Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser
13.12.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 8

Aufgabe 1. Sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät von Dimension $n-1$, $n \geq 1$.
Zeige: $X = V(f)$ für ein nicht konstantes irreduzibles homogenes Polynom f in $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$.
Hinweis: Vergleiche mit Aufgabe 2, Übungsblatt 4.

Aufgabe 2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.
a) Zeige: Jede zwei Kurven in $\mathbb{P}^2_K$ haben einen nicht-leeren Schnitt.
b) Sei Q^2 eine glatte 2-dimensionale projektive Quadrik in $\mathbb{P}^3_K$. Zeige: Q^2 und $\mathbb{P}^2_K$ sind nicht isomorphe, aber birational isomorphe Varietäten.

Aufgabe 3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Zeige:
a) $\mathbb{A}^1_K$ und $\mathbb{P}^1_K$ sind als topologische Räume mit der Zariski-Topologie homöomorph.
b) $\mathbb{A}^2_K$ und $\mathbb{P}^2_K$ sind als topologische Räume mit der Zariski-Topologie nicht homöomorph.
Hinweis: Benutze Aufgabe 2a).

Aufgabe 4. Sei Y eine r-dimensionale projektive Varietät in $\mathbb{P}^n$, die durch ein homogenes Ideal I in $K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ definiert ist. Das arithmetische Geschlecht von Y ist definitionsgemäß die Zahl $(-1)^r(H_I(0) - 1)$, wobei H_I das Hilbert-Polynom von $I = I(Y)$ bezeichnet.
(a) Sei Y eine Kurve in $\mathbb{P}^2$ vom Grad d, d.h. $n = 2$, $r = 1$ und Y ist durch ein homogenes Polynom vom Grad d gegeben.
Zeige: das arithmetische Geschlecht von Y ist $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.
(b) Untersuche den Fall, wenn Y eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^n$ vom Grad d ist.