Mathematisches Institut
Universität München

Prof. Dr. Nikita Geldhauser
08.11.2023 WiSe 2023/24

Algebraische Geometrie 1
Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Seien X ein irreduzibler endlich dimensionaler topologischer Raum und $Y \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge mit $\dim Y = \dim X$.
Zeige: $X = Y$.

Aufgabe 2. Seien K ein algebraisch abgeschlossener Körper und Y eine Kurve in $\mathbb{A}^3_K$ definiert durch Parametrisierung als $\{(x, y, z) \in \mathbb{A}^3_K \mid x = t^3, y = t^4, z = t^5, t \in K\}$.
(a) Zeige: $I(Y) = \langle xz - y^2, x^3 - yz, z^2 - x^2y\rangle$.
(b) Zeige: $I(Y)$ ist ein Primideal.
(c) Zeige: $I(Y)$ kann nicht von zwei Elementen erzeugt werden.

Aufgabe 3. (a) Seien K ein Körper und I ein Ideal in $K[x_1, \ldots, x_n]$ mit einer Gröbnerbasis G bzgl. der Monomordnung *lex* mit $x_1 > \ldots > x_n$.
Zeige: Für alle $0 \leq l \leq n$ ist $G_l := G \cap K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ eine Gröbnerbasis des Ideals $I \cap K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$ von $K[x_{l+1}, \ldots, x_n]$.
(b) Seien $I = \langle f_1, \ldots, f_s\rangle$ ein Ideal von $K[x_1, \ldots, x_n]$ und $f(t) \in K[t]$. Definiere als

$$f(t) \cdot I := \langle f(t) \cdot f_1, \ldots, f(t) \cdot f_s\rangle$$

ein Ideal von $K[x_1, \ldots, x_n, t]$. Seien I, J Ideale von $K[x_1, \ldots, x_n]$. Zeige:

$$I \cap J = (t \cdot I + (1 - t) \cdot J) \cap K[x_1, \ldots, x_n].$$