k)$ wird f unitär in X_n .*

Beweis. Sei d der Gesamtgrad von f . Nach dem Lemma hat f nach einer generischen Koordinatentransformation einen nichtverschwindenden Koeffizienten aus k bei X_n^d , ist also insbesondere unitär in X_n . \square

2.6.2 Generische Trennung von Polynomen

2.6.3 Lemma („Generische Trennung von Schatten“). *Es sei k ein unendlicher Körper, $Y \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$ ein abgeschlossenes Unterschema mit $\dim Y \leq n - 2$ und $z \in \mathbb{A}_k^n$ ein abgeschlossener Punkt mit $z \notin Y$. Es sei $p : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^{n-1}$ die Abbildung, die die letzte Koordinate vergißt. Dann gilt $A(Y) \cap p^{-1}(p(A_z)) = \emptyset$ für eine generische Matrix $A \in GL_n(k)$.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, daß k algebraisch abgeschlossen ist. Es sei $z \in \mathbb{A}^n(k)$ der zu \mathfrak{z} korrespondierende k -wertige Punkt, und es sei $Q \hookrightarrow GL_n(k) \times Y(k)$ die Menge aller (A, y) mit $p(Ay) = p(Az)$. (Insbesondere ist Q also durch ein abgeschlossenes Unterschema von $GL_n \times Y$ definiert; hier geht ein, daß k algebraisch abgeschlossen, also \mathfrak{z} rational ist.) Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Q & \longrightarrow & Y(k) \\ \downarrow & & \downarrow g \\ GL_n(k) & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^{n-1}(k), \end{array}$$

wobei h eine Matrix A auf die Gerade $\ker(p \circ A) \subset \mathbb{A}^n(k)$ abbildet und g einen Punkt $y \neq z$ auf die Gerade durch 0 und $y - z$. Das Diagramm kommutiert nach Konstruktion von Q . Offensichtlich ist g induziert von einem Morphismus von Schemata (ebenso h , was interessanter, aber für uns unnötig ist), also wegen $\dim Y(k) < n - 1 = \dim \mathbb{P}^{n-1}(k)$ nicht dominant. Also ist auch die Komposition $Q \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}(k)$ nicht dominant; da aber h surjektiv ist und Kompositionen dominanter Abbildungen dominant bleiben, kann die Projektion $Q \rightarrow GL_n(k)$ folglich nicht dominant sein. Das Komplement ihres Bildes enthält also eine nichtleere offene Teilmenge $\mathfrak{A} \subset GL_n(k)$. Ist nun $A \in \mathfrak{A}$, so gibt es kein $y \in Y(k)$ mit $(A, y) \in Q$, also $p(Ay) = p(Az)$, und das heißt $A(Y(k)) \cap p^{-1}\{p(Az)\} = \emptyset$, und das zeigt die Behauptung.

Ist k nun ein beliebiger unendlicher Körper, so wähle einen algebraischen Abschluß $\bar{k} \supset k$ und betrachte die Unterschemata $Y_{\bar{k}}, Z_{\bar{k}} = \text{Spec } \kappa(\mathfrak{z}) \times_k \bar{k} \subset \mathbb{A}_{\bar{k}}^n$. Dann ist $Z_{\bar{k}}$ eine *endliche* Menge abgeschlossener Punkte, und nach dem schon Bewiesenen gilt für eine generische Matrix $A \in GL_n(\bar{k})$ (mit der \bar{k} -Topologie) $A(Y_{\bar{k}}) \cap p^{-1}(pA(Z_{\bar{k}})) = \emptyset$. Aber $GL_n(k)$ ist in $GL_n(\bar{k})$ (mit der \bar{k} -Topologie) dicht (1.1.7), also gilt nach 1.1.8 dasselbe auch für eine generische Matrix $A \in GL_n(k)$. Aus

$$\bar{k} \times_k (A(Y) \cap p^{-1}(pA(Z))) = A(Y_{\bar{k}}) \cap p^{-1}(pA(Z_{\bar{k}})) = \emptyset,$$

folgt dann $A(Y) \cap p^{-1}(pA(Z)) = \emptyset$. □

2.6.4 Proposition. *Es sei k ein unendlicher Körper, $\mathfrak{m} \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein maximales Ideal und $f, g \in k[X_1, \dots, X_n]$ teilerfremde nichtverschwindende Polynome mit $f \in \mathfrak{m}$, $g \notin \mathfrak{m}$. Nach einer generischen Koordinatentransformation aus $GL_n(k)$ sind dann \bar{f} und \bar{g} teilerfremd in $k[X_1, \dots, X_n]/(\mathfrak{m})$ (mit $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap k[X_1, \dots, X_{n-1}]$).*

Beweis. Sei $\mathfrak{z} = \mathfrak{m} \in \mathbb{A}_k^n$ und $Y = \text{Spec } k[X_1, \dots, X_n]/(f, g) \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$. Dann gilt $\mathfrak{z} \notin Y$ wegen $g \notin \mathfrak{m}$, und es ist $\dim Y \leq n - 2$: ist nämlich \mathfrak{p} ein minimales Primideal oberhalb von (f, g) , so ist $\mathfrak{p} \neq 0$; wäre aber $\text{ht } \mathfrak{p} = 1$, so wäre \mathfrak{p} nach dem Krullschen Hauptidealsatz zyklisch (denn $k[X_1, \dots, X_n]$ ist faktoriell!), also $\mathfrak{p} = (h)$ mit einem irreduziblen Polynom h , und das bedeutete $h \mid f$ und $h \mid g$, Widerspruch. Also ist $\text{ht } \mathfrak{p} \geq 2$, also $\dim V(\mathfrak{p}) \leq n - 2$ und damit $\dim Y \leq n - 2$.^(x)

Also sind wir in der Situation des Lemmas. Nach einer Transformation mit einer generischen Matrix aus $GL_n(k)$ gilt dann $\emptyset = Y \cap p^{-1}(p(Z)) = V((f, g) + (\mathfrak{n}))$, also $(f, g) + (\mathfrak{n}) = \mathfrak{1}$, und das bedeutet $(\bar{f}, \bar{g}) = k[X_1, \dots, X_n]/(\mathfrak{n})$, wie behauptet. □

2.6.3 Generische Noethersche Normalisierung

Wir benötigen eine Verallgemeinerung des Noetherschen Normalisierungslemmas. Die einfachste Version lautet bekanntlich:

^(x)De facto ist Y sogar äquidimensional der Dimension $n - 2$; dies folgt ebenfalls aus dem Hauptidealsatz.

2.6.5 Proposition (Noethersche Normalisierung). *Es sei k ein Körper und A eine k -Algebra mit Erzeugern x_1, \dots, x_n . Nach einer linearen Koordinatentransformation gibt es dann ein $0 \leq d \leq n$, so daß x_1, \dots, x_d algebraisch unabhängig sind und die Erweiterung $k[x_1, \dots, x_d] \subset k[x_1, \dots, x_n]$ endlich ist. Außerdem gilt dann $d = \dim A$.*

Im Falle eines *unendlichen* Grundkörpers ist der Beweis eine einfache Induktion nach n : Sind x_1, \dots, x_n algebraisch unabhängig (etwa $n = 0$), so ist nichts zu tun. Andernfalls gibt es ein $F \in k[X_1, \dots, X_n]$ mit $F(x_1, \dots, x_n) = 0$. Wegen 2.6.2 können wir nach einer linearen Koordinatentransformation annehmen, daß F unitär in X_n ist, und dann ist x_n ganz über $k[x_1, \dots, x_{n-1}] =: A'$, d.h. $A' \subset A$ ist endlich. Wende nun die Induktionsvoraussetzung auf A' an. – Der Beweis für einen *beliebigen* Grundkörper findet sich etwa in [Mat, 14.G]. Die Dimensionsaussage folgt aus $\dim A = \dim B$ für eine ganze Erweiterung $A \subset B$ noetherscher Ringe (Going-Up) und dem Satz über die Dimension des Polynomrings.

Noethersche Normalisierung ist das Bindeglied zwischen den verschiedenen Dimensionsbegriffen der algebraischen Geometrie: sei nämlich A zusätzlich nullteilerfrei. Nach der Proposition finden wir einen Polynomring $k[X_1, \dots, X_d] = A' \subset A$, so daß A über A' endlich ist. Sei $S = A' - \{0\}$. Dann ist $\text{Quot } A' = S^{-1}A' \subset S^{-1}A$ endlich, also $\text{Quot } A = S^{-1}A$. Insbesondere ist $\text{Quot } A$ über $\text{Quot } A' = k(X_1, \dots, X_n)$ endlich und damit algebraisch, und das bedeutet $\text{tr. deg}_k \text{Quot } A = d = \dim A$.

Wir benötigen nun die folgende Verbesserung des Normalisierungslemmas: über einem unendlichen Grundkörper *existiert* nicht nur eine Koordinatentransformation, die das Gewünschte tut, sondern *fast jede* Transformation ist geeignet.

2.6.6 Satz (Generische Noethersche Normalisierung). *Es sei k ein unendlicher Körper, A eine k -Algebra mit Erzeugern x_1, \dots, x_n , und es sei $d = \dim A$. Nach einer generischen Koordinatentransformation in $\text{GL}_n(k)$ ist dann A endlich über $k[x_1, \dots, x_d]$, und x_1, \dots, x_d sind algebraisch unabhängig.*

Zum Beweis zunächst ein

2.6.7 Lemma. *Es sei k ein unendlicher Körper, A eine k -Algebra mit Erzeugern x_1, \dots, x_n , und es sei $d = \dim A < n$. Dann können wir für jede Matrix $Q \in \text{GL}_n(k)$ derart ein Polynom $g_Q \in k[X_1, \dots, X_{d+1}]$ mit $g_Q(y_1, \dots, y_{d+1}) = 0$ für $(y_1, \dots, y_n) = Q(x_1, \dots, x_n)$ wählen, daß die Abbildung $Q \mapsto g_Q$ polynomial und nichttrivial ist.*

Genauer bedeutet das: wir finden ein Polynom $0 \neq G \in k[T_{11}, \dots, T_{nn}, X_1, \dots, X_{d+1}]$, so daß für $Q = (q_{ij})$ gilt: $g_Q = G(q_{11}, \dots, q_{nn}, X_1, \dots, X_{d+1})$.

Beweis. Schreibe $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$, und sei $X = \text{Spec } A \hookrightarrow \mathbb{A}_k^n$. Betrachte den Automorphismus φ von $\text{GL}_n \times \mathbb{A}_k^n$, der gegeben ist durch $(Q, x) \mapsto (Q, Qx)$. Sei Y das Bild des abgeschlossenen Unterschemas $\text{GL}_n \times X$ unter φ , und sei $\pi: \text{GL}_n \times \mathbb{A}_k^n \rightarrow \text{GL}_n \times \mathbb{A}_k^{d+1}$ induziert von der Projektion auf die ersten $d+1$ Koordinaten von \mathbb{A}_k^n . Sei $Z = \overline{\pi(Y)}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{GL}_n \times X & \xrightarrow{\cong} & Y & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \text{GL}_n \times \mathbb{A}_k^n & \xrightarrow[\varphi]{\cong} & \text{GL}_n \times \mathbb{A}_k^n & \xrightarrow{\pi} & \text{GL}_n \times \mathbb{A}_k^{d+1}
 \end{array}$$

Dann ist $\dim Z \leq \dim Y = n^2 + d < n^2 + d + 1$, also ist Z nicht dicht in $\text{GL}_n \times \mathbb{A}_k^{d+1}$, und wir finden ein Polynom $0 \neq G \in k[T_{11}, \dots, T_{nn}, X_1, \dots, X_{d+1}]$ mit $Z \subset V(G)$. Wir behaupten, daß G das Gewünschte tut.

Sei nämlich $Q \in GL_n(k) = \text{Hom}_k(\text{Spec } k, GL_{n,k})$ eine Matrix. Der Pullback mittels Q liefert folgende Situation:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\cong} & Y_Q & \longrightarrow & Z_Q \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}_k^n & \xrightarrow{\varphi_Q} & \mathbb{A}_k^n & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{A}_k^{d+1} \end{array}$$

Hier ist $Y_Q := Y \times_Q \text{Spec } k$ das Bild von X unter der Abbildung $\varphi_Q : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \mathbb{A}_k^n$, die auf Punkten gegeben ist durch $x \mapsto Qx$, und auf Ringseite durch $f \mapsto f^Q$.

Setze $g_Q := G(q_{11}, \dots, q_{nn}, X_1, \dots, X_{d+1})$. Dann faktorisiert die Projektion $Y_Q \rightarrow \mathbb{A}_k^{d+1}$ über das abgeschlossene Unterschema $\text{Spec } k[X_1, \dots, X_{d+1}]/(g_Q)$, und insbesondere liegt g_Q im Ideal von Y_Q in $k[X_1, \dots, X_n]$. Das bedeutet $g_Q^Q \in I$, also ist

$$0 = g_Q^Q(x_1, \dots, x_n) = g_Q(Q(x_1, \dots, x_n)) = g_Q(y_1, \dots, y_{d+1})$$

mit $(y_1, \dots, y_n) := Q(x_1, \dots, x_n)$. □

Beweis von 2.6.6. Es genügt zu zeigen: ist $d < r \leq n$, so ist für eine generische Matrix $S \in GL_n(k)$ und $(z_1, \dots, z_n) := S(x_1, \dots, x_n)$ das Element z_r ganz über $k[z_1, \dots, z_d]$. (Dann folgt die Endlichkeit, und die algebraische Unabhängigkeit ergibt sich dann aus $\dim k[z_1, \dots, z_d] = \dim A = d$.) Ohne Verlust an Allgemeinheit können wir außerdem $r = d + 1$ annehmen. Sei also $\mathfrak{S} \subset GL_n(k)$ die Menge aller Matrizen, die das Gewünschte tun.

Wähle ein Polynom $G \in k[T_{11}, \dots, T_{nn}, X_1, \dots, X_{d+1}]$ wie im Lemma. Sind $Q \in GL_n(k)$ und $R \in GL_{d+1}(k)$ Matrizen, so gilt

$$0 = g_Q(Q(x_1, \dots, x_n)) = g_Q(y_1, \dots, y_{d+1}) = g_Q^R(z_1, \dots, z_{d+1})$$

mit $(y_1, \dots, y_n) := Q(x_1, \dots, x_n)$ und $(z_1, \dots, z_{d+1}) := R^{-1}(y_1, \dots, y_{d+1})$. Fassen wir $GL_{d+1}(k)$ als „linke obere Ecke“ von $GL_n(k)$ auf, so folgt daraus: ist g_Q^R unitär in X_{d+1} , so ist $S := R^{-1}Q \in \mathfrak{S}$.

Es sei s der Gesamtgrad von G in den X_1, \dots, X_{d+1} . Für eine Matrix $Q \in GL_n(k)$ und eine Matrix $R \in GL_{d+1}(k)$ ist dann der X_{d+1} -Koeffizient von g_Q^R gegeben durch eine nichttriviale (!) reguläre Funktion in Q und R . Also enthält

$$\{(R, Q) \mid g_Q^R \text{ ist unitär in } X_{d+1}\} \subset (GL_{d+1} \times GL_n)(k)$$

eine offene und nichtleere Teilmenge (in der k -Topologie). Durch den Automorphismus $(R, Q) \mapsto (R, R^{-1}Q)$ (wobei wir GL_{d+1} wieder als „linke obere Ecke“ von GL_n auffassen) und anschließende Projektion nach GL_n (die nach 1.1.10 offen ist) erhalten wir dann eine nichtleere offene Teilmenge von $GL_n(k)$, die komplett in \mathfrak{S} liegt. □

2.6.8 Bemerkung. *Der Satz ist eine Variante von [Kn, VIII.3.2.4]. Der dort gegebene Beweis scheint jedoch, in unserer Notation, die Abhängigkeit der zulässigen Matrizen R von der Matrix Q nicht zu berücksichtigen.*

2.6.4 Generische Normalform glatter Algebren

Es sei k ein Ring. Eine k -Algebra A ist genau dann glatt in einem Ideal $\mathfrak{p} \subset A$, wenn es einen Homomorphismus $k[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A$ gibt, der in \mathfrak{p} étale ist ([EGA, IV.17.11.4]), und falls k noethersch ist, ist dann notwendig $d = \dim A_{\mathfrak{p}}$ ([EGA, IV.17.6.4]). Im Fall, daß k ein unendlicher Körper ist, beweisen wir in diesem Abschnitt eine Verallgemeinerung dieses Resultats: ist A von endlichem Typ und glatt in einem maximalen Ideal \mathfrak{m} mit $\dim A_{\mathfrak{m}} = d$, so ist für „so gut wie jede“ Wahl von Erzeugern x_1, \dots, x_n der Homomorphismus $k[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A, X_i \mapsto x_i$, étale in \mathfrak{m} .

2.6.9 Proposition (Generische Normalform glatter Algebren). *Es sei k ein unendlicher Körper und A eine k -Algebra mit Erzeugern x_1, \dots, x_n . Sei $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, in dem A glatt über k sei mit $\dim A_{\mathfrak{m}} = d$. Für eine generische Matrix $Q = (q_{ij}) \in GL_n(k)$ gilt dann: mit $(y_1, \dots, y_n) := Q(x_1, \dots, x_n)$ ist der Homomorphismus $k[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A$, $X_i \mapsto y_i$, étale in \mathfrak{m} .*

Beweis. Schreibe $A = k[X_1, \dots, X_n]/I$ (mit $x_i = \overline{X_i}$), und es sei $\mathfrak{n} \supset I$ das zu \mathfrak{m} korrespondierende maximale Ideal im Polynomring. Nach Satz 1.2.14 und seinem Zusatz (der $r = \dim k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{n}} - \dim A_{\mathfrak{m}} = n - d$ im Satz garantiert) finden wir dann Elemente $F_{d+1}, \dots, F_n \in I$ mit folgenden Eigenschaften: Das Ideal $IA_{\mathfrak{m}} \subset A_{\mathfrak{m}}$ wird von F_{d+1}, \dots, F_n erzeugt, und mindestens ein r -reihiger Minor der Jacobimatrix $(\partial F_i / \partial X_j)$ liegt nicht in \mathfrak{n} .

Durch Umnummerierung der Erzeuger können wir annehmen, daß dieser Minor gerade die Determinante derjenigen Teilmatrix ist, die aus den letzten r Spalten der Jacobimatrix besteht. Setzen wir außerdem $\tilde{I} := (F_{d+1}, \dots, F_n) \subset I$, so genügt es, die Aussage für den Ring $\tilde{A} = k[X_1, \dots, X_n] / \tilde{I}$ zu zeigen, denn die Projektion $\tilde{A} \rightarrow A$ ist in \mathfrak{m} ein Isomorphismus. Wir können also A durch \tilde{A} ersetzen und also annehmen, daß von Anfang an $I = (F_{d+1}, \dots, F_n)$ und $\det(\partial F_i / \partial X_j)_{d < i, j \leq n} \notin \mathfrak{n}$ gilt. (\tilde{A} ist *de facto* auch noch glatt über k in \mathfrak{m} , aber das benötigen wir nicht mehr.)

Insbesondere *gibt* es eine Matrix Q , die das Gewünschte tut: denn nun ist $\pi : k[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A$, $X_i \mapsto x_i$, nach 1.2.13 étale in \mathfrak{m} , und bislang haben wir nur die gegebenen Erzeuger von A umnummeriert. Es bleibt nur zu zeigen, daß die gewünschte Eigenschaft bei genügend vielen Transformationen erhalten bleibt.

Sei dazu $Q = (q_{ij}) \in GL_n(k)$ eine invertierbare Matrix, $Q^{-1} =: R = (r_{ij})$, und sei $\tau : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$, $f \mapsto f^Q$ sowie $\sigma = \tau^{-1}$, $\sigma(f) = f^R$. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 k[X_1, \dots, X_d] & & k[X_1, \dots, X_d] \\
 \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\
 k[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\tau} & k[X_1, \dots, X_n] \\
 & \searrow \pi' & \downarrow \pi \\
 & & A
 \end{array}$$

Uns interessiert die Abbildung $\pi' \circ \iota : k[X_1, \dots, X_d] \rightarrow A$, $X_i \mapsto \pi(X_i^Q) = y_i$ mit $(y_1, \dots, y_n) := Q(x_1, \dots, x_n)$.

Es ist $\ker \pi = (F_{d+1}, \dots, F_n)$, also $\ker \pi' = \sigma(\ker \pi) = (F_{d+1}^R, \dots, F_n^R)$. Nach der Kettenregel erhalten wir

$$\frac{\partial F_i^R}{\partial X_j} = \frac{\partial (F_i(R(X_1, \dots, X_n)))}{\partial X_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial X_k}(R(X_1, \dots, X_n)) \cdot r_{kj} = \sigma\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial X_k} \cdot r_{kj}\right),$$

also $(\partial F_i^R / \partial X_j)_{i,j} = (\sigma(\partial F_i / \partial X_j))_{i,j} \cdot R$ und insbesondere

$$(\partial F_i^R / \partial X_j)_{d < i, j \leq n} = (\sigma(\partial F_i / \partial X_j))_{i,j} \cdot R',$$

wobei R' die Matrix ist, die aus den Spalten $d+1, \dots, n$ von R besteht. Wir möchten, daß die Determinante dieses Produktes nicht in $\sigma(\mathfrak{n})$ liegt, daß also $\det((\sigma(\partial F_i / \partial X_j))_{i,j} \cdot R')$ in $\kappa(\mathfrak{n})$ nichtverschwindendes Bild hat. Die Menge aller Matrizen $Q = R^{-1} \in GL_n(k)$ mit dieser Eigenschaft ist Schnitt einer $\kappa(\mathfrak{n})$ -offenen Menge in $GL_n(\kappa(\mathfrak{n}))$ mit $GL_n(k)$, also k -offen nach 1.1.8. Außerdem enthält sie die Einheitsmatrix, ist also nicht leer.

□

2.6.5 Normalisierung von Varietäten

2.6.10 Satz (Ojanguren). *Es sei k ein unendlicher Körper und X ein k -Schema von endlichem Typ. Sei X glatt im abgeschlossenen Punkt x und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{X,x}$. Ist $0 \neq I \subsetneq \mathcal{O}$ ein Ideal, so finden wir einen lokalen Ring \mathcal{O}' , der Lokalisierung von $k[X_1, \dots, X_d]$ in einem maximalen Ideal ist, und einen étalen Homomorphismus $\varphi : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$, so daß $\mathcal{O}'/I' \rightarrow \mathcal{O}/I$ (mit $I' = \varphi^{-1}(I)$) invertierbar ist.*

Ist zusätzlich $I = (f)$ zyklisch, so ist auch $I' = (f')$ zyklisch, und $\varphi(f')$ ist assoziiert zu f . Insbesondere ist $\mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ dann verklebend bezüglich f' (vgl. Abschnitt 2.5.1).

2.6.11 Lemma. *Es sei k ein unendlicher Körper und $\varphi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus von k -Algebren. Es sei B endlich erzeugt, etwa $B = k[y_1, \dots, y_n]$, und seien $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r \subset B$ paarweise verschiedene maximale Ideale. Für einen generischen Vektor $Q = (q_i) \in \mathbb{A}^{1 \times n}(k)$ gilt dann für den Homomorphismus $\tilde{\varphi}_Q : A[T] \rightarrow B$ mit $T \mapsto Q(y_1, \dots, y_n) = \sum_j q_j y_j$: die maximalen Ideale $\mathfrak{n}_i := \tilde{\varphi}_Q^{-1}(\mathfrak{m}_i) \subset A[T]$ sind paarweise verschieden, und die (algebraischen) Körpererweiterungen $A[T]/\mathfrak{n}_i \subset B/\mathfrak{m}_i$ sind rein inseparabel.*

Beweis. Es genügt, sich auf den Fall eines bzw. zweier maximaler Ideale zu beschränken. Zunächst bemerken wir: sind $\sigma \neq \sigma' : B \rightarrow C$ Homomorphismen in irgendeine k -Algebra C , so gilt $\sigma \circ \tilde{\varphi}_Q \neq \sigma' \circ \tilde{\varphi}_Q$ für ein generisches $Q = (q_i) \in \mathbb{A}^{1 \times n}(k)$. Denn $\sigma \circ \tilde{\varphi}_Q = \sigma' \circ \tilde{\varphi}_Q$ gilt genau dann, wenn $\sum_j q_j (\sigma(y_j) - \sigma'(y_j)) = 0$ ist, und dies gilt auf einem linearen Unterraum von $\mathbb{A}^n(k)$, der nicht ganz $\mathbb{A}^n(k)$ ist (denn $\sigma(y_j) \neq \sigma'(y_j)$ für ein j). Dessen Komplement ist dann offen und, da k unendlich ist, dicht.

Fixieren wir nun einen algebraischen Abschluß $\bar{k} \supset k$. Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \subset B$ ist nach dem Hilbertschen Nullstellensatz B/\mathfrak{m} endlich über k . Es seien $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ die verschiedenen Einbettungen $B/\mathfrak{m} \rightarrow \bar{k}$, wobei $d = [B/\mathfrak{m} : k]_s$ der Separabilitätsgrad ist (vgl. [Bos, 3.6]). Es sei $\pi : B \rightarrow B/\mathfrak{m}$ die Projektion. Nach unserer Vorbemerkung sind für generisches Q die Kompositionen $\sigma_i \circ \pi \circ \tilde{\varphi}_Q : A[T] \rightarrow \bar{k}$ paarweise verschieden, ebenso dann auch die induzierten Einbettungen $A[T]/\mathfrak{n} \rightarrow B/\mathfrak{m} \rightarrow \bar{k}$ mit $\mathfrak{n} = \tilde{\varphi}_Q^{-1}(\mathfrak{m})$. Daraus folgt aber $[A[T]/\mathfrak{n} : k]_s \geq d = [B/\mathfrak{m} : k]_s \geq [A[T]/\mathfrak{n} : k]_s$, und nach der Produktformel für den Separabilitätsgrad heißt das $[B/\mathfrak{m} : A[T]/\mathfrak{n}]_s = 1$, d.h. die Erweiterung ist rein inseparabel.

Sei nun $\mathfrak{m}' \subset B$ noch ein weiteres maximales Ideal, $\pi' : B \rightarrow B/\mathfrak{m}'$. Wähle eine beliebige Einbettung $\sigma' : B/\mathfrak{m}' \hookrightarrow \bar{k}$. Dann ist die Komposition $\sigma' \circ \pi'$ verschieden von allen $\sigma_i \circ \pi$, also ist für generisches Q auch $\sigma' \circ \pi' \circ \tilde{\varphi}_Q : A[T] \rightarrow \bar{k}$ verschieden von allen $\sigma_i \circ \pi \circ \tilde{\varphi}_Q$. Für ein solches Q ist dann aber $\mathfrak{n}' := \tilde{\varphi}_Q^{-1}(\mathfrak{m}')$ verschieden von \mathfrak{n} : denn andernfalls hätten wir $d + 1$ verschiedene Einbettungen $A[T]/\mathfrak{n}$ in \bar{k} gefunden, und das hieße $[A[T]/\mathfrak{n} : k]_s > [B/\mathfrak{m} : k]_s \geq [A[T]/\mathfrak{n} : k]_s$, Widerspruch. \square

2.6.12 Proposition. *Es sei k ein unendlicher Körper, A eine endlich erzeugte k -Algebra und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, so daß A in \mathfrak{m} glatt ist mit $\dim A_{\mathfrak{m}} = \dim A =: d$. Es sei $I \subset \mathfrak{m}$ ein Ideal der Höhe ≥ 1 . Dann finden wir einen Homomorphismus $\varphi : k[X_1, \dots, X_d] =: A' \rightarrow A$, der in \mathfrak{m} étale ist, so daß*

$$\varphi : (A'/I')_{\mathfrak{m}'} \xrightarrow{\cong} (A/I)_{\mathfrak{m}} \quad \text{mit } I' := \varphi^{-1}(I) \text{ und } \mathfrak{m}' := \varphi^{-1}(\mathfrak{m})$$

ein Isomorphismus ist.

Beweis.

1. Schreibe $A = k[x_1, \dots, x_n]$. Wir zeigen unten, daß wir nach einer Koordinatentransformation annehmen können:

- a) $\varphi : A' \rightarrow A, X_i \mapsto x_i$, ist étale in \mathfrak{m} .

b) $\psi : A' \rightarrow A/I, X_i \mapsto \bar{x}_i$, ist endlich, rein inseparabel in \mathfrak{m} , und \mathfrak{m}/I ist das einzige maximale Ideal von A/I über \mathfrak{m}' .

Wir zeigen zunächst, daß $(A/I)_{\mathfrak{m}'} = (A/I)_{\mathfrak{m}}$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß der Ring $(A/I)_{\mathfrak{m}'}$ bereits lokal ist, daß also sein einziges maximales Ideal das von \mathfrak{m}/I induzierte ist. Sei also $\mathfrak{p}/I \subset A/I$ ein Primideal in A , das in $(A/I)_{\mathfrak{m}'}$ maximal wird. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{p}/I \subset \mathfrak{m}/I$ gilt. Wegen $\psi^{-1}(\mathfrak{p}/I) \subset \mathfrak{m}'$ finden wir nach Going-Up finden wir ein Primideal $\tilde{\mathfrak{p}}/I \supset \mathfrak{p}/I$ mit $\psi^{-1}(\tilde{\mathfrak{p}}/I) = \mathfrak{m}'$. Durch Vergrößern können wir annehmen, daß $\tilde{\mathfrak{p}}/I$ sogar ein maximales Ideal ist, aber dann folgt $\tilde{\mathfrak{p}}/I = \mathfrak{m}/I$, und das zeigt die Behauptung.

Da φ in \mathfrak{m} étale ist, haben wir $\mathfrak{m}'A_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$ und insbesondere $\mathfrak{m}'(A/I)_{\mathfrak{m}'} = \mathfrak{m}(A/I)_{\mathfrak{m}}$. Der Homomorphismus endlicher $A'_{\mathfrak{m}'}$ -Moduln $A'_{\mathfrak{m}'} \rightarrow (A/I)_{\mathfrak{m}'} = (A/I)_{\mathfrak{m}}$ geht also nach Basiswechsel zu $A'_{\mathfrak{m}'}/\mathfrak{m}'A'_{\mathfrak{m}'}$ über in die Einbettung $A'/\mathfrak{m}' \rightarrow A/\mathfrak{m}$. Diese ist eine endliche, separable und rein inseparable Körpererweiterung, also bijektiv und insbesondere surjektiv. Nach dem Lemma von Nakayama ist dann auch $A'_{\mathfrak{m}'} \rightarrow (A/I)_{\mathfrak{m}'}$ surjektiv, und aufgrund der Exaktheit der Lokalisierung folgt $(A'/I')_{\mathfrak{m}'} \xrightarrow{\cong} (A/I)_{\mathfrak{m}'} = (A/I)_{\mathfrak{m}}$.

2. Es bleibt zu zeigen, daß wir die Erzeuger wie angegeben wählen können. Es ist $\dim A/I < \dim A = d$, also können wir nach 2.6.6 und 2.6.9 durch einen Koordinatenwechsel annehmen, daß es nichtleere offene Menge $\Omega \subset GL_n(k)$ mit folgender Eigenschaft gibt:

Für alle $Q \in \Omega$ und $(y_1, \dots, y_n) := Q(x_1, \dots, x_n)$ ist $k[Y_1, \dots, Y_d] \rightarrow A, Y_i \mapsto y_i$, étale in \mathfrak{m} , und gleichzeitig ist $k[Y_1, \dots, Y_{d-1}] \rightarrow A/I$ endlich.

Durch einen Koordinatenwechsel können wir annehmen, daß Ω die Einheitsmatrix enthält. Insbesondere ist dann $\psi_0 : k[Y_1, \dots, Y_{d-1}] \rightarrow A/I, Y_i \mapsto \bar{x}_i$ endlich. Sei $\mathfrak{n} := \psi_0^{-1}(\mathfrak{m}/I)$, und seien $\mathfrak{m}_1/I = \mathfrak{m}/I, \mathfrak{m}_2/I, \dots, \mathfrak{m}_r/I \subset A/I$ die verschiedenen maximalen Ideale mit $\psi_0^{-1}(\mathfrak{m}_j/I) = \mathfrak{n}$. Für $R = (r_i) \in \mathbb{A}^{1 \times n}(k)$ sei $\psi_R : k[Y_1, \dots, Y_d] \rightarrow A/I$ die Fortsetzung von ψ_0 mit $Y_d \mapsto \sum_i r_i \bar{x}_i$. Nach 2.6.11 gibt es dann eine nichtleere offene Menge $\mathfrak{R} \in \mathbb{A}^{1 \times n}(k)$ mit folgender Eigenschaft: für jedes $R \in \mathfrak{R}$ sind die $\psi_R^{-1}(\mathfrak{m}_j)$ paarweise verschieden, und ψ_R ist in jedem \mathfrak{m}_j rein inseparabel.

Es sei nun $Q \in \Omega$ eine Matrix der Form

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ r_1 & \dots & r_{d-1} & \dots & r_n & \\ * & \dots & \dots & \dots & * & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ * & \dots & \dots & \dots & * & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (r_1 \ \dots \ r_n) =: R \in \mathfrak{R}.$$

Eine solche Matrix existiert: denn die Menge aller Matrizen in Ω , deren erste $d - 1$ Zeilen mit denen der Einheitsmatrix übereinstimmen, ist offen und nichtleer in $\mathbb{A}^{(n-d+1) \times n}(k)$; die Menge aller d -ten Zeilen dieser Matrizen ist nach 1.1.10 offen in $\mathbb{A}^{1 \times n}(k)$ und schneidet damit \mathfrak{R} .

Setze nun $(y_1, \dots, y_n) := Q(x_1, \dots, x_n)$. Wegen $Q \in \Omega$ ist $\varphi : k[Y_1, \dots, Y_d] \rightarrow A$ étale in \mathfrak{m} . Außerdem ist $y_i = x_i$ für $1 \leq i < d$ und $y_d = \sum_i r_i x_i$, also ist $\psi : k[Y_1, \dots, Y_d] \rightarrow A/I, Y_i \mapsto y_i$, identisch mit ψ_R und insbesondere endlich. Weiter ist $\mathfrak{m}/I \subset A/I$ das einzige maximale Ideal mit Urbild $\psi^{-1}(\mathfrak{m}/I)$: denn jedes weitere müßte unter ψ_0 ebenfalls auf \mathfrak{n} abgebildet werden, also eines der \mathfrak{m}_i/I sein, die aber nach Konstruktion verschiedene Urbilder unter ψ haben. Außerdem ist ψ in \mathfrak{m}/I rein inseparabel. Also erreichen wir das Gewünschte, indem wir die x_i durch die y_i ersetzen. \square

Beweis von Satz 2.6.10. Als regulärer lokaler Ring ist \mathcal{O} nullteilerfrei, liegt also insbesondere in nur einer irreduziblen Komponente von X . Wir können also annehmen, daß X affin und irreduzibel ist; durch weiteres Verkleinern wird X dann auch reduziert. Dann ist X das Spektrum eines Integritätsrings A , $\mathcal{O} = \hat{A}_m$ mit einem maximalen Ideal $m \subset A$, und es folgt $\dim A = \dim \hat{A}_m = d$. Das Urbild von I in A ist nicht trivial, hat also Höhe ≥ 1 . Die Behauptung folgt dann aus 2.6.12.

Sei nun $I = (f)$ zyklisch. Ist $f \in P \subset \mathcal{O}$ ein Primideal der Höhe 1, so hat auch $P' := \varphi^{-1}(P)$ die Höhe 1: denn es ist $\mathcal{O}'/P' \cong \mathcal{O}/P$, und $\text{ht } P + \dim(\mathcal{O}/P) = \dim \mathcal{O} = d = \dim \mathcal{O}' = \text{ht } Q + \dim(\mathcal{O}'/Q')$.^(xi) Da φ^{-1} Primär Ideale erhält und mit Radikalbildung vertauscht, erhält es also endliche Schnitte von Primär Idealen der Höhe 1, aber nach 2.6.13 unten sind das genau die Hauptideale: denn \mathcal{O} und \mathcal{O}' sind als reguläre lokale Ringe faktoriell. Also ist dann auch $I' = (f')$ zyklisch.

Es fehlt noch die Assoziiertheitsaussage. Schreibe $\varphi(f') = f \cdot u$. Da $A'_{m'} \rightarrow A_m$ étale ist und $\kappa(m') \rightarrow \kappa(m)$ invertierbar, ist die induzierte Abbildung auf den Vervollständigungen invertierbar ([SGA I, Exp. I, § 4.4]). Dann ist u eine Einheit in \hat{A}_m und damit nach 2.6.14 unten auch in A . \square

2.6.13 Proposition. *Es sei A ein faktorieller noetherscher Ring. Ein Ideal $I \subset A$ ist genau dann zyklisch, wenn es Schnitt endlich vieler Primär Ideale der Höhe 1 ist.*

Beweis. „Nur dann“. Sei $I = (f)$ und $f = \prod_{i=1}^n p_i^{e_i}$ mit paarweise nichtassozierten Primelementen p_i und Zahlen $e_i > 0$. Dann ist $(f) = \bigcap_{i=1}^n (p_i^{e_i})$, und wir müssen nur zeigen: ist $p \in A$ prim und $e \geq 1$, so ist (p^e) Primär Ideal der Höhe 1. Zunächst ist $\sqrt{(p^e)} = (p)$ das einzige minimale Primideal oberhalb (p^e) und hat nach Krulls Hauptidealsatz Höhe 1. Ist außerdem $xy \in (p^e)$ mit $x \notin (p^e)$, so folgt $p \mid y$ und damit $y^e \in (p^e)$, also ist (p^e) primär.

„Immer dann“. Der Schnitt zweier Hauptideale in einem faktoriellen Ring ist wieder ein Hauptideal, also genügt es zu zeigen: ist $I \subset A$ Primär Ideal der Höhe 1, so ist I zyklisch. Zunächst ist $P := \sqrt{I}$ Primideal der Höhe 1, also (da A faktoriell ist) zyklisch, $P = (p)$. Es gibt ein $e \geq 1$ mit $p^e \in I$; sei e minimal mit dieser Eigenschaft gewählt. Ich behaupte $I = (p^e)$: sei nämlich $a \in I$. Schreibe $a = p^f b$ mit $p \nmid b$. Falls $f < e$, also $p^f \notin I$ gilt, folgt $b \in \sqrt{I} \subset P$, also $p \mid b$, Widerspruch. Also gilt $f \geq e$ und damit $a \in (p^e)$. \square

2.6.14 Lemma. *Es sei A ein noetherscher lokaler Integritätsring, für den auch \hat{A} nullteilerfrei ist (etwa A regulär), und sei $K = \text{Quot } A$, $\hat{K} = \text{Quot } \hat{A}$. Dann gilt $K \cap \hat{A} = A$ in \hat{K} .*

Beweis. [Bou, III, § 3, No. 5, Cor. 3]. \square

2.7 Die Sätze von Colliot-Thélène–Ojanguren

Definition. Es sei k ein unendlicher Körper. Ein *zulässiger k -Funktork* ist ein kovarianter Funktor F von der Kategorie der k -Algebren in die Kategorie der punktierten Mengen, so daß gilt:

1. Ist A eine k -Algebra und $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$, so ist die Abbildung $\varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} F(A_f) \rightarrow F(A_{\mathfrak{p}})$ bijektiv – man sagt, F vertausche mit Lokalisierung.
2. Sind A, B noethersche k -Algebren und ist $\varphi : A \rightarrow B$ verklebend bezüglich $f \in A$, so ist die vom Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_f & \longrightarrow & B_f \end{array}$$

^(xi)Es sei \mathfrak{p} ein Primideal in einem noetherschen Ring A . Die von uns verwendete (und allgemein wünschenswerte) Formel $\dim A = \dim(A/\mathfrak{p}) + \text{ht } \mathfrak{p}$ gilt beispielsweise, falls lokal und Cohen-Macauleysch ist ([Mat, 16.B]), also etwa für reguläre lokale Ringe ([Mat, 17.F]). Ebenso gilt sie, falls A nullteilerfrei und von endlichem Typ über einem Körper ist ([Mat, 14.H]), und damit auch, falls A Lokalisierung eines solchen Rings in einem maximalen Ideal (oder sogar nur einem Primideal) ist.

induzierte Abbildung $\ker(F(A) \rightarrow F(A_f)) \rightarrow \ker(F(B) \rightarrow F(B_f))$ surjektiv.

2.7.1 Beispiel. Ist G ein glattes affines Gruppenschema über k , so ist der Funktor $\check{H}_{\text{ét}}^1(_, G)$ zulässig.

Dies folgt aus Satz 2.2.1 und Korollar 2.5.12.

2.7.2 Satz (Colliot-Thélène–Ojanguren I). *Es sei k ein unendlicher Körper und F ein zulässiger k -Funktorkomplex. Für jedes $n \geq 1$ und jeden abgeschlossenen Punkt $x \in \mathbb{A}_k^n$ habe die Abbildung $F(\mathcal{O}_{\mathbb{A}_k^n, x}) \rightarrow F(K(\mathbb{A}_k^n))$ trivialen Kern. Dann hat für jede glatte k -Varietät X und jeden Punkt $x \in X$ die Abbildung $F(\mathcal{O}_{X, x}) \rightarrow F(K(X))$ trivialen Kern.*

Beweis. Sei (ohne Einschränkung der Allgemeinheit) $X = \text{Spec } A$ affin, $K = K(X) = \text{Quot } A$. Dann korrespondiert x zu einem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$, und wir müssen zeigen, daß $F(A_{\mathfrak{p}}) \rightarrow F(K)$ trivialen Kern hat. Es genügt, die Behauptung für den Fall zu zeigen, daß \mathfrak{p} ein maximales Ideal ist: sei nämlich $\alpha \in F(A_{\mathfrak{p}})$. Da F mit Lokalisierung vertauscht, gibt es dann ein $f \in A \setminus \mathfrak{p}$, so daß α sich zu $\tilde{\alpha} \in F(A_f)$ liften läßt. Da A ein Jacobsonring ist, finden wir ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{p}$, das f nicht enthält. Dann haben wir $F(A_f) \rightarrow F(A_{\mathfrak{m}}) \rightarrow F(A_{\mathfrak{p}}) \rightarrow F(K)$. Es genügt dann offenbar zu zeigen: verschwindet $\tilde{\alpha}$ in $F(K)$, so auch in $F(A_{\mathfrak{m}})$. Es genügt also, abgeschlossene Punkte zu betrachten.

Sei also nun $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$ ein maximales Ideal und $\mathcal{O} = A_{\mathfrak{m}}$. Es sei $\alpha \in F(\mathcal{O})$ ein Element, das in $F(K)$ trivial wird. Wegen $K = \text{Quot } \mathcal{O}$ finden wir dann ein $0 \neq f \in \mathcal{O}$, so daß α in $F(\mathcal{O}_f)$ triviales Bild hat. Nach dem Normalisierungssatz von Ojanguren (2.6.10) finden wir (indem wir notfalls f durch ein assoziiertes Element ersetzen) einen lokalen Ring \mathcal{O}' , der Lokalisierung eines \mathbb{A}_k^d in einem maximalen Ideal ist, ein Element $f' \in \mathcal{O}'$ und einen in f' verklebenden Homomorphismus $\varphi : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ mit $\varphi(f') = f$. Da F zulässig ist, gibt es dann ein $\alpha' \in F(\mathcal{O}')$, das in $F(\mathcal{O})$ auf α abgebildet wird und in $F(\mathcal{O}'_{f'})$ triviales Bild hat. Dann ist α' aber auch in $F(\text{Quot } \mathcal{O}')$ trivial, und nach Voraussetzung folgt daraus $\alpha' = 0$, also $\alpha = 0$. \square

2.7.3 Satz (Colliot-Thélène–Ojanguren II). *Es sei k ein unendlicher Körper und F ein zulässiger k -Funktorkomplex, über den bekannt sei: Für jede Körpererweiterung $k \subset L$ und jedes $n \geq 1$ hat die Abbildung*

$$F(L[X_1, \dots, X_n]) \rightarrow F(L(X_1, \dots, X_n))$$

trivialen Kern. Dann hat, für jedes $n \geq 1$ und jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset k[X_1, \dots, X_n]$, die Abbildung

$$F(k[X_1, \dots, X_n]_{\mathfrak{m}}) \rightarrow F(k(X_1, \dots, X_n))$$

trivialen Kern.

Zum Beweis des Satzes verallgemeinern wir die Aussage, um sie stark genug für einen Induktionsbeweis zu machen. Genauer ist der Satz der Fall $n = 0$ im folgenden

2.7.4 Lemma. *In der Situation des Satzes gilt für jedes $d \geq 0$: ist $k \subset L$ eine Körpererweiterung, $\mathfrak{m} \subset L[X_1, \dots, X_d]$ ein maximales Ideal und $n \geq 0$, so hat die Abbildung*

$$F(L[X_1, \dots, X_d]_{\mathfrak{m}}[T_1, \dots, T_n]) \rightarrow F(L(X_1, \dots, X_d, T_1, \dots, T_n))$$

trivialen Kern.

Beweis. Induktion nach d . Der Fall $d = 0$ ist gerade die Voraussetzung an F . Sei also $d > 0$ und die Behauptung für $d - 1$ bewiesen. Wir schreiben $L[\mathbf{X}]$ für $L[X_1, \dots, X_d]$ usw. Sei $\alpha \in F(L[\mathbf{X}]_{\mathfrak{m}}[\mathbf{T}])$ ein Element mit trivialem Bild in $F(L(\mathbf{X}, \mathbf{T}))$. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} L[\mathbf{X}]_{\mathfrak{m}}[\mathbf{T}] & \longrightarrow & L(\mathbf{X}, \mathbf{T}) \\ & \searrow & \uparrow \\ & & L(\mathbf{X})[\mathbf{T}] \end{array}$$

Nach dem Fall $d = 0$ (für den Körper $L(\mathbf{X})$) hat α bereits triviales Bild in $F(L(\mathbf{X})[\mathbf{T}])$. Da F mit Lokalisierungen vertauscht, finden wir nichtkonstante Polynome $f, g \in L[\mathbf{X}]$ mit $f \notin \mathfrak{m}$, $g \in \mathfrak{m}$, so daß α das Bild eines Elementes α' von $F(L[\mathbf{X}]_f[\mathbf{T}])$ ist, das in $F(L[\mathbf{X}]_{fg}[\mathbf{T}])$ triviales Bild hat. Wir können annehmen, daß f und g teilerfremd sind. Nach 2.6.2 und 2.6.4 können wir dann erreichen, daß f und g (mit $L[\mathbf{X}'] := L[X_1, \dots, X_{d-1}]$ und $\mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cap L[\mathbf{X}']$) in $L[\mathbf{X}'][\mathbf{T}]$ unitär und im Polynomring $(L[\mathbf{X}']/\mathfrak{n})[\mathbf{T}]$ teilerfremd sind. Es sei $B := L[\mathbf{X}']_{\mathfrak{n}}$. Nach dem nächsten Lemma ist dann $B[X_d] \rightarrow B[X_d]_f$ verklebend in g , und da Polynomalgebren flach sind, ist damit auch $B[X_d][\mathbf{T}] \rightarrow B[X_d]_f[\mathbf{T}]$ verklebend in g . Vermöge

$$\begin{array}{ccc} L[\mathbf{X}]_f[\mathbf{T}] & \longrightarrow & L[\mathbf{X}]_{fg}[\mathbf{T}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ B[X_d]_f[\mathbf{T}] & \longrightarrow & B[X_d]_{fg}[\mathbf{T}] \end{array}$$

definiert nun $\alpha' \in F(L[\mathbf{X}]_f[\mathbf{T}])$ ein Element $\alpha'' \in F(B[X_d]_f[\mathbf{T}])$, das in $F(B[X_d]_{fg}[\mathbf{T}])$ triviales Bild hat. Da F zulässig ist, kommt α'' von einem Element $\alpha''' \in F(B[X_d][\mathbf{T}])$, das in $F(B[X_d]_g[\mathbf{T}])$ und damit auch in $F(L(\mathbf{X}, \mathbf{T}))$ triviales Bild hat. Aber $B[X_d][\mathbf{T}]$ ist der Polynomring in X_d, T_1, \dots, T_n über der Algebra $L[X_1, \dots, X_{d-1}]_{\mathfrak{n}}$, und nach der Induktionsvoraussetzung folgt $\alpha''' = 0$, daraus $\alpha'' = 0$. Da die Abbildung $L[\mathbf{X}]_f[\mathbf{T}] \rightarrow L[\mathbf{X}]_{\mathfrak{m}}[\mathbf{T}]$ aber über $B[X_d][\mathbf{T}]$ faktorisiert, impliziert das (wegen $\alpha' \mapsto \alpha'' \rightarrow \alpha$) bereits $\alpha = 0$, was zu beweisen war. \square

2.7.5 Lemma. *Es sei A ein noetherscher Ring und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal. Es seien $f, g \in A[\mathbf{T}]$ unitäre Polynome, so daß \bar{f}, \bar{g} in $(A/\mathfrak{m})[\mathbf{T}]$ teilerfremd sind. Dann ist $A_{\mathfrak{m}}[\mathbf{T}] \rightarrow A_{\mathfrak{m}}[\mathbf{T}]_f$ verklebend in g .*

Beweis. Es sei $\alpha \in A$ die Resultante von f und g (vgl. [Bos, 4.4]). Da Resultantenbildung funktoriell ist, ist $\bar{\alpha}$ im Körper A/\mathfrak{m} die Resultante der teilerfremden Polynome \bar{f} und \bar{g} ; insbesondere ist $\bar{\alpha} \neq 0$, und damit ist $\alpha/1$ im lokalen Ring $A_{\mathfrak{m}}$ invertierbar. Andererseits finden wir $\tilde{f}, \tilde{g} \in A[\mathbf{T}]$ mit $\tilde{f}\tilde{f} + \tilde{g}\tilde{g} = \alpha$, und damit erzeugen f und g in $A_{\mathfrak{m}}[\mathbf{T}]$ das Einheitsideal, woraus die Behauptung folgt. \square

Wir halten noch fest, was die Sätze von Colliot-Thélène–Ojanguren im Fall $F = \check{H}_{\text{ét}}^1(_, G)$ besagen. Es sei k ein Körper, G ein glattes affines Gruppenschema über k und X ein k -Schema. Wir sagen, *die Serre–Grothendiecksche Vermutung gelte für (G, X)* , wenn jeder rational triviale G -Torseur über k (in der fppf-Topologie) bereits lokal trivial bezüglich der Zariskitopologie ist.

2.7.6 Korollar. *Es sei k ein unendlicher Körper und G eine lineare algebraische Gruppe über k . Dann gilt:*

1. *Die Serre–Grothendieck-Vermutung gilt genau dann für (G, X) für jede glatte k -Varietät X , wenn sie für jedes $n \geq 1$ für (G, \mathbb{A}_k^n) gilt.*
2. *Ist für jede Körpererweiterung $k \subset L$ jeder rational triviale G -Torseur auf jedem \mathbb{A}_L^n sogar trivial, so gilt die Serre–Grothendieck-Vermutung für (G, X) für jede glatte k -Varietät X .*

Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, daß im Falle einer reduktiven, zerfallenden Gruppe G die Voraussetzung in Teil 2. des Korollars richtig ist, daß also ein rational trivialer G -Torseur auf \mathbb{A}_k^n trivial ist. Leider kann dieser Weg nicht für alle Gruppen funktionieren, denn für gewisse Gruppen gibt es nicht-triviale rationale Torseure auf der affinen Ebene, vgl. [Ra89] und [C–O].

Raghunathan konnte im Jahr 1994 die Serre–Grothendiecksche Vermutung für eine beliebige reduktive Gruppe über einem unendlichen Körper beweisen, indem er das 1. Kriterium verwendete, also die lokale Trivialität rational trivialer G -Torseure über \mathbb{A}_k^n direkt zeigte. Seinen Beweis werden wir nicht darstellen, er verwendet jedoch viele der im nächsten Kapitel erklärten Techniken.

3 Rational triviale Torseure auf \mathbb{A}_k^n

Das Hauptresultat dieses Kapitels ist der folgende

Satz. *Es sei k ein unendlicher Körper, G eine zerfallende, reduktive k -Gruppe, und E ein G -Torseur über \mathbb{A}_k^n (in der étalen Topologie). Ist E über einer (nichtleeren) offenen Teilmenge von \mathbb{A}_k^n trivial, so ist E trivial.*

Zum besseren Verständnis geben wir einen Überblick über die Beweisschritte. Zunächst untersuchen wir den Fall, daß G ein Torus ist: in diesem Fall gilt viel mehr, es ist nämlich sogar jeder G -Torseur auf \mathbb{A}_k^n konstant, d.h. Pullback eines G -Torseurs auf k selbst. Dies ermöglicht, für allgemeines G , die Reduktion auf den Fall, daß G halbeinfach ist.

Den Satz selbst beweisen wir dann durch Induktion nach n . Im Fall $n = 1$ skizzieren Colliot-Thélène–Ojanguren ([C–O, Prop. 2.2]) einen direkten Beweis im Fall $k = k_{\text{sep}}$ und verweisen dann, für einen beliebigen unendlichen Grundkörper, auf den Satz von Raghunathan–Ramanathan (siehe etwa [Gi]) über Torseure auf der affinen Geraden. Der von P. Gille angegebene neue Beweis dieses Satzes enthält jedoch als Zwischenschritt die uns interessierende Aussage, die wir deshalb nur zitieren (3.2.2).

Für den Induktionsschritt fassen wir \mathbb{A}_k^n als affine Gerade über $X = \mathbb{A}_k^{n-1}$ auf. Es sei E ein rational trivialer G -Torseur über $\mathbb{A}_k^n = \mathbb{A}_X^1$. Mit Hilfe eines Patching-Arguments (3.5.1) – einer Verallgemeinerung der von Quillen beim Beweis der Trivialität von Vektorbündeln auf \mathbb{A}_k^n verwendeten Technik – reduzieren wir auf die Behauptung, daß wir eine offene Überdeckung (U_i) von X finden, so daß E über jedem $\mathbb{A}_{U_i}^1$ trivial ist.

Wir haben also auf eine Frage reduziert, die lokal auf X ist. Sätze von Raghunathan zeigen nun, daß E sich unter bestimmten Voraussetzungen an G nach Verkleinerung von X fortsetzen läßt zu einem G -Torseur über \mathbb{P}_X^1 mit einer gewissen lokalen Trivialitätseigenschaft. Der Starrheitssatz von Grothendieck über Vektorbündel (genauer seine Verallgemeinerung für Torseure) garantiert dann, nach eventueller weiterer Verkleinerung von X , die Trivialität von E .

3.1 Torseure unter auflösbaren Gruppen und Tori

In diesem Abschnitt beweisen wir (nach [Ra89]) den folgenden

3.1.1 Satz. *Es sei k ein Körper und T ein k -Torus. Dann ist $\check{H}_{\text{ét}}^1(k, T) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, T)$ bijektiv für alle $n \geq 1$, d.h. jeder T -Torseur auf \mathbb{A}_k^n ist konstant.*

3.1.2 Proposition. *Es sei G eine k -zerfallende auflösbare k -Gruppe. Dann gilt $\check{H}^1(\mathbb{A}_k^n, G) = \{1\}$.*

Beweis. Wir finden eine Kette $\{1\} = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_d = G$ abgeschlossener k -Untergruppen mit $G_i/G_{i-1} \cong \mathbb{G}_{m,k}$ oder $\mathbb{G}_{a,k}$ über k . Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach d , wobei für $d = 0$ nichts zu tun ist. Aus der exakten Sequenz

$$1 \rightarrow G_{d-1} \rightarrow G_d \rightarrow G_d/G_{d-1} \rightarrow 1$$

erhalten wir die exakte Kohomologiesequenz

$$\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, G_{d-1}) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, G_d) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, G_d/G_{d-1}).$$

Da in ihr der erste Term nach Induktionsvoraussetzung verschwindet, genügt es, wenn wir zeigen, daß $\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{G}_{a,k})$ und $\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, \mathbb{G}_{m,k})$ beide trivial sind.

Beide Kohomologiegruppen lassen sich aber bezüglich der Zariskitopologie berechnen (für \mathbb{G}_a nach [Mi80, II.3.7], für \mathbb{G}_m nach Hilbert 90, siehe 2.3.2). Dann folgen die Aussagen aber aus der Beobachtung, daß $\text{Pic}(\mathbb{A}_k^n) = 0$ ist und die Kohomologie einer quasikohärenten Garbe auf einem affinen Schema verschwindet. \square

Am Beweis läßt sich erkennen, daß die gleiche Aussage auch für eine beliebige faktorielle k -Algebra anstelle von \mathbb{A}_k^n gilt.

3.1.3 Korollar. *Es sei T ein k -Torus. Dann gilt $\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_{k_{\text{sep}}}^n, T) = \{1\}$.*

Beweis. Es ist $\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_{k_{\text{sep}}}^n, T) = \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_{k_{\text{sep}}}^n, T_{k_{\text{sep}}})$, aber $T_{k_{\text{sep}}}$ ist ein zerfallender k_{sep} -Torus. \square

Da aber $\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_{k_{\text{sep}}}^n, T) = \varinjlim_K H_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_K^n, T)$ gilt, wobei K alle endlichen separablen Erweiterungen von k durchläuft (Satz 2.2.9), erhalten wir daraus:

3.1.4 Korollar. *Es sei T ein k -Torus und E ein T -Torseur über \mathbb{A}_k^n . Dann gibt es eine endliche separable Erweiterung K/k , so daß $E|_{\mathbb{A}_K^n}$ trivial ist.*

Sei nun $\pi : \mathbb{A}_k^n \rightarrow \text{Spec } k$ die Strukturabbildung. Fassen wir \underline{T} als Garbe auf $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/\mathbb{A}_k^n)_{\text{ét}})$ auf, erhalten wir eine Garbe $\pi_*\underline{T}$ auf $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/k)_{\text{ét}})$ mit $\pi_*\underline{T}(X) = \underline{T}(X \times_k \mathbb{A}_k^n)$.

3.1.5 Korollar. *Die natürliche Abbildung $\check{H}_{\text{ét}}^1(k, \pi_*\underline{T}) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, T)$ ist bijektiv.*

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz von 2.1.26, da jeder T -Torseur über \mathbb{A}_k^n trivial wird auf einem $\mathbb{A}_k^n \times_k K$, wobei K/k eine endliche separable Erweiterung (also insbesondere eine étale Überdeckung) ist. \square

3.1.6 Lemma. *Es sei T ein k -Torus und K/k eine Körpererweiterung. Dann gilt $T(K[X_1, \dots, X_n]) = T(K)$.*

Beweis. Wir können $K = k$ annehmen. Es ist $T_{k_{\text{sep}}} \cong (\mathbb{G}_{m,k})_{k_{\text{sep}}}^r$, und wegen $\mathbb{G}_m(k_{\text{sep}}[X_1, \dots, X_n]) = \mathbb{G}_m(k_{\text{sep}})$ folgt dann $T(k_{\text{sep}}[X_1, \dots, X_n]) = T(k_{\text{sep}})$. Das impliziert aber $T(k[X_1, \dots, X_n]) = T(k)$, wie man etwa durch Einsetzen von $X_1 = \dots = X_n = 0$ sieht. \square

Beweis von Satz 3.1.1. Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \check{H}_{\text{ét}}^1(k, T) & \xrightarrow{\quad} & \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^n, T) \\ & \searrow & \nearrow \cong \\ & \check{H}_{\text{ét}}^1(k, \pi_*\underline{T}) & \end{array}$$

Wir müssen also nur zeigen, daß $\check{H}_{\text{ét}}^1(k, T) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(k, \pi_*\underline{T})$ bijektiv ist. Es gilt aber sogar $T(X) = \pi_*\underline{T}(X)$ für jeden étalen Morphismus $X \rightarrow \text{Spec } k$: es genügt, dies für $X = \text{Spec } K$ mit einer endlichen separablen Körpererweiterung K/k zu zeigen; aber das ist gerade die Aussage des Lemmas. \square

3.2 Rational triviale Torseure auf der affinen Geraden

3.2.1 Satz. *Es sei k ein Körper und G eine zusammenhängende, reduktive lineare Gruppe über k . Dann ist jeder rational triviale G -Torseur über \mathbb{A}_k^1 trivial.*

3.2.2 Lemma (P. Gille). *Es sei k ein Körper, G eine zusammenhängende halbeinfache lineare Gruppe über k . Ist E ein rational trivialer G -Torseur über $\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \cup \{\infty\}$. Ist $E|_{\{\infty\}}$ trivial, so auch $E|_{\mathbb{A}_k^1}$.*

Der Beweis findet sich in [Gi, 3.12]; die Idee ist, die Aussage mit Twisting-Argumenten zurückzuführen auf den folgenden Satz von Harder ([Ha68, Satz 3.5]): ist G ein zusammenhängendes halbeinfaches Gruppenschema über \mathbb{P}_k^1 , dessen Pullback auf $K(\mathbb{P}_k^1) = k(T)$ anisotrop ist, so ist G konstant, also Pullback eines Gruppenschemas über k .

Ein Torseur wie im Satz läßt sich nun stets derart auf \mathbb{P}_k^1 fortsetzen, daß er im unendlich fernen Punkt trivial wird:

3.2.3 Lemma. *Es sei X noethersches, irreduzibles eindimensionales Schema und G ein Gruppenschema über X . Es sei $\emptyset \neq U \subset X$ offen und E ein rational trivialer G_U -Torseur über U . Dann läßt sich E zu einem G -Torseur \tilde{E} über ganz X fortsetzen, so daß für jedes $x \in X - U$ die Einschränkung von \tilde{E} auf $\kappa(x)$ trivial ist.*

Beweis. Die abgeschlossenen echten Teilmengen von X sind genau die endlichen Mengen abgeschlossener Punkte. (Denn eine solche Teilmenge ist noethersch und nulldimensional; jede ihrer irreduziblen Komponenten muß dann ein Punkt sein.) Insbesondere ist $X - U$ endlich, und per Induktion können wir annehmen, daß $X - U = \{x\}$ nur ein Punkt ist. Es sei $\emptyset \neq V \subset U$, so daß $E|_V$ trivial ist. Dann ist $U' := V \cup \{x\}$ eine offene Teilmenge von X ; sei E' der triviale $G_{U'}$ -Torseur über U' . Dann stimmen E und E' auf $U \cap U'$ überein und lassen sich folglich auf $U \cup U' = U \cup \{x\}$ verkleben. \square

3.2.4 Bemerkung. *Dieses Lemma ist eine triviale Version des folgenden Satzes: Es sei (X, \mathcal{O}) ein Dedekindschema mit Funktionenkörper K und G ein X -Gruppenschema, so daß G_K reduktiv ist. Ist $U \subset X$ offen und E ein G -Torseur über U , so läßt sich E auf alle Punkte $x \in X$ fortsetzen, für die die Einschränkung von E auf $\text{Quot } \hat{\mathcal{O}}_x$ Pullback eines G -Torseurs über $\hat{\mathcal{O}}_x$ ist. – Der Beweis verwendet Sätze von M. Kneser über schwache Approximation in algebraischen Gruppen, siehe [Ha67, Lemma 4.1.3].*

Beweis des Satzes. Die beiden Lemmata zeigen die Aussagen sofort für halbeinfache Gruppen. Sei nun G eine zusammenhängende reduktive k -Gruppe und $T = R(G)$. Dann ist T ein k -Torus nach 1.5.18, und G/T ist eine halbeinfache k -Gruppe. Betrachte nun die exakte Kohomologiesequenz

$$\check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^1, T) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^1, G) \rightarrow \check{H}_{\text{ét}}^1(\mathbb{A}_k^1, G/T).$$

Ist E ein rational trivialer G -Torseur über \mathbb{A}_k^1 , so ist also $E \times^G (G/T)$ rational trivialer G/T -Torseur und damit nach dem schon Bewiesenen trivial. Dann geht E aber aus einem T -Torseur E_0 über \mathbb{A}_k^1 hervor. Ein solcher ist aber nach dem letzten Abschnitt konstant, also ist E konstant und – da rational trivial – trivial. \square

3.3 Starrheit von Vektorbündeln über Familien projektiver Geraden

Das Ziel dieses Abschnitts ist der folgende

3.3.1 Satz (Grothendieck). *Es sei S ein noethersches Schema und E ein Vektorbündel auf \mathbb{P}_S^1 . Es sei $s \in S$ und $\kappa(s) \subset L$ eine Körpererweiterung, so daß der Pullback von E auf \mathbb{P}_L^1 trivial ist. Dann gibt es eine offene Umgebung U von s , so daß $E|_{\mathbb{P}_U^1}$ trivial ist.*

Es sei X ein Schema und $x \in X$. Zum natürlichen Morphismus $i : \text{Spec } \kappa(x) \rightarrow X$ gehört ein Homomorphismus von Garben kommutativer Ringe $\mathcal{O}_X \rightarrow i_* \mathcal{O}_{\text{Spec } \kappa(x)}$; dessen Kern ist eine quasikohärente Idealgarbe auf X , die wir $\mathcal{M}_x \subset \mathcal{O}_X$ nennen wollen. Für jede affine offene Teilmenge $U = \text{Spec } A$ von X mit $x \in U$ ist dann $\mathcal{M}_x|_U$ gerade $\tilde{\mathfrak{p}}$, wobei \mathfrak{p} das zu x korrespondierende Primideal von A ist. Allgemein ist $(\mathcal{M}_x)_x$ das maximale Ideal im lokalen Ring $\mathcal{O}_{X,x}$. Ist $x \in X$ abgeschlossen, so ist $(\mathcal{M}_x)|_{X-\{x\}} = (\mathcal{O}_X)|_{X-\{x\}}$.

Die folgende Proposition enthält als Spezialfall ($\ell = 0$) die Aufgabe [Har, Ex. III.11.8]; der Beweis entstammt [EGA, III.4.6.1]. Uns interessiert nur der Fall $i = 1, \ell = 1$, aber dessen Beweis ist identisch mit dem für den allgemeinen Fall.

3.3.2 Proposition. *Es sei S ein noethersches Schema und $f : X \rightarrow S$ projektiv, \mathcal{F} eine kohärente Garbe auf X , die flach über S ist, und es sei $H^i(X_s, \mathcal{F}_s) = 0$ für ein $i \geq 0$ und ein $s \in S$. (Dabei schreiben wir $\mathcal{F}_s := (X_s \rightarrow X)^* \mathcal{F}$.) Dann gilt $(R^i f_*)((f^* \mathcal{M}_s^\ell) \cdot \mathcal{F})_s = 0$ für alle $\ell \geq 0$.*

Beweis. Es sei $Z := f^{-1}(s) \subset X$ mit der induzierten Topologie. Da $f : Z \rightarrow S$ über $\{s\}$ faktorisiert, ist $\mathcal{A} := \mathcal{O}_X|_Z$ in kanonischer Weise eine Garbe von $\mathcal{O} := \mathcal{O}_{S,s}$ -Algebren. Es sei $X_n := X \times_S \text{Spec}(\mathcal{O}/\mathfrak{o}^n)$ für $n \geq 1$, wobei \mathfrak{o} das maximale Ideal in \mathcal{O} sei. Als topologischer Raum identifiziert sich jedes X_n mit Z ; damit gilt dann $\mathcal{O}_{X_n} = \mathcal{A}/\mathfrak{o}^n \mathcal{A}$. Insbesondere haben wir $X_1 = X_s$ und damit $\mathcal{O}_{X_s} = \mathcal{A}/\mathfrak{o} \mathcal{A}$.

Es sei \mathcal{G} die \mathcal{A} -Modulgarbe $\mathcal{F}|_Z$. Man rechnet leicht nach, daß $(Z \rightarrow X)^{-1}((f^* \mathcal{M}_s^\ell) \cdot \mathcal{F}) = \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G}$ gilt⁽ⁱ⁾, und daraus folgt

$$\begin{aligned} (X_n \rightarrow X)^*((f^* \mathcal{M}_s^\ell) \cdot \mathcal{F}) &= (Z \rightarrow X)^{-1}((f^* \mathcal{M}_s^\ell) \cdot \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}/\mathfrak{o}^n \mathcal{A} \\ &= \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}/\mathfrak{o}^n \mathcal{A} = \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n} \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Garbenkohomologie hängt nicht von der Schemastruktur ab, sondern nur vom topologischen Raum (und der Garbe). Die Voraussetzung bedeutet also gerade $H^i(Z, \mathcal{G}/\mathfrak{o} \mathcal{G}) = 0$. Der Satz über formelle Funktionen ([Har, III.11.1]) besagt insbesondere

$$(R^i f_*)((f^* \mathcal{M}_s^\ell) \cdot \mathcal{F})_s \hookrightarrow \varprojlim_{n \geq 1} H^i(Z, \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n} \mathcal{G})$$

(denn die linke Seite ist nach [Har, III.8.8(b)] ein endlicher \mathcal{O} -Modul, der sich damit injektiv in seine Vervollständigung einbettet). Es genügt also zu beweisen, daß $H^i(Z, \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n} \mathcal{G}) = 0$ ist für alle $\ell, n \geq 0$. Dafür verwenden wir Induktion nach n , wobei der Fall $n = 0$ trivial ist. Für $n \geq 1$ induziert die exakte Sequenz von \mathcal{A} -Modulgarben

$$0 \rightarrow \mathfrak{o}^{\ell+n-1} \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n} \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n} \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n-1} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

als Ausschnitt der langen exakten Kohomologiesequenz eine exakte Sequenz

$$H^i(Z, \mathfrak{o}^{\ell+n-1} \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n} \mathcal{G}) \rightarrow H^i(Z, \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n} \mathcal{G}) \rightarrow H^i(Z, \mathfrak{o}^\ell \mathcal{G} / \mathfrak{o}^{\ell+n-1} \mathcal{G}).$$

Nach Induktionsvoraussetzung verschwindet der letzte Term dieser Sequenz, also genügt es zu zeigen, daß der erste Term verschwindet, daß also $H^i(Z, \mathfrak{o}^{k-1} \mathcal{G} / \mathfrak{o}^k \mathcal{G}) = 0$ für alle $k \geq 1$ ist.

⁽ⁱ⁾Beachte dabei: ist $A \rightarrow B$ ein Ringhomomorphismus, M ein B -Modul und $I \subset A$ ein Ideal, so ist $I.M = (IB).M$, anders gesagt: $I.M$ ist bereits ein B -Modul!

Nun ist $\mathfrak{o}^{k-1}\mathcal{G}/\mathfrak{o}^k\mathcal{G}$ isomorph zu $\mathcal{G} \otimes_{\mathfrak{o}} \mathfrak{o}^{k-1}/\mathfrak{o}^k$: dies überprüft man punktweise mit dem nächsten Lemma (hier geht die Flachheit von \mathcal{F} über S ein). Letztere Garbe ist aber wiederum isomorph zu $\mathcal{G}/\mathfrak{o}\mathcal{G} \otimes_{\mathfrak{o}/\mathfrak{o}} \mathfrak{o}^{k-1}/\mathfrak{o}^k$. Da jeder Vektorraum frei ist, ist dies aber eine direkte Summe von Kopien von $\mathcal{G}/\mathfrak{o}\mathcal{G}$, und da Kohomologie mit direkten Limites vertauscht ([Har, III.2.9]), folgt die Behauptung aus der Voraussetzung $H^i(Z, \mathcal{G}/\mathfrak{o}\mathcal{G}) = 0$. \square

3.3.3 Lemma. *Es sei A ein Ring und M ein flacher A -Modul. Für beliebige Ideale $I \subset J$ von A gilt dann $JM/IM \cong M \otimes_A J/I$.*

Beweis. Im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M \otimes_A I & \longrightarrow & M \otimes_A A & \longrightarrow & M \otimes_A A/I \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ 0 & \longrightarrow & IM & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/IM \longrightarrow 0 \end{array}$$

sind beide Zeilen exakt, also ist auch $M \otimes_A I \rightarrow IM$ Isomorphismus. Ähnliches gilt für J ; also ist nur zu zeigen, daß die Sequenz

$$0 \rightarrow M \otimes_A I \rightarrow M \otimes_A J \rightarrow M \otimes_A (I/J) \rightarrow 0$$

exakt ist, aber dies ist wieder die Flachheit von M . \square

3.3.4 Korollar. *Es sei S ein noethersches Schema, $f : X \rightarrow S$ projektiv und \mathcal{F} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul, der flach über S ist, und es sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt mit $H^1(X_s, \mathcal{F}_s) = 0$. Dann ist die kanonische Abbildung $(f_*\mathcal{F})_s \rightarrow \mathcal{F}_s(X_s)$ surjektiv.*

Die betrachtete Abbildung ist folgendermaßen definiert: ein Element von $(f_*\mathcal{F})_s$ wird repräsentiert durch ein $\alpha \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$, wobei $s \in U \hookrightarrow S$ ist. Dann ist $X_s = f^{-1}(s) \subset f^{-1}(U)$, also definiert α ein Element von $(X_s \rightarrow X)^{-1}\mathcal{F}(X_s)$ und damit auch von $(X_s \rightarrow X)^*\mathcal{F}(X_s) = \mathcal{F}_s(X_s)$.

Beweis des Corollars. Wir können annehmen, daß $S = \text{Spec } R$ affin ist, $s = \mathfrak{m} \subset S$, $\mathcal{M}_s = \tilde{\mathfrak{m}}$. Betrachte den durch die Exaktheit der Sequenz $0 \rightarrow (f^*\tilde{\mathfrak{m}})\cdot\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathcal{F}} \rightarrow 0$ definierten \mathcal{O}_X -Modul $\overline{\mathcal{F}}$. Die lange exakte Kohomologiesequenz liefert eine exakte Sequenz

$$f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\overline{\mathcal{F}} \rightarrow (R^1f_*)(f^*\tilde{\mathfrak{m}})\cdot\mathcal{F}$$

von Garben auf S ; in s verschwindet nach der Proposition der Halm des letzten Terms, und das bedeutet gerade, daß die Abbildung $(f_*\mathcal{F})_s \rightarrow (f_*\overline{\mathcal{F}})_s$ surjektiv ist. Wir zeigen, daß $(f_*\overline{\mathcal{F}})_s \cong \mathcal{F}_s(X_s)$ gilt.

Zunächst gilt $\overline{\mathcal{F}}(X) \cong \mathcal{F}_s(X_s)$: denn sei $i : Z \rightarrow X$ die Inklusion (mit Bezeichnungen wie im Beweis der Proposition). Da s abgeschlossen ist, stimmen $\tilde{\mathfrak{m}}$ und \mathcal{O}_S auf $S - \{s\}$ überein, also auch $f^*\tilde{\mathfrak{m}}$ und \mathcal{O}_X auf $X - Z$, und das bedeutet $\overline{\mathcal{F}}|_{X-Z} = 0$. Nach [Har, Ex. II.1.19(c)] folgt daraus $\overline{\mathcal{F}} \xrightarrow{\cong} i_*i^{-1}\overline{\mathcal{F}}$. Da aber i^{-1} exakt ist, haben wir $i^{-1}\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{G}/\mathfrak{m}\mathcal{G} = \mathcal{F}_s$ und damit $\overline{\mathcal{F}}(X) = i^{-1}(\overline{\mathcal{F}})(Z) = \mathcal{F}_s(X_s)$.

Da X noethersch ist, ist $f_*\overline{\mathcal{F}}$ ein quasikohärenter (sogar kohärenter) \mathcal{O}_S -Modul. Dann ist aber

$$(f_*\overline{\mathcal{F}})_s = f_*\overline{\mathcal{F}}(S) \otimes_R R_{\mathfrak{m}} \cong \mathcal{F}_s(X_s) \otimes_R R_{\mathfrak{m}} = \mathcal{F}_s(X_s),$$

denn $\mathcal{F}_s(X_s)$ ist ja sogar ein $\mathcal{O}/\mathfrak{o} = R/\mathfrak{m}$ -Vektorraum. (Beachte $\mathcal{O} = R_{\mathfrak{m}}$, $\mathfrak{o} = \mathfrak{m}_{\mathfrak{m}}$.) – Wir überlassen dem Leser die Überprüfung, daß die so konstruierte Abbildung tatsächlich der oben angegebenen Vorschrift gehorcht. \square

3.3.5 Korollar. *Es sei S noethersch, $f : X \rightarrow S$ projektiv und flach, \mathcal{F}, \mathcal{G} lokal freie \mathcal{O}_X -Moduln endlichen Rangs, und es sei $s \in S$ mit $H^1(X_s, \mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_{X_s}}(\mathcal{F}|_{X_s}, \mathcal{G}|_{X_s})) = 0$. Dann ist die kanonische Abbildung*

$$f_*(\mathcal{H}\text{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}))_s \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X_s}}(\mathcal{F}|_{X_s}, \mathcal{G}|_{X_s})$$

surjektiv.

Beweis. Wende das letzte Korollar an auf $\mathcal{H} := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Als lokal freier \mathcal{O}_X -Modul ist \mathcal{H} kohärent und flach über X (und damit über S). Dabei gilt nach dem nächsten Lemma kanonisch $\mathcal{H}|_{X_s} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_s}}(\mathcal{F}|_{X_s}, \mathcal{G}|_{X_s})$. \square

3.3.6 Lemma. *Es sei X ein Schema, \mathcal{F} lokal freier \mathcal{O}_X -Modul endlichen Rangs und \mathcal{G} beliebiger \mathcal{O}_X -Modul. Dann ist $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ lokal freier \mathcal{O}_X -Modul, und für jeden Morphismus $f : Y \rightarrow X$ gilt $f^* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f^* \mathcal{F}, f^* \mathcal{G})$.*

Beweisskizze. Zur Konstruktion des Isomorphismus genügt es, einen Morphismus $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(f^* \mathcal{F}, f^* \mathcal{G})$ anzugeben, also für jede offene Teilmenge $U \subset X$ eine $\mathcal{O}_X(U)$ -lineare Abbildung $\text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{f^{-1}(U)}}(\tilde{f}^*(\mathcal{F}|_U), \tilde{f}^*(\mathcal{G}|_U))$, wobei $\tilde{f} : f^{-1}(U) \rightarrow U$ die Einschränkung von f ist. Eine solche Abbildung ist aber durch den Funktor \tilde{f}^* gegeben. – Die Invertierbarkeit und die übrigen Aussagen überlassen wir als Übung. \square

Das Korollar besagt gerade, daß jeder Morphismus $u_s : \mathcal{F}|_{X_s} \rightarrow \mathcal{G}|_{X_s}$ induziert wird von einem Morphismus $u_U : \mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} \rightarrow \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}$, wobei $U \subset S$ eine offene Umgebung von s ist. Ist u_s invertierbar, so kann man U so klein wählen, daß auch u_U invertierbar ist:

3.3.7 Proposition. *Es sei S noethersch, $f : X \rightarrow S$ ein flacher abgeschlossener Morphismus und $s \in S$. Es sei $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ ein Morphismus kohärenter flacher \mathcal{O}_X -Moduln. Falls der induzierte Morphismus $\mathcal{F}|_{X_s} \rightarrow \mathcal{G}|_{X_s}$ invertierbar ist, so gibt es eine offene Umgebung $s \in U \subset S$, so daß $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} \rightarrow \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)}$ ein Isomorphismus ist.*

Beweis.

1. Es genügt zu zeigen, daß $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ bijektiv ist für alle $x \in X$ mit $f(x) = s$: denn da Kern und Kokern des Morphismus kohärente \mathcal{O}_Y -Moduln sind ([Har, II.5.7]), gibt es dann eine offene Umgebung V von $f^{-1}(s)$, auf der beide trivial sind, d.h. $\mathcal{F}|_V \rightarrow \mathcal{G}|_V$ ist invertierbar. Setze $U := S - f(X - V)$; diese Menge ist dann offen in X (denn f ist abgeschlossen) mit $s \in U$ und $f^{-1}(U) \subset V$, tut also das Gewünschte.
2. Sei also $x \in X$ mit $f(x) = s$. Dann gilt $(\mathcal{F}|_{X_s})_x \cong \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(s) = \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{F}_x$ und analog für \mathcal{G} . Nach dem nächsten Lemma folgt aber aus der Bijektivität von $\mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x / \mathfrak{m}_s \mathcal{G}_x$ diejenige von $\mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$, denn $\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x$ sind endliche freie $\mathcal{O}_{X,x}$ -Moduln, also insbesondere flach und damit auch flach über $\mathcal{O}_{S,s}$.

\square

3.3.8 Lemma. *Es sei $(A, \mathfrak{m}) \rightarrow (B, \mathfrak{n})$ ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe, B noethersch, und es sei $f : M \rightarrow N$ ein Homomorphismus endlich erzeugter B -Moduln, wobei N flach über A sei. Ist $M/\mathfrak{m}M \rightarrow N/\mathfrak{m}N$ Isomorphismus, so auch f .⁽ⁱⁱ⁾*

Beweis. Zunächst ist auch $M/\mathfrak{n}M \rightarrow N/\mathfrak{n}N$ surjektiv, also $f(M) + \mathfrak{n}N = N$, und nach dem Lemma von Nakayama folgt $f(M) = N$, d.h. f ist surjektiv. Setze $R = \ker f$; dann haben wir eine exakte Sequenz $0 \rightarrow R \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ von A -Moduln. Da N flach ist, ist damit auch die Sequenz $0 \rightarrow R/\mathfrak{m}R \rightarrow M/\mathfrak{m}M \rightarrow N/\mathfrak{m}N \rightarrow 0$ exakt ([La, XVI, §3, Lemma 3.3]); nach Voraussetzung folgt dann $R/\mathfrak{m}R = 0$ und insbesondere $R/\mathfrak{n}R = 0$. Da aber B noethersch ist, ist R endlicher B -Modul, und nach dem Lemma von Nakayama folgt $R = 0$, also ist u auch injektiv. \square

⁽ⁱⁱ⁾Tatsächlich gilt die Aussage getrennt für Injektivität und für Surjektivität. Im Falle der Surjektivität ist der Beweis identisch mit unserem. Der Fall der Injektivität ist Teil des Inhalts von [EGA, 0_{III}.10.2.4]. Für den Beweis wird dort auf [Bou] verwiesen; da er sich jedoch in den frühen Auflagen dort nicht findet, taucht er fünf Jahre später als Fußnote im Beweis von [EGA, IV.11.1.2] auf!

3.3.9 Korollar. *Es sei S noethersches Schema und $f : X \rightarrow S$ flach und projektiv. Es sei $s \in S$ abgeschlossen mit $H^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = 0$. Ist dann E ein Vektorbündel über X , so daß das X_s -Vektorbündel $E \times_X X_s$ trivial ist, so gibt es eine offene Umgebung U von s , so daß $E|_{f^{-1}(U)}$ trivial ist.*

Beweis. Wir identifizieren das Vektorbündel E mit einem lokal freien \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{F} vom Rang n (vgl. [Har, Ex. II.5.18]). Setze $\mathcal{G} := \mathcal{O}_X^n$. Dann gilt $\mathcal{F}|_{X_s} \cong \mathcal{O}_{X_s}^n \cong \mathcal{G}|_{X_s}$, also insbesondere

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_s}}(\mathcal{F}|_{X_s}, \mathcal{G}|_{X_s}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_s}}(\mathcal{O}_{X_s}, \mathcal{O}_{X_s}) \cong \mathcal{O}_{X_s}^{n \times n},$$

und da Kohomologie mit direkten Summen vertauscht, folgt $H^1(X_s, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_s}}(\mathcal{F}|_{X_s}, \mathcal{G}|_{X_s})) = 0$. Nach 3.3.5 und 3.3.7 ist dann aber der Isomorphismus $\mathcal{F}|_{X_s} \cong \mathcal{G}|_{X_s}$ induziert durch einen Isomorphismus $\mathcal{F}|_{f^{-1}(U)} \cong \mathcal{G}|_{f^{-1}(U)} = \mathcal{O}_{f^{-1}(U)}^n$ für eine gewisse Umgebung U von s . Dies beweist die Behauptung. \square

Beweis von Satz 3.3.1. Nach Korollar 2.3.7 ergibt sich sofort, daß aus der Trivialität des Pullbacks von E auf \mathbb{P}_L^1 bereits die Trivialität des Pullbacks auf $\mathbb{P}_{\kappa(s)}^1 = (\mathbb{P}_S^1)_s$ folgt. Um das letzte Korollar anwenden zu können, genügt es also zu zeigen, daß $H^1(\mathbb{P}_k^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^1}) = 0$ für jeden Körper k gilt. Diese Kohomologiegruppe läßt sich aber mittels Čech-Kohomologie berechnen: mit der üblichen affinen Überdeckung $\mathbb{P}_k^1 = \text{Spec } k[T] \cup \text{Spec } k[T^{-1}]$ ist nur zu zeigen, daß jedes Element von $k[T, T^{-1}]$ sich schreiben läßt als Differenz eines Elements von $k[T]$ und eines Elements von $k[T^{-1}]$; aber das ist klar. \square

3.4 Starrheit von Torseuren über Familien projektiver Geraden

3.4.1 Satz (Raghunathan). *Es sei S ein Schema von endlichem Typ über einem Körper k , G eine lineare algebraische Gruppe über k und E ein G -Torseur über \mathbb{P}_S^1 . Es sei $s \in S$ ein abgeschlossener Punkt und $\kappa(s) \subset L$ eine Körpererweiterung, so daß der Pullback von E auf \mathbb{P}_L^1 trivial ist. Dann gibt es eine offene Umgebung U von s , so daß $E|_{\mathbb{P}_U^1}$ Pullback eines G -Torseurs auf U ist.*

Beweis. Wähle eine Einbettung $G \subset GL_{n,k}$; wir zeigen unten (Satz 3.4.3), daß wir dabei erreichen können, daß das k -Schema $H := GL_{n,k}/G$ *quasiaffin* ist. Es sei $V := E \times^G GL_{n,k}$. Der Pullback dieses $GL_{n,k}$ -Torseurs (Vektorbündels) auf \mathbb{P}_L^1 ist immer noch trivial, und nach dem Starrheitssatz von Grothendieck 3.3.1 können wir durch Verkleinern von S annehmen, daß V trivial ist.

Nach 2.1.16 ist E gegeben durch einen Schnitt des Faserbündels $V \times^{GL_{n,k}} H \rightarrow \mathbb{P}_S^1$ (mit der typischen Faser H). Da V trivial ist, ist ein solcher Schnitt gegeben als Morphismus von k -Schemata $f : \mathbb{P}_S^1 \rightarrow H$; da H quasiaffin ist, faktorisiert dieser aber nach dem nächsten Lemma über S :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_S^1 & \xrightarrow{f} & H \\ & \searrow & \nearrow \tilde{f} \\ & S & \end{array}$$

Der Morphismus \tilde{f} definiert aber einen Schnitt des trivialen Faserbündels $S \times_k H \rightarrow S$ und damit einen G -Torseur über S ; dessen Pullback auf \mathbb{P}_S^1 ist nach Konstruktion isomorph zu E . \square

3.4.2 Lemma. *Es sei S ein beliebiges und X ein quasi-affines Schema. Dann faktorisiert jeder Morphismus $\mathbb{P}_S^n \rightarrow X$ eindeutig über S .*

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall, daß $X = \text{Spec } A$ sogar affin ist. Man sieht leicht, daß es genügt, affines $S = \text{Spec } R$ zu betrachten. Dann haben wir aber

$$\text{Hom}_{\text{Sch}}(\mathbb{P}_S^n, X) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{Ring}}(A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_R^n}(\mathbb{P}_R^n)) \xleftarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{Ring}}(A, R) \cong \text{Hom}_{\text{Sch}}(S, X),$$

also faktorisiert jeder Morphismus $\mathbb{P}_S^n \rightarrow X$ eindeutig über S . Sei nun $U \hookrightarrow X$ quasiaffin und $\mathbb{P}_S^n \rightarrow U$ ein Morphismus; dann erhalten wir nach dem schon Bewiesenen das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_S^1 & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & X \end{array}$$

Aber $\mathbb{P}_S^1 \rightarrow S$ ist surjektiv, also faktorisiert auch $S \rightarrow X$ über U . □

Die Hauptarbeit besteht im Sicherstellen der Existenz einer „guten“ treuen linearen Darstellung der betrachteten Gruppe:

3.4.3 Satz. *Es sei G eine lineare algebraische Gruppe über einem Körper k . Dann gibt es eine abgeschlossene Einbettung $G \subset \text{GL}_{n,k}$, so daß $\text{GL}_{n,k}/G$ quasi-affin ist.*

Wir beweisen zunächst ein

3.4.4 Lemma. *In der Situation des Satzes finden wir eine Kette abgeschlossener Untergruppen $G \subset \tilde{G} \subset \text{GL}_{n,k}$, so daß sowohl \tilde{G}/G als auch $\text{GL}_{n,k}/\tilde{G}$ quasiaffin sind.*

Beweis. Der Beweis besteht in einer Verbesserung der üblichen Konstruktion von Quotienten: Sei dazu zunächst $i : G \hookrightarrow \text{GL}_m$ eine beliebige abgeschlossene Einbettung. Wähle eine Darstellung $\rho : \text{GL}_{m,k} \rightarrow \text{GL}_k(V)$ auf einem endlichdimensionalen k -Vektorraum V , so daß es einen Vektor $0 \neq v_0 \in V$, so daß der Stabilisator von kv_0 gerade \underline{G} ist ([Wa, 16.1]). Genauer bedeutet das: für jede k -Algebra A ist $\text{GL}_k(V)(A) = \text{Aut}_{\text{Mod}_A}(V \otimes_k A)$, und für $g \in \text{GL}_m(A)$ gilt genau dann $\rho(g)(v_0 \otimes 1) = v_0 \otimes a$ mit einem $a \in A$, wenn $g \in G(A)$ gilt. Wir definieren einen Morphismus $\chi : G \rightarrow \mathbb{G}_{m,k}$ durch die Beziehung

$$\rho(g)(v_0 \otimes 1) = v_0 \otimes \chi(g) \quad \text{für jede } k\text{-Algebra } A \text{ und alle } g \in G(A).$$

Setze $\tilde{G} := \text{GL}_{m,k} \times_k \mathbb{G}_{m,k}$ und betrachte den Produktmorphismus $(i, \chi^{-1}) : G \hookrightarrow \tilde{G}$ (er ist eine abgeschlossene Einbettung nach [Har, Ex. II.4.8(e)]). Sei $\sigma : \tilde{G} \rightarrow \text{GL}_k(V)$ der Morphismus, der auf einer k -Algebra A durch

$$\sigma(g, u)(v \otimes a) := u \cdot \rho(g)(v \otimes a) \quad \text{für } g \in G(A), u \in \mathbb{G}_m(A) \text{ und } v \otimes a \in V \otimes_k A$$

gegeben ist. Unter dieser Operation ist der Stabilisator von $\{v_0\}$ dann gerade G : sei nämlich A eine k -Algebra. Für $g \in G(A)$ ist dann

$$\sigma(g, \chi^{-1}(g))(v_0 \otimes 1) = \chi^{-1}(g) \cdot \rho(g)(v_0 \otimes 1) = \chi^{-1}(g) \cdot (v_0 \otimes \chi(g)) = v_0 \otimes 1.$$

Ist aber umgekehrt $(g, u) \in \tilde{G}(A)$ mit $v_0 \otimes 1 = \sigma(g, u)(v_0 \otimes 1) = u \cdot \rho(g)(v_0 \otimes 1)$, so gilt insbesondere $\rho(g)(v_0 \otimes 1) = v_0 \otimes u^{-1}$, also folgt $g \in G(A)$ und $u = \chi(g)^{-1}$.

Nach Satz 1.5.6 ist damit \tilde{G}/G ein lokalabgeschlossenes Unterschema von \mathbb{A}_k^d (mit $d = \dim_k V$) und insbesondere quasiaffin. Nach der nächsten Proposition können wir aber \tilde{G} als Untergruppe von GL_{m+1} mit sogar *affinem* Quotienten auffassen, und das zeigt die Behauptung. □

3.4.5 Proposition. Es sei k ein Körper und $n, r \geq 1$. Fassen wir das k -Gruppenschema $GL_{n,k} \times GL_{r,k}$ mittels

$$(Q_1, Q_2) \mapsto \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$$

als (abgeschlossene) Untergruppe H von $G := GL_{n+r,k}$ auf, so ist der Quotient G/H affin.

Beweis. Wir konstruieren ein affines k -Schema, das den Quotienten $\underline{G}/\underline{H}$ in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/k)_{\text{Zar}})$ und damit auch in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/k)_{\text{fppf}})$ darstellt; dies genügt nach 1.5.4.

Betrachte die Operation von G auf $M_{n+r,k} := \mathbb{A}_k^{(n+r) \times (n+r)}$ durch Konjugation. Es sei

$$X_0 = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_n, \underbrace{1, \dots, 1}_r) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \in M_{n+r}(k).$$

Für jede k -Algebra A ist dann $H(A)$ der Stabilisator der Matrix X_0 , aufgefaßt als Element von $M_{n+r}(A)$.

Es sei $Y \hookrightarrow M_{n+r}$ das lokal abgeschlossene affine Unterschema, das durch die folgenden Gleichungen definiert ist: für jede k -Algebra A ist $X \in M_{n+r}(A)$ genau dann, wenn $X^2 = X$ ist und das charakteristische Polynom $P_X \in A[T]$ die Form

$$P_X = T^{n+r} + a_{n+r-1}T^{n+r-1} + \dots + a_nT^n \quad \text{mit } a_i \in A \text{ und } a_n \in A^\times$$

hat. Offenbar ist Y stabil unter der GL_{n+r} -Operation, und es gilt $X_0 \in Y(k)$. Betrachte den Morphismus $f : G \rightarrow Y$ mit $Q \mapsto QX_0Q^{-1}$. Nach Konstruktion induziert dieser Morphismus einen Monomorphismus $G/H \rightarrow Y$. Wir behaupten, daß der zugehörige Morphismus von Garben in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/k)_{\text{Zar}})$ surjektiv ist. Dazu genügt es zu zeigen: für jedes k -Schema U ist der induzierte Morphismus von Garben auf U (im klassischen Sinn) surjektiv; dies läßt sich aber auf Halmen testen, und die Halme einer darstellbaren Garbe in der Zariskitopologie lassen sich nach 2.2.3 berechnen.

Sei also A ein lokaler Ring und $X \in Y(A)$. Dann ist $X^2 = X$, und nach dem nächsten Lemma finden wir ein $Q \in GL_{n+r}(A)$ mit

$$Q^{-1}XQ = \text{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{\tilde{n}}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\tilde{r}}) \quad \text{mit gewissen } \tilde{n}, \tilde{r} \text{ mit } \tilde{n} + \tilde{r} = n + r.$$

Dann ist

$$P_X = T^{\tilde{n}} \cdot (T - 1)^{\tilde{r}} = T^{n+r} + a_{n+r-1}T^{n+r-1} + \dots + a_{\tilde{n}}T^{\tilde{n}} \quad \text{mit } a_n = \pm 1.$$

Nach Konstruktion von Y folgt dann aber $\tilde{n} = n$ und $\tilde{r} = r$, und das bedeutet $Q^{-1}XQ = X_0$, also $f(Q) = X$. Das zeigt die behauptete Surjektivität (auf Halmen), und damit folgt $\underline{G}/\underline{H} \cong \underline{Y}$ in $\mathbf{Shv}((\mathbf{Sch}/k)_{\text{Zar}})$. \square

3.4.6 Lemma. Es sei A ein lokaler Ring und $X \in A^{n \times n}$ eine Matrix mit $X^2 = X$. Dann gibt es eine Matrix $Q \in GL_n(A)$ mit $QXQ^{-1} = \text{diag}(0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$.

Beweis. Es sei $V = A^n$. Wegen $X(1 - X) = 0$ ist $V = V_1 \oplus V_2$ mit $V_1 = (1 - X).V$ und $V_2 = X.V$. Auf V_1 operiert X als Null, auf V_2 als Identität. Außerdem sind V_1, V_2 endlich erzeugt und projektiv und damit frei ([Mat, 3.G]). Die Vereinigung zweier Basen liefert damit eine Basis von V , die das Gewünschte tut. \square

Beweis von Satz 3.4.3. Nach Lemma 3.4.4 finden wir eine Kette abgeschlossener Untergruppenschemata $G \subset \tilde{G} \subset GL_{n,k}$, so daß \tilde{G}/G und $GL_{n,k}/\tilde{G}$ quasiaffin sind. Nach 2.1.9 ist $GL_{n,k}/G$ ein Faserbündel über $GL_{n,k}/\tilde{G}$ mit typischer Faser \tilde{G}/G . Wir finden einen treuflachen, lokal endlich präsentierbaren Morphismus $U \rightarrow GL_{n,k}/\tilde{G}$, der dieses Faserbündel trivialisiert. Wir erhalten also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (GL_{n,k}/G) \times_{(GL_{n,k}/\tilde{G})} U & \xrightarrow{\cong} & U \times_k \tilde{G}/G \\ & \searrow & \swarrow \\ & U & \end{array}$$

Da \tilde{G}/G quasiaffin über k ist, ist damit auch $(GL_{n,k}/G) \times_{(GL_{n,k}/\tilde{G})} U$ quasiaffin über U , und nach Abstiegs- (1.4.12) folgt daraus, daß $GL_{n,k}/G \rightarrow GL_{n,k}/\tilde{G}$ quasiaffin ist. Andererseits ist $GL_{n,k}/\tilde{G}$ selbst quasiaffin über k , und damit auch $GL_{n,k}/G$. \square

3.5 Quillen-Patching für Torseure über Familien affiner Geraden

3.5.1 Satz (Quillen-Patching). *Es sei A ein noetherscher Ring, $G \hookrightarrow GL_{n,A}$ ein lineares Gruppenschema über A und E ein G -Torseur über $\text{Spec } A[T]$, so daß $E|_{T=0}$ (also der Pullback von E auf A mittels des Nullschnitts $A[T] \rightarrow A, T \mapsto 0$) trivial ist. Dann ist*

$$S := \{f \in A \mid E|_{A_f[T]} \text{ ist trivial}\}$$

ein Ideal in A , das sogenannte Quillen-Ideal von E .

3.5.2 Korollar. *Gibt es unter den Voraussetzungen des Satzes eine offene Überdeckung $\text{Spec } A = \bigcup_i U_i$, so daß jedes $E|_{A^1_{U_i}}$ trivial ist, so ist E trivial.*

Der Satz ist eine Variante des Patching-Arguments, das Quillen in seinem Beweis der Trivialität von Vektorbündeln auf \mathbb{A}_k^n (k ein Körper) verwendet, siehe [Qu]. Im Falle eines unendlichen Grundkörpers werden wir dieses Resultat später mitbeweisen.

3.5.3 Lemma. *Es sei A ein noetherscher Ring und $G \hookrightarrow GL_{n,A}$ ein lineares Gruppenschema über A . Es sei $f \in A$ und $g \in G(A_f[T])$ ein Element mit $g(T=0) = 1$.⁽ⁱⁱⁱ⁾ Dann gibt es ein $k \geq 0$, so daß für alle $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 - a_2 \in f^k A$ das Element $g(a_1 T) \cdot g(a_2 T)^{-1} \in G(A_f[T])$ geliftet werden kann nach $G(A[T])$.*

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\psi_k := g((Y + f^k Z) \cdot T) \cdot g(Y \cdot T)^{-1} \in G(A_f[T, Y, Z])$. Es genügt zu zeigen, daß ψ_k für jedes genügend große k geliftet werden kann zu einem Element $\varphi_k \in G(A[T, Y, Z])$: denn dann gilt für $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 = a_2 + f^k a$

$$g(a_1 T) \cdot g(a_2 T)^{-1} = \psi_k(T, a_2, a) = \varphi_k(T, a_2, a)_f,$$

also ist $\varphi_k(T, a_2, a) \in G(A[T])$ die gesuchte Liftung. – Zum Beweis zeigen wir, daß $\psi_k \in G(A_f[T, Y, Z])$ für genügend große k geliftet werden kann nach $M_n(A[T, Y, Z])$, und daß diese Liftings, wenn man sie geschickt wählt, für genügend große k auch in $G(A[T, Y, Z])$ liegen.

⁽ⁱⁱⁱ⁾Damit meinen wir genau: g ist ein Homomorphismus von A -Algebren $H \rightarrow A_f[T]$, wobei $G = \text{Spec } H$ ist. Mit $g(T=0)$ bezeichnen wir dann die Komposition $H \xrightarrow{g} A_f[T] \xrightarrow{T \mapsto 0} A_f$.

1. Für alle genügend großen k gibt es $\varphi_k \in M_n(A[T, Y, Z])$ mit $\psi_k = (\varphi_k)_f$ und $\varphi(T, Y, 0) = 1$, und die φ_k lassen sich so wählen, daß $\varphi_k(T, Y, f^i Z) = \varphi_{k+i}$ gilt, sobald beide Seiten definiert sind.

Beweis. Man kann leicht nachrechnen, daß in $M_n(A_f[T, Y, Z])$ gilt $\psi_k = 1 + f^k Z \sum_{\alpha} P_{k,\alpha} t_{\alpha}$ mit Matrizen $t_{\alpha} \in M_n(A_f)$ und (von k abhängigen) Polynomen $P_{k,\alpha} \in A[T, Y, Z]$.^(iv) Für ein genügend großes k_0 lassen sich die $f^{k_0} t_{\alpha}$ alle nach $M_n(A_f)$ liften, also $\psi_{k_0} = 1 + Z \cdot \chi_f$ mit einem $\chi \in M_n(A[T, Y, Z])$. Für $k \geq k_0$ setze $\varphi_k := 1 + f^{k-k_0} Z \cdot \chi(T, Y, f^{k-k_0} Z)$ für $i \geq 0$; dann gilt $(\varphi_k)_f = \psi_{k_0}(T, Y, f^{k-k_0} Z) = \psi_k$ und außerdem $\varphi_k(T, Y, 0) = 1$ sowie $\varphi_k(T, Y, f^i Z) = \varphi_{k+i}$.

2. Für genügend großes k gilt $\varphi_k \in GL_n(A[T, Y, Z])$.

Beweis. Fixiere ein k , so daß φ_k definiert ist. Für $\varphi'_k := \varphi_k(T, Y + f^r Z, -Z) \in M_n(A[T, Y, Z])$ rechnet man schnell nach, daß $(\varphi'_k)_f = \psi_k^{-1}$ gilt. Also haben wir $(\varphi_k \cdot \varphi'_k)_f = (\varphi'_k \cdot \varphi_k)_f = 1$. Wegen $\varphi_k(T, Y, 0) = 1 = \varphi'_k(T, Y, 0)$ gilt $\varphi_k \varphi'_k = 1 + Z \tau_k$ mit einer Matrix $\tau_k \in M_n(A[T, Y, Z])$. Aber $(\tau_k)_f = 0$, also gilt $f^i \tau_k = 0$ für alle genügend großen i , und daraus folgt $(\varphi_k \varphi'_k)(T, Y, f^i Z) = 1 + f^i Z \tau_k(T, Y, f^i Z) = 1$. Durch eventuelles Vergrößern von i kann man erreichen, daß analog auch $(\varphi'_k \varphi_k)(T, Y, f^i Z) = 1$ ist, und das heißt, daß $\varphi_k(T, Y, f^i Z) = \varphi_{k+i}$ invertierbar ist.

3. Für fast alle k gilt $\varphi_k \in G(A[T, Y, Z])$.

Beweis. Fixiere k mit $\varphi_k \in GL_n(A[T, Y, Z])$. Dann ist $\varphi_k(T, Y, 0) = 1 \in G(A[T, Y])$ und $(\varphi_k)_f = \psi_k \in G(A_f[T, Y, Z])$. Für alle genügend großen i folgt dann $\varphi_k(T, Y, f^i Z) \in G(A[T, Y, Z])$ nach dem nächsten Lemma, und wegen $\varphi_k(T, Y, f^i Z) = \varphi_{k+i}$ ist die Behauptung bewiesen. □

3.5.4 Lemma. *Es sei X ein Schema und $Z \hookrightarrow X$ ein endlich präsentierbares abgeschlossenes Unterschema. Es sei A ein Ring, $f \in A$ und $p \in X(A[T])$, so daß $p(T=0) \in Z(A)$ gilt und $p_f \in Z(A_f[T])$. (Dabei ist p_f das Bild von p unter $A[T] \rightarrow A_f[T]$.) Dann gilt $p(f^s T) \in Z(A[T])$ für alle genügend großen s .*

Beweis. Uns interessiert nur der Fall, daß $X = \text{Spec } R$ affin ist (die Verallgemeinerung auf beliebiges X ist aber nicht schwierig; ebenso übrigens auch die Verallgemeinerung auf ein beliebiges Schema anstelle des Rings A); insbesondere ist dann $Z = \text{Spec } R/I$. Sei $\pi : A[T] \rightarrow A$ die Abbildung $T \mapsto 0$ und $\ell : A[T] \rightarrow A_f[T]$ die Lokalisierung.

Zu p korrespondiert ein Ringhomomorphismus $\varphi : R \rightarrow A[T]$, und nach Voraussetzung faktorisieren $\pi \circ \varphi$ und $\ell \circ \varphi$ über R/I . Da I endlich erzeugt ist, genügt es zu zeigen: für jedes $r \in I$, $P = \varphi(r)$, ist $P(f^s T) = 0$ für alle genügend großen s . Wegen $\pi(P) = 0$ gilt $P = T \cdot Q$ mit $Q \in A[T]$; wegen $\ell(P) = 0$ gibt es ein t mit $0 = f^t P = f^t T Q$, also $f^t Q = 0$. Daraus folgt aber $P(f^s T) = T f^s Q(f^s T) = 0$ für alle $s \geq t$. □

3.5.5 Lemma. *Es sei A ein noetherscher Ring und $G \hookrightarrow GL_{n,A}$ ein lineares Gruppenschema über A . Es seien $f_0, f_1 \in A$ mit $(f_0, f_1) = A$, und es sei $g \in G(A_{f_0 f_1}[T])$ ein Element mit $g(T=0) = 1$. Dann läßt sich g zerlegen als $g = h_0 \cdot h_1^{-1}$ mit $h_i \in G(A_{f_i}[T])$ und $h_i(T=0) = 1$.*

^(iv)Die Rechnung geht so: schreibe $g = \sum_{i=0}^n T^i a_i$ und $g^{-1} = \sum_{j=0}^m T^j b_j$ mit $a_i, b_j \in M_n(A_f)$. Wegen $g(T=0) = 1 = g(T=0)^{-1}$ folgt $a_0 = b_0 = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \psi_k &= 1 + [g((Y + f^k Z)T) - g(YT)] \cdot g(YT)^{-1} = 1 + \left[\sum_{i=1}^n T^i \left((Y + f^k Z)^i - Y^i \right) a_i \right] \cdot \sum_{j=0}^m Y^j T^j b_j \\ &= 1 + \left[\sum_{i=1}^n T^i f^k Z \sum_{r=0}^{i-1} (Y + f^k Z)^r Y^{i-1-r} a_i \right] \cdot \sum_{j=0}^m Y^j T^j b_j = 1 + f^k Z \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j} a_i b_j \end{aligned}$$

nach der geometrischen Summenformel, wobei die $P_{i,j}$ irgendwelche (von k abhängigen) Polynome in $A[T, Y, Z]$ sind.

Beweis. Es sei $k \geq 1$. Wegen $(f_0, f_1) = A$ gilt dann auch $(f_0^k, f_1^k) = A$, also gibt es $\alpha_0, \alpha_1 \in A$ mit $\alpha_0 f_0^k + \alpha_1 f_1^k = 1$. Es gilt $g = g_0 \cdot g_1^{-1}$ mit

$$g_0 = g(T) \cdot g(\alpha_0 f_0^k \cdot T)^{-1}$$

und $g_1 = g(\alpha_0 f_0^k \cdot T)^{-1} = g(0 \cdot T) \cdot g(\alpha_0 f_0^k T)^{-1}$.

Wir verwenden nun das letzte Lemma, um zu zeigen, daß jedes $g_i \in G(A_{f_0 f_1}[T])$ zu einem $y_i \in G(A_{f_i}[T])$ geliftet werden kann, falls nur k genügend groß gewählt wurde: Denn $1 - \alpha_0 f_0^k = \alpha_1 f_1^k$ liegt in $f_1^k A$, also können wir das Lemma auf den Ring A_{f_0} anwenden, um g_0 zu liften. Ebenso gilt $0 - \alpha_0 f_0^k \in f_0^k A$, also kann auch g_1 geliftet werden (wobei wir das Lemma auf den Ring A_{f_1} anwenden). \square

Ist X eine Menge, auf der eine Gruppe G operiert, so schreiben wir $x \sim y$ für $x, y \in X$, falls $x \cdot G = y \cdot G$ ist, also beide Elemente in derselben Bahn liegen.

3.5.6 Lemma. *Es sei A ein noetherscher Ring, $G \hookrightarrow \text{GL}_{n,A}$ ein lineares Gruppenschema über A , und E ein A -Schema mit einer freien G -Operation (d.h. für jede A -Algebra B operiere $G(B)$ frei auf $E(B)$). Es seien $f_0, f_1 \in A$ mit $(f_0, f_1) = A$. Sind dann $e_i \in E(A_{f_i}[T])$ mit $e_0(T=0) = e_1(T=0)$ in $E(A_{f_0 f_1})$, und liegen e_0 und e_1 in $E(A_{f_0 f_1}[T])$ in derselben G -Bahn, so gibt es ein $e \in E(A[T])$, das für $i = 0, 1$ in der G -Bahn von e_i in $E(A_{f_i})$ liegt.*

Beweis. Sei $g \in G(A_{f_0 f_1}[T])$ mit $e_0 \cdot g = e_1$ in $E(A_{f_0 f_1}[T])$. Da die Operation frei ist, folgt $g(T=0) = 1$, und nach dem letzten Korollar finden wir $h_i \in G(A_{f_i}[T])$ mit $g = h_0 \cdot h_1^{-1}$. Setze $\tilde{e}_i := e_i \cdot h_i \in X(A_{f_i}[T])$. In $E(A_{f_0 f_1}[T])$ folgt dann $\tilde{e}_0 = e_0 \cdot h_0 = e_0 \cdot g h_1 = e_1 \cdot h_1 = \tilde{e}_1$, also lassen sich \tilde{e}_0 und \tilde{e}_1 zu einem Element $e \in X(A[T])$ verkleben. \square

Beweis des Patching-Satzes 3.5.1. Selbstverständlich gilt $0 \in S$; es genügt also zu zeigen: sind $f_0, f_1 \in S$, so gilt $(f_1, f_2) \subset S$. Sei also $g \in (f_1, f_2)$. Dann gilt $D(g) \subset D(f_0) \cup D(f_1)$. Durch Übergang von A zu A_g können wir $g = 1$ annehmen, also $(f_1, f_2) = A$, und müssen zeigen, daß E trivial ist.

Da $E|_{T=0}$ trivial ist, gibt es ein $e \in E(A)$ (mit A als $A[T]$ -Algebra mittels $T \mapsto 0$), und wegen $f_i \in S$ gibt es $e_i \in E(A_{f_i}[T])$ für $i = 0, 1$. Wir können annehmen, daß $e_i(T=0) = e$ in $E(A_{f_i})$ gilt: wähle nämlich $g_i \in G(A_{f_i})$ mit $e_i(T=0) \cdot e_i = e$ in $E(A_{f_i})$. Wir können g_i als Element von $G(A_{f_i}[T])$ auffassen, und dann gilt $(e_i \cdot g_i)(T=0) = e$ in $E(A_{f_i})$, so daß wir nur e_i durch $e_i \cdot g_i$ ersetzen müssen.

Also sind die Voraussetzungen des letzten Lemmas erfüllt (denn die Operation von G auf E ist frei und transitiv), also gibt es ein Element $\tilde{e} \in E(A[T])$. Das beweist die Trivialität von E . \square

3.6 Trivialität rational trivialer Torseure auf \mathbb{A}_k^n

Die meisten Resultate in diesem Abschnitt stammen im Wesentlichen von Raghunathan ([Ra78]).

3.6.1 Satz. *Es sei X ein affines Schema von endlichem Typ über einem Körper k , und es sei G eine lineare algebraische Gruppe über k . Es sei E ein G -Torseur über $\mathbb{A}_X^1 = \mathbb{A}_k^1 \times_k X$, über den folgendes bekannt sei:*

1. *Der Pullback von E auf X vermöge des Nullschnitts $s_X : X \hookrightarrow \mathbb{A}_X^1$ ist trivial.*
2. *Ist $x \in X$ ein beliebiger abgeschlossener Punkt, so läßt E sich (evtl. nach Ersetzen von X durch eine Umgebung von x) fortsetzen zu einem G -Torseur über $\mathbb{P}_{L(x)}^1$, dessen Einschränkung auf $\mathbb{P}_{L(x)}^1$ trivial ist, wobei $L(x)$ eine gewisse Körpererweiterung von $k(x)$ ist.*

Dann ist E trivial.

Beweis. Zu jedem abgeschlossenen Punkt $x \in X$ sei $\kappa(x) \subset L(x)$ eine Körpererweiterung, V_x eine offene Umgebung und $E(x)$ eine Fortsetzung von $E|_{\mathbb{A}_{V_x}^1}$ auf $\mathbb{P}_{V_x}^1$, deren Einschränkung auf $\mathbb{P}_{L(x)}^1$ trivial ist. Nach dem Starrheitssatz von Grothendieck-Raghunathan (3.4.1) können wir durch Verkleinerung der V_x erreichen, daß jedes $E(x)$ Pullback eines G -Torseurs $\widetilde{E}(x)$ über V_x ist, also insbesondere $E|_{\mathbb{A}_{V_x}^1} = (\mathbb{A}_{V_x}^1 \rightarrow V_x)^* \widetilde{E}(x)$. Die Bedingung 1. erzwingt dann aber die Trivialität von \widetilde{E}_x : denn im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V_x & \hookrightarrow & X \\ \text{id} \swarrow & \downarrow s_{V_x} & \downarrow s_X \\ V_x & \xleftarrow{\pi} \mathbb{A}_{V_x}^1 \hookrightarrow & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

folgt aus $\pi^* \widetilde{E}(x) = E|_{\mathbb{A}_{V_x}^1}$ bereits $\widetilde{E}(x) = s_{V_x}^*(E|_{\mathbb{A}_{V_x}^1}) = (s_X^* E)|_{V_x}$, aber $s_X^* E$ ist ja trivial.

Insbesondere ist also für jedes x die Einschränkung von E auf $\mathbb{A}_{V_x}^1$ trivial; da $X = \bigcup_x V_x$ ist,^(v) folgt daraus nach dem Patchingsatz (3.5.1) die Trivialität von E . \square

Dieser Satz läßt sich zur Grundlage eines Induktionsbeweises für die Trivialität rational trivialer Torseure über \mathbb{A}_k^n unter einer geeigneten Gruppe machen.

Definition. Es sei A ein Integritätsring und G ein A -Gruppenschema. G heißt A -liftend, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset A$ gilt: mit $L = A/\mathfrak{m}$ läßt sich jedes Element $\sigma \in G(K(\mathbb{A}_L^1)) = G(K(\mathbb{P}_L^1))$ schreiben als $\sigma = \Sigma \cdot u$, wobei u in $\infty \in \mathbb{P}_L^1$ definiert ist und Σ sich nach $D(f) \Leftrightarrow \mathbb{A}_A^1$ liften läßt, wobei $f \in A[T]$ ein Polynom ist, dessen Leitkoeffizient nicht in \mathfrak{m} liegt. (Insbesondere ist $D(f)$ dann eine offene Umgebung von $\mathbb{A}_L^1 \hookrightarrow \mathbb{A}_A^1$.)

Offensichtlich gilt: Ist G ein liftendes A -Gruppenschema, so ist G für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ auch liftend über A/\mathfrak{p} (d.h. $G_{A/\mathfrak{p}}$ ist liftendes A/\mathfrak{p} -Gruppenschema). Ist insbesondere R ein Integritätsring und G ein R -Gruppenschema, das über jeder Polynomalgebra $R[X_1, \dots, X_n]$ liftend ist, so ist G über jeder nullteilerfreien R -Algebra von endlichem Typ liftend. Wir werden deshalb im Folgenden stets diese letztere Bedingung formulieren, obwohl unsere Anwendungen nur die scheinbar schwächere Aussage über Polynomringe benötigen.

3.6.2 Satz. *Es sei k ein unendlicher Körper und G eine reductive k -Gruppe, die für jede nullteilerfreie k -Algebra von endlichem Typ liftend ist. Dann ist jeder rational triviale G -Torseur über \mathbb{A}_k^n trivial.*

Wir beweisen zunächst ein

3.6.3 Lemma. *Es sei k ein Körper, $X = \text{Spec } A$ affines integres Schema von endlichem Typ über k , und es sei G eine zusammenhängende reductive lineare Gruppe über k , die über A liftend ist. Es sei E ein G -Torseur über \mathbb{A}_X^1 , der auf $U = D(f) \subset X$ trivial ist, wobei $f \in A[T]$ ein unitäres Polynom ist. Ist dann $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, so läßt sich E nach Verkleinern von X zu einem G -Torseur \widetilde{E} über \mathbb{P}_X^1 fortsetzen, dessen Einschränkung auf $\mathbb{P}_{\kappa(x)}^1$ trivial ist.*

Beweis. Sei $L = \kappa(x)$ und $U_x = U \times_X \text{Spec } L$, so daß also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_x & \hookrightarrow & \mathbb{A}_L^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \hookrightarrow & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

^(v)Denn $\bigcup_x V_x$ enthält alle abgeschlossenen Punkte; das Komplement ist eine abgeschlossene Teilmenge ohne abgeschlossene Punkte, also leer.

kartesisch ist. Da f unitär ist, ist U_x nichtleer, also ist der Pullback von E auf \mathbb{A}_L^1 rational trivial und damit nach Satz 3.2.1 trivial (fasse den Pullback dazu als Torseur unter der reduktiven L -Gruppe $G \times_k L$ auf).

Also gibt es Elemente $\Phi \in E(U)$ und $\psi \in E(\mathbb{A}_L^1)$. Dann gilt

$$\psi|_{U_x} = \Phi|_{U_x} \cdot \sigma \quad \text{mit einem } \sigma \in G(U_x) \subset G(K(\mathbb{A}_L^1)).$$

Da G liftd für A ist, können wir σ in $G(K(\mathbb{A}_L^1))$ schreiben als Produkt der Form $\Sigma \cdot u$ mit $u \in G(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_L^1, \infty})$ und $\Sigma \in G(D(g)) \subset G(\mathbb{A}_X^1)$, wobei $g \in A[T]$ ein Polynom ist, das wir durch Verkleinern von X als unitär annehmen können. Da $G(_)$ filtrierende induktive Limites von Algebren erhält (2.2.3), finden wir ein $0 \neq \bar{h} \in L[T]$, so daß u auf $D(\bar{h}) \subset \mathbb{A}_L^1$ definiert ist (und sich auf ∞ fortsetzen läßt). Sei h eine unitäre Liftung von \bar{h} nach $A[T]$; durch Ersetzen von f durch fgh können wir dann erreichen, daß Σ auf ganz U definiert ist, und daß u auf ganz U_x definiert ist und sich fortsetzen läßt auf \tilde{U}_x mit $\tilde{U} = \mathbb{P}_X^1 - (\mathbb{A}_X^1 - U)$. Dann gilt insbesondere $\sigma = \Sigma|_{U_x} \cdot u$ in $G(U_x)$.

Verkleben wir nun E und den trivialen G -Torseur $G \times \tilde{U}$ durch den durch $1 \mapsto \Phi \cdot \Sigma \in G(U)$ definierten Isomorphismus $G \times U \rightarrow E|_U$ zu einem G -Torseur \tilde{E} auf $\tilde{U} \cup \mathbb{A}_X^1 = \mathbb{P}_X^1$. Dann ist \tilde{E}_x die Verklebung von $G \times \tilde{U}_x$ und $E|_{\mathbb{A}_X^1}$ vermöge $1 \mapsto \Phi|_{U_x} \cdot \Sigma|_{U_x} = (\psi|_{U_x} \cdot \sigma^{-1}) \cdot \sigma \cdot u^{-1} = \psi|_{U_x} \cdot u^{-1}$ auf U_x , also $u \mapsto \psi|_{U_x}$. Aber u ist auf ganz \tilde{U}_x definiert und ψ auf ganz \mathbb{A}_L^1 , also ist der zusammengeklebte Torseur \tilde{E}_x auf \mathbb{P}_L^1 trivial. \square

Beweis von 3.6.2. Induktion nach n . Der Fall $n = 1$ ist Satz 3.2.1), der sogar für *jede* zusammenhängende reduktive k -Gruppe gilt. Sei also $n > 1$ und die Aussage für $n - 1$ gezeigt. Es sei $A = k[X_1, \dots, X_{n-1}]$, $X = \text{Spec } A$. Es sei E ein G -Torseur über $\mathbb{A}_k^n = \mathbb{A}_X^1$, der auf $U = D(f)$ trivial ist, wobei $f \in k[X_1, \dots, X_n]$ ein nichtkonstantes Polynom ist. Nach 2.6.2 können wir annehmen, daß f als Element von $A[X_n]$ unitär ist. Wir zeigen, daß die Voraussetzungen von Satz 3.6.1 erfüllt sind:

1. Die kanonische Projektion $\pi : \mathbb{A}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \times_k X \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ ist offen (denn etwa flach); da die k -rationalen Punkte in \mathbb{A}_k^1 dicht liegen, können wir durch eine Translation annehmen, daß $\pi(U)$ den Ursprung enthält. Ist nun $s_X : X \rightarrow \mathbb{A}_X^1$ der Nullschnitt, so ist $s_X^* E$ trivial: denn $U' := s_X^{-1}(U)$ ist dann nach Konstruktion nichtleer, und Betrachten des (kartesischen) kommutativen Diagramms

$$\begin{array}{ccc} U' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow s_X \\ U & \longrightarrow & \mathbb{A}_X^1 \end{array}$$

zeigt, daß $s_X^* E$ rational trivial und damit nach Induktionsvoraussetzung trivial ist.

2. ist gerade Inhalt des Lemmas.

Nach Satz 3.6.1 ist E dann trivial. \square

3.6.4 Satz. *Es sei k ein Körper und G eine zusammenhängende zerfallende reduktive lineare k -Gruppe. Dann ist G liftd für jede nullteilerfreie k -Algebra, wobei in der Definition von „liftd“ sogar $u = 1$ gewählt werden kann.*

Beweis. Es sei A eine nullteilerfreie k -Algebra und $\mathfrak{m} \subset A$ ein maximales Ideal, $L = A/\mathfrak{m}$.

Sei $U \hookrightarrow \mathbb{A}_L^1$ eine offene Teilmenge und $\sigma \in G(U)$ gegeben. Insbesondere ist σ ein Morphismus von k -Schemata $U \rightarrow G$. Nach 1.5.25 finden wir ein offenes Unterschema $\mathbb{A}_k^p \times \mathbb{G}_{m,k}^q \cong \Omega \hookrightarrow G$, so daß

$\sigma^{-1}(\Omega)$ nichtleer ist. Durch Verkleinern von U können wir annehmen, daß σ ein Morphismus $U \rightarrow \Omega$ ist. Dann ist σ gegeben durch einen Homomorphismus von k -Algebren

$$\sigma^\# : k[P_1, \dots, P_p, Q_1^{\pm 1}, \dots, Q_q^{\pm 1}] \rightarrow L(T).$$

Schreibe $\sigma^\#(P_i) = a_i/b_i$ und $\sigma^\#(Q_j) = c_j/d_j$ mit $a_i, b_i, c_j, d_j \in L[T]$. Wähle $A_i, B_i, C_j, D_j \in A[T]$ als Liftungen der Polynome in $L[T]$ mit $\deg A_i = \deg a_i$ usw. Es sei f das Produkt aller B_i, C_j, D_j . Dann liegt der Leitkoeffizient von f nicht in \mathfrak{m} .

In $A[T]_f$ sind dann alle B_i, C_j, D_j invertierbar, und A_i, B_i, C_j, D_j liefern dann eine Faktorisierung von $\sigma^\#$ über $A[T]_f$, also eine Faktorisierung von σ über $D(f) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{A}_\Lambda^1$. \square

3.6.5 Korollar. *Es sei k ein unendlicher Körper und G eine zerfallende reductive lineare k -Gruppe. Dann ist jeder rational triviale G -Torseur über \mathbb{A}_k^n trivial.*

Beweis. Für zusammenhängendes G folgt die Aussage aus den Sätzen 3.6.2 und 3.6.4. Im allgemeinen Fall betrachte die exakte Sequenz $1 \rightarrow G^\circ \rightarrow G \rightarrow \mu \rightarrow 1$ von algebraischen Gruppen über k mit $\mu := \pi_0(G)$. Sie liefert das folgende Diagramm in Kohomologie (mit $X = \mathbb{A}_k^n, K = K(X)$):

$$\begin{array}{ccccccc} \mu(X) & & & & & & \\ \downarrow & \searrow & & & & & \\ \mu(K) & & \check{H}_{\text{ét}}^1(X, G^\circ) & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(X, G) & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(X, \pi_0(G)) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \check{H}_{\text{ét}}^1(K, G^\circ) & \xrightarrow{\rho} & \check{H}_{\text{ét}}^1(K, G) & \longrightarrow & \check{H}_{\text{ét}}^1(K, \pi_0(G)) \end{array}$$

Der vertikale Pfeil ganz links ist invertierbar nach dem nächsten Lemma; der vertikale Pfeil ganz rechts ist injektiv nach Satz 2.4.2.

Eine kurze Diagrammjagd zeigt, daß ein Element $\alpha \in \check{H}_{\text{ét}}^1(X, G)$ mit trivialem Bild in $\check{H}_{\text{ét}}^1(K, G)$ induziert wird durch ein Element $\alpha_0 \in \check{H}_{\text{ét}}^1(X, G^\circ)$. Dessen Bild b_0 in $\check{H}_{\text{ét}}^1(K, G^\circ)$ wird in $\check{H}_{\text{ét}}^1(K, G)$ trivial. Da aber $\mu(K)$ auf den Fasern von ρ transitiv operiert und $\mu(X) \rightarrow \mu(K)$ surjektiv ist, können wir durch Ersetzen von α_0 durch $\alpha_0 \cdot g$ mit einem $g \in \mu(X)$ annehmen, daß $b_0 = 1$ ist. Dann folgt aber $\alpha_0 = 1$ nach dem schon bewiesenen Fall, und das bedeutet $\alpha = 1$. \square

3.6.6 Lemma. *Es sei k ein Körper und A eine étale k -Algebra. Dann sind für jedes n die Abbildungen*

$$\text{Hom}_{\text{Alg}_k}(A, k) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Alg}_k}(A, k[X_1, \dots, X_n]) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Alg}_k}(A, k(X_1, \dots, X_n))$$

bijektiv.

Beweis. Die Injektivität ist jeweils klar. Nach 1.2.8 gilt $A = L_1 \times \dots \times L_n$ mit gewissen endlichen (sogar separablen) Körpererweiterungen L_i von k . Ein Homomorphismus von A in einen Integritätsring faktorisiert dann über eines der L_i , so daß wir ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen können, daß $A = L$ eine endliche (separable) Körpererweiterung von k ist.

Ist nun $f : L \rightarrow k(X_1, \dots, X_n)$ ein Homomorphismus, so ist $f(L)$ algebraisch über k und damit *a fortiori* ganz über $k[X_1, \dots, X_n]$; da faktorielle Ringe aber ganzabgeschlossen sind, folgt $f(L) \subset k[X_1, \dots, X_n]$. Also haben wir einen Homomorphismus $L \rightarrow k[X_1, \dots, X_n]$. Dieser induziert einen Gruppenhomomorphismus $L^\times \hookrightarrow k[X_1, \dots, X_n]^\times = k^\times$, und daraus folgt $L = k$. \square

Im Fall $G = GL_n$ erhalten wir insbesondere:

3.6.7 Korollar (Quillen–Suslin). *Ist k ein unendlicher Körper, so ist jedes Vektorbündel auf \mathbb{A}_k^n trivial.*

Wie bereits erwähnt, gilt diese Aussage auch ohne die Unendlichkeitsvoraussetzung an k , vgl. etwa [Qu] oder [La, XXI, § 3.7].

3.6.8 Korollar (Serre–Grothendiecksche Vermutung). *Es sei k ein unendlicher Körper, G eine zerfallende reduktive k -Gruppe. Es sei X eine glatte k -Varietät und E ein G -Torseur über X (in der étalen Topologie). Ist E rational trivial, so ist E lokal trivial bezüglich der Zariskitopologie.*

Beweis. Korollar 3.6.5 und Korollar 2.7.6; man benötigt nur, daß eine zusammenhängende zerfallende reduktive Gruppe nach Erweiterung des Grundkörpers diese Eigenschaften behält. \square

Insbesondere beweist dies die Serre–Grothendiecksche Vermutung für beliebige reduktive Gruppen über einem *algebraisch* (oder sogar nur separabel) *abgeschlossenen* Grundkörper. – Die Sätze dieses Abschnitts lassen sich aber auch im Falle nichtzerfallender Gruppen ausnutzen. Beispielsweise beweist Raghunathan in [Ra89, Cor. 1.8] den folgenden

3.6.9 Satz. *Es sei k ein Körper, G eine halbeinfache k -Gruppe, für die alle k -einfachen Komponenten isotrop und einfach zusammenhängend sind. Dann ist G liftend für jede endlich erzeugte nullteilerfreie k -Algebra; das Polynom f in der Definition einer „liftenden“ Gruppe kann sogar so gewählt werden, daß es Koeffizienten in k hat.*

Insbesondere lassen sich damit die obigen Korollare auch für Gruppen mit der im Satz angegebenen Eigenschaft zeigen. Mit ähnlichen Techniken wie den in dieser Arbeit erklärten kann man außerdem zeigen, daß die Serre–Grothendiecksche Vermutung auch für *beliebige* (nicht notwendig reduktive) lineare algebraische Gruppen über einem *vollkommenen* unendlichen Körper richtig ist, vgl. [C–O, 3.2].

Literaturverzeichnis

- [A–M] MICHAEL F. ATIYAH / I. G. MACDONALD: *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [Au] MAURICE AUSLANDER: *On the Purity of the Branch Locus*, Amer. J. of Math. **84** No. 1 (1962), 116–125.
- [Bh] S. M. BHATWADEKAR: *Analytic Isomorphism and Category of Finitely Generated Modules*, Comm. in Alg. **16** (1988), 1949–1958.
- [Bor] ARMAND BOREL: *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics **126**, Springer, 1991
- [Bos] SIEGFRIED BOSCH: *Algebra*, 5. Auflage, Springer 2004
- [Bou] NICOLAS BOURBAKI: *Algèbre commutative*, *Éléments de Mathématique* **27**, **28**, **30**, **31**, Hermann, 1961–1965
- [B–T] ARMAND BOREL / JACQUES TITS: *Groupes Réductifs*, Publications mathématiques de l’I.H.É.S. **27**, 1965
- [C–O] JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE / MANUEL OJANGUREN: *Espaces principaux homogènes localement triviaux*, Publications mathématiques de l’I.H.É.S. **75**, 1992
- [D–G] MICHEL DEMAZURE / PIERRE GABRIEL: *Groupes algébriques*, Tome I, Masson, Paris 1970.
- [D–W] RICHARD DEDEKIND / HEINRICH WEBER: *Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen*, J. reine angew. Mathematik **92** (1882), 181–290.
- [EGA] ALEXANDER GROTHENDIECK / JEAN DIEUDONNÉ: *Éléments de géométrie algébrique*, Publications mathématiques de l’I.H.É.S. **4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**, 1960–1967
- [Ei] DAVID EISENBUD, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **150**, Springer, 1995
- [Ge] WULF-DIETER GEYER, *Die Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen nach Dedekind und Weber*, in: WINFRIED SCHARLAU (Hrsg.): *Richard Dedekind, 1831–1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1981, 109–133
- [Gi] PHILIPPE GILLE: *Torseurs sur la droite affine*, Transf. Groups Vol. 7 No. 3, 2002, 231–245.
- [Ha67] GÜNTER HARDER: *Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen*, Inv. Math. **4** (1967), 165–191
- [Ha68] GÜNTER HARDER: *Halbeinfache Gruppenschemata über vollständigen Kurven*, Inv. Math. **6** (1968), 107–149
- [Har] ROBIN HARTSHORNE: *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer, 1977
- [Has] HELMUT HASSE: *Zahlentheorie*, 2. Auflage, Akademie-Verlag, Berlin 1963.
- [Hu] JAMES E. HUMPHREYS: *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics **21**, Springer, 1975

- [Kn] MAX-ALBERT KNUS: *Quadratic and Hermitian Forms Over Rings*, Springer Grundlehren **294**, 1991
- [La] SERGE LANG: *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **211**, Springer, 2002
- [Mac] SAUNDERS MACLANE: *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer, 1971
- [Mat] HIDEYUKI MATSUMURA: *Commutative Algebra*, Second Edition, Benjamin/Cummings Publishing, 1980
- [Mi80] JAMES S. MILNE, *Étale Cohomology*, Princeton Mathematical Series **33**, Princeton University Press, 1980
- [Mi05] JAMES S. MILNE, *Algebraic and Arithmetic Groups*, Vorlesungsskript, 2005, verfügbar auf <http://www.jmilne.org/math/>
- [Mu] DAVID MUMFORD, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lecture Notes in Mathematics **1358**, Springer, 1999
- [Oo] FRANS OORT: *Algebraic Group Schemes in Characteristic Zero Are Reduced*, *Inv. Math.* **2** (1966), 79–80
- [Qu] DANIEL G. QUILLEN: *Projective Modules over Polynomial Rings*, *Inv. Math.* **36** (1976), 167–171
- [Ra78] MADABUSI S. RAGHUNATHAN: *Principal Bundles on Affine Space*, in: *C. P. Ramanujam. – A Tribute*, Tata Institute of Fundamental Research, Studies in Mathematics **8**, Springer, 1978, 187–206.
- [Ra89] MADABUSI S. RAGHUNATHAN: *Principal Bundles on Affine Space and Bundles on the Projective Line*, *Math. Ann.* **285** (1989), 309–332
- [Ra93] MADABUSI S. RAGHUNATHAN: *Principal Bundles Admitting a Rational Section*, *Inv. Math.* **116** (1994), 409–423
- [Ro] MAXWELL ROSENLICHT: *Questions of Rationality for Solvable Algebraic Groups Over Nonperfect Fields*, *Annali di Math. IV* **61** (1963), 97–120
- [Sch] WINFRIED SCHARLAU: *Some Remarks on Grothendieck’s Paper „Sur la classification des fibres holomorphes sur la sphere de Riemann“*, Preprint, 2005
- [Se] JEAN-PIERRE SERRE: *Espaces fibrés algébriques*, Séminaire Claude Chevalley **3** (1958), Exp. I, 1–37
- [SGA 1] ALEXANDER GROTHENDIECK: *Revêtements Étales et Groupe Fondamental*, Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer, 1971
- [SGA 3] MICHEL DEMAZURE, ALEXANDER GROTHENDIECK et al.: *Schémas en Groupes*, Lecture Notes in Mathematics **151, 152, 153**, Springer, 1970
- [SGA 4] MICHAEL ARTIN, ALEXANDER GROTHENDIECK, JEAN-LOUIS VERDIER et al.: *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*, Lecture Notes in Mathematics **269, 270, 305**, Springer, 1972/1973
- [Sp] TONNY A. SPRINGER, *Linear Algebraic Groups*, Second Edition, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser, 1998
- [Wa] WILLIAM C. WATERHOUSE: *Affine Group Schemes*, Graduate Texts in Mathematics **66**, Springer, 1979

Erklärung

Hiermit versichere ich, daß ich diese Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

München, den 31. März 2008
