Mathematisches Institut — Prof. Dr. Nikita Geldhauser
Universität München — 29.11.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 6

Aufgabe 1. Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $I = \sqrt{I}$ ein Radikalideal in $K[x_1, \dots, x_n]$. Angenommen, dass $(0, \dots, 0) \in V(I)$. Jedes Polynom $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ vom Grad r kann man eindeutig als Summe $f = f_0 + f_1 + \ldots + f_r$ darstellen, wobei f_i homogene Polynome vom Grad i sind. Wir definieren $\mathrm{in}(f) := f_i$, wobei $i \geq 0$ die kleinste Zahl mit $f_i \neq 0$ ist. Seien nun $\mathrm{in}(I) := \langle \mathrm{in}(f), f \in I \rangle$, $R = K[x_1, \dots, x_n]/I$ und $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ von R.
Zeige: Die Abbildung $K[x_1, \dots, x_n]/\mathrm{in}(I) \to G_{\mathfrak{m}}(R) := \oplus_{j \geq 0} \mathfrak{m}^j/\mathfrak{m}^{j+1}$, $x_i \mapsto x_i$, ist ein Ringisomorphismus.

Aufgabe 2. Zeichne die Kurve $y^2 = x^2(x+1)$ und den Tangenzialkegel dieser Kurve im Punkt $(0, 0)$.

Aufgabe 3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper mit $\operatorname{char} K \neq 2, 3$. Betrachte das irreduzible Polynom $f := x^3 + y^3 - 1 \in K[x, y]$ und sei $X = V(f) \subset \mathbb{A}^2$. Das Ziel dieser Aufgabe ist zu zeigen, dass X eine nicht rationale Varietät ist.
(a) Seien $p, q, r \in K[t]$ mit $p^3 + q^3 = r^3$.
Zeige: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben p, q, r keine gemeinsamen Faktoren, d.h. $\gcd(p, q) = \gcd(p, r) = \gcd(q, r) = 1$, und $\deg p \geq \max\{\deg q, \deg r\}$.
(b) Betrachte die Ableitung der Gleichung $p^3 + q^3 = r^3$ nach t und zeige: p^2 teilt $qr' - rq'$.
(c) Folgere aus (b), dass X nicht rational ist.