

Analysis II (Angewandte Analysis) für
Informatiker

XXL

7. Januar 2004

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Algebraische Grundlagen | 4 |
| 1.1 | Mengen und Abbildungen | 4 |
| 1.2 | Gruppen | 4 |
| 1.3 | Körper | 5 |
| 1.4 | Vektorräume | 5 |
| 2 | Komplexe Zahlen | 6 |
| 2.1 | Definition der komplexen Zahlen | 6 |
| 2.2 | Eigenschaften komplexer Zahlen | 8 |
| 2.3 | Die komplexe Exponentialfunktion | 9 |
| 2.4 | Lineare Schwingungen | 11 |
| 2.4.1 | Mechanische und elektrische Schwingungen | 11 |
| 2.4.2 | Der harmonische Oszillator | 13 |
| 2.4.3 | Erzwungene Schwingungen | 16 |
| 3 | Topologie metrischer Räume | 20 |
| 3.1 | Metrische Räume (insbesondere R^n) | 20 |
| 3.1.1 | Allgemeine metrische Räume | 20 |
| 3.1.2 | Normierte Vektorräume | 21 |
| 3.2 | Offene und abgeschlossene Mengen | 22 |
| 4 | Grenzwerte, Stetigkeit | 24 |
| 4.1 | Grenzwerte | 24 |
| 4.2 | Funktionen von endlich vielen reellen Variablen | 26 |
| 4.3 | Stetigkeit | 28 |
| 4.3.1 | Lineare Abbildungen | 29 |
| 4.4 | Kompaktheit | 31 |
| 5 | Differentialrechnung von Fkt. mehrerer Variabler | 32 |
| 5.1 | Partielle Ableitungen, Gradient | 32 |
| 5.2 | Totale Differenzierbarkeit | 35 |
| 5.3 | Vektorfelder, Divergenz, Rotation, LAPLACE-Operator | 42 |
| 5.4 | Lokale Extrema | 44 |
| 5.4.1 | Positiv definite Matrizen | 45 |
| 5.4.2 | Notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema | 45 |
| 5.5 | Implizite Funktionen | 47 |
| 5.5.1 | Implizite Funktionen in der Computertomographie (CT) | 47 |
| 5.5.2 | Implizite Funktionen | 48 |
| 5.5.3 | Höhenlinien | 50 |
| 5.5.4 | Umkehrabbildungen | 51 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 5.5.5 | Lokale Extrema mit Nebenbedingungen LAGRANGE-Multiplikatoren | 52 |
| 6 | Partielle Differentialgleichungen | 56 |
| 6.1 | Differentialoperatoren der mathematischen Physik | 56 |
| 6.1.1 | Typeinteilung linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung | 56 |
| 6.1.2 | LAPLACE-Gleichung, POISSON-Gleichung | 57 |
| 6.1.3 | Diffusionsgleichung | 59 |
| 6.1.4 | Wellengleichung | 60 |
| 6.1.5 | Telegraphengleichung | 61 |
| 6.1.6 | MAXWELL-Gleichungen der Elektrodynamik | 62 |
| 6.1.7 | NAVIER-STOKES-Gleichungen der Strömungsmechanik | 65 |
| 7 | Integrale von Funktionen mehrerer Variabler | 66 |
| 7.1 | Kurven im \mathbf{R}^n | 67 |
| 7.2 | Kurvenintegrale | 70 |
| 7.3 | Flächen im \mathbf{R}^3 | 73 |
| 7.4 | Integrale von Vektorfeldern über Flächen im \mathbf{R}^3 | 74 |
| 7.5 | Volumenintegrale im \mathbf{R}^n | 75 |
| 7.5.1 | Integrale über Quader | 75 |
| 7.5.2 | Transformationsatz für Volumenintegrale | 75 |
| 7.6 | Integralsätze | 77 |
| 7.6.1 | Der Satz von GAUSS im \mathbf{R}^n | 77 |
| 7.6.2 | Der Satz von STOKES für Flächen im \mathbf{R}^3 | 78 |
| 7.6.3 | GREENSche Formeln | 78 |
| 8 | Variationsrechnung | 79 |
| 8.1 | Eindimensionale Probleme | 79 |
| 8.1.1 | Integrale mit Parametern | 79 |
| 8.1.2 | HAMILTONSches Prinzip | 83 |
| 8.1.3 | EULERSche Differentialgleichungen | 84 |
| 8.1.4 | Bewegung eines Massepunktes im Potentialfeld | 86 |
| 8.2 | Mehrdimensionale Probleme | 87 |
| 8.2.1 | Das lineare Elastizitätsproblem | 89 |
| 8.2.2 | Computersimulation: Die Methode der Finiten Elemente | 89 |
| 9 | Diskrete Stochastik | 90 |
| 9.1 | Modelle für zufällige Ereignisse | 90 |
| 9.1.1 | Mengenoperationen | 90 |
| 9.1.2 | Ergebnisräume, Ereignisse | 91 |
| 9.2 | Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit | 92 |
| 9.2.1 | Häufigkeitsfunktion h_n | 92 |
| 9.2.2 | Wahrscheinlichkeitsfunktion p | 92 |
| 9.2.3 | Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit | 96 |
| 9.3 | Produktexperimente | 99 |
| 10 | Beispiele | 100 |
| 10.1 | MAPLE | 100 |
| 10.2 | Stetigkeit | 101 |
| 10.3 | Gradient, Mittelwertsatz, TAYLOR-Formel | 102 |
| 10.3.1 | Fehlerrechnung | 102 |
| 10.3.2 | Ausgleichsrechnung | 103 |

| | |
|--|------------|
| 10.4 2-dimensionale Variationsaufgaben: | |
| Methode der Finiten Elemente | 105 |
| 10.4.1 Lineare Dreieckselemente | 106 |
| 10.4.2 Lineare Viereckselemente | 107 |
| 10.4.3 Allgemeiner algorithmischer Ansatz für die Methode der Finiten Elemente in zwei Raumdimensionen | 108 |
| 11 Literatur | 113 |
| 12 ÜBUNG 1 | 114 |
| 13 ÜBUNG 2 | 116 |
| 14 ÜBUNG 3 | 118 |
| 15 ÜBUNG 4 | 120 |
| 16 ÜBUNG 5 | 122 |
| 17 ÜBUNG 6 | 125 |
| 18 ÜBUNG 7 | 128 |
| 19 ÜBUNG 8 | 131 |
| 20 ÜBUNG 9 | 134 |

Kapitel 1

Algebraische Grundlagen

1.1 Mengen und Abbildungen

Sei I eine (endliche oder unendliche) Menge von Indices.

$G := \{g_k \mid k \in I\}$ sei eine Menge von Objekten.

Man definiert das kartesische Mengenprodukt

$$G \times G := \{(a, b) \mid a \in G, b \in G\}$$

Unter einer **Verknüpfung** \heartsuit auf der Menge G versteht man eine Vorschrift, die je zwei Elementen $a := g_i \in G$, $b := g_k \in G$ wieder ein Element $\heartsuit(a, b) := a \heartsuit b \in G$ zuordnet. Man schreibt diese Verknüpfung auch als **Abbildung**

$$\heartsuit : G \times G \rightarrow G, (a, b) \rightarrow a \heartsuit b$$

Beispiele : $\heartsuit := +$ und

$$G := \mathbf{N}, G := \mathbf{Q}, G := \mathbf{R},$$

1.2 Gruppen

Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung \heartsuit heißt **Gruppe** wenn folgende Axiome erfüllt sind :

- G1** $(a \heartsuit b) \heartsuit c = a \heartsuit (b \heartsuit c), \forall a, b, c \in G$ *Assoziativgesetz*
G2 $\exists e \in G$ (*neutrales Element*) mit folgenden Eigenschaften
a) $e \heartsuit a = a, \forall a \in G$
b) $\forall a \in G \exists \hat{a} \in G$ (*inverses Element*) mit
 $\hat{a} \heartsuit a = e$

(1.1)

Die Gruppe heißt *abelsch*(oder *kommutativ*), falls

$$a \heartsuit b = b \heartsuit a, \forall a, b \in G$$

1.3 Körper

Eine Menge K zusammen mit den zwei Verknüpfungen

$$+ : K \times K \rightarrow K, (a, b) \rightarrow a + b$$

$$* : K \times K \rightarrow K, (a, b) \rightarrow a * b$$

heißt **Körper**, wenn gilt:

| | |
|--|-------|
| <p>K1 $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe (neutrales Element : 0 , inverses Element zu a : $-a$)</p> <p>K2 Für $K_0 := K \setminus \{0\}$ gilt : $a, b \in K_0 \Rightarrow a * b \in K_0$ $(K_0, *)$ ist eine abelsche Gruppe (neutrales Element 1 , inverses Element zu a : a^{-1})</p> <p>K3 Es gelten die <i>Distributivgesetze</i> , d.h. $\forall a, b, c \in K$ gilt $a * (b + c) = a * b + a * c$ $(a + b) * c = a * c + b * c$</p> | (1.2) |
|--|-------|

1.4 Vektorräume

Sei K ein Körper . Eine Menge V zusammen mit einer *inneren* Verknüpfung

$$+ : V \times V \rightarrow V, (v, w) \rightarrow v + w$$

Addition genannt und einer *äußeren* Verknüpfung

$$* : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \rightarrow \lambda * v$$

skalare Multiplikation genannt , heißt **K-Vektorraum** , falls gilt

| | |
|--|-------|
| <p>V1 V zusammen mit der Addition ist eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element heißt <i>Nullvektor</i> , das negative Element wird mit $-v$ bezeichnet.</p> <p>V2 Die skalare Multiplikation genügt den Verträglichkeitsbedingungen</p> <p>$\forall \lambda, \mu \in K, \forall v, w \in V :$ $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v, \lambda * (v + w) = \lambda * v + \lambda * w$ $\lambda * (\mu * v) = (\lambda * \mu) * v, 1 * v = v$</p> | (1.3) |
|--|-------|

Kapitel 2

Komplexe Zahlen

2.1 Definition der komplexen Zahlen

Die Menge $R \times R$ aller geordneten Paare reeller Zahlen bildet zusammen mit der Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ (x_1, y_1) * (x_2, y_2) &:= (x_1 * x_2 - y_1 * y_2, x_1 * y_2 + y_1 * x_2) \end{aligned} \quad (2.1)$$

einen Körper.

Beweis: Übung .

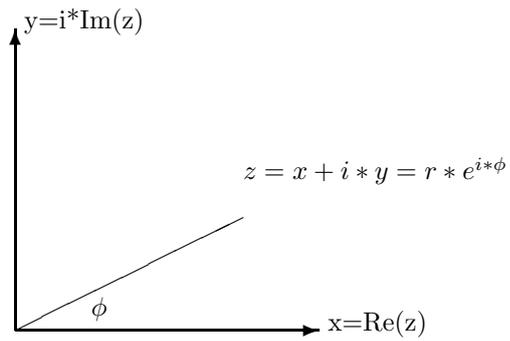
Diesen Körper nennt man den Körper \mathbf{C} der komplexen Zahlen. Das Nullelement ist $(0,0)$, das Einselement ist $(1,0)$.

Da $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ und $(x_1, 0) * (x_2, 0) = (x_1 * x_2, 0)$ gilt, kann man jede reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$ identifizieren. \mathbf{R} wird so eine Teilmenge von \mathbf{C} . Setzt man noch

$$\begin{aligned} i &:= (0, 1) , \\ i^2 &= (0, 1) * (0, 1) = (0 * 0 - 1 * 1, 0 * 1 - 1 * 0) = (-1, 0) = -1 \\ \sqrt{-1} &= i \end{aligned} \quad (2.2)$$

so erhält man die gebräuchliche Schreibweise für komplexe Zahlen

$$\begin{aligned} z &:= (x, y) = (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (0, 1) * (y, 0) \\ &= x + i * y, \quad \forall x, y \in \mathbf{R} \\ \operatorname{Re}(z) &:= x \text{ (Realteil)}, \quad \operatorname{Im}(z) := y \text{ (Imaginärteil)} \end{aligned} \tag{2.3}$$



2.2 Eigenschaften komplexer Zahlen

Unmittelbar klar ist

$$z_1 = z_2 \iff (Re(z_1) = Re(z_2), Im(z_1) = Im(z_2)) \quad (2.4)$$

Definition:

$$\bar{z} := Re(z) - i * Im(z) \quad (2.5)$$

ist die zu $z = Re(z) + i * Im(z)$ **konjugiert komplexe** Zahl.
Damit gilt

$$z \text{ reell} \iff z = \bar{z} \quad (2.6)$$

Definition:

$$|z| := \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{Re(z)^2 + Im(z)^2} \quad (2.7)$$

ist der **Betrag** der komplexen Zahl z
Polardarstellung komplexer Zahlen:

| | |
|---|-------|
| $ \begin{aligned} z &= x + i * y \\ x &:= Re(z), y := Im(z) \\ r &:= z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos(\phi) &:= x/r, \sin(\phi) = y/r \\ z &= r * (\cos(\phi) + i * \sin(\phi)) \end{aligned} $ | (2.8) |
|---|-------|

2.3 Die komplexe Exponentialfunktion

Für jede komplexe Zahl $z \in \mathbf{C}$ wird definiert :

$$\begin{aligned}
 z &= x + i * y \\
 r &:= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\
 x &:= \operatorname{Re}(z), \quad y := \operatorname{Im}(z) \\
 \cos(\phi) &:= x/r, \quad \sin(\phi) = y/r \\
 e^z &:= e^{x + i * y} := e^x * e^{i * y} := e^x * (\cos(\phi) + i * \sin(\phi))
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Damit kann man komplexe Zahlen einfach multiplizieren und dividieren:

$$\begin{aligned}
 z_1 &:= r_1 * e^{i * \phi_1}, \quad z_2 := r_2 * e^{i * \phi_2} \\
 z_1 * z_2 &= r_1 * r_2 * e^{i * (\phi_1 + \phi_2)} \\
 \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} * e^{i * (\phi_1 - \phi_2)}, \quad z_2 \neq 0
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Mit der EULERSchen Formel

$$e^{i * \phi} = \cos(\phi) + i * \sin(\phi)$$

erhält man

$$\begin{aligned}
 \cos(x + y) + i * \sin(x + y) &= \\
 e^{i(x + y)} &= e^{i * x} * e^{i * y} = \\
 &= (\cos(x) + i * \sin(x)) * (\cos(y) + i * \sin(y)) \\
 &= \cos(x) * \cos(y) - \sin(x) * \sin(y) + i * (\sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y))
 \end{aligned}$$

damit also durch Vergleich von Real- und Imaginärteil:

$$\begin{aligned}
 \cos(x + y) &= \cos(x) * \cos(y) - \sin(x) * \sin(y) \\
 \sin(x + y) &= \sin(x) * \cos(y) + \cos(x) * \sin(y)
 \end{aligned}$$

Auf analoge Weise kann man die bekannten trigonometrischen Umrechnungsformeln einfach herleiten.

Es gilt wie im Reellen:

$$\forall z \in \mathbf{C}, t \in \mathbf{R}$$

$$(1) \quad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$(2) \quad D e^{z * t} := d(e^{z * t})/dt = z * e^{z * t}$$

$$(3) \quad D^m e^{z * t} := d^m(e^{z * t})/dt^m = z^m * e^{z * t}, \forall m \in \mathbf{N}$$

Definiert man für beliebige komplexe Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{C}$ das Polynom

$$(4) \quad P_n(D) := a_0 + a_1 * D^1 + \dots + a_n * D^n$$

dann gilt

$$(5) \quad P_n(D) e^{z * t} = P(z) e^{z * t}$$

(2.11)

Beweis für (2):

$$z := x + i * y,$$

$$\begin{aligned} e^{z * t} &= e^{(x + i * y) * t} = e^{x * t} * e^{i * y * t} = e^{x * t} * (\cos(y * t) + i * \sin(y * t)) \\ &= e^{x * t} * \cos(y * t) + i * e^{x * t} * \sin(y * t) \end{aligned}$$

Anwendung der Produktregel $(f * g)' = f' * g + f * g'$ liefert

$$\begin{aligned} D e^{z * t} &= x * e^{x * t} * \cos(y * t) - y * e^{x * t} * \sin(y * t) \\ &\quad + i * x * e^{x * t} * \sin(y * t) + i * y * e^{x * t} * \cos(y * t) = \\ &= (x + i * y) * e^{x * t} * (\cos(y * t) + i * \sin(y * t)) \\ &= z * e^{z * t} \end{aligned}$$

2.4 Lineare Schwingungen

2.4.1 Mechanische und elektrische Schwingungen

Wir betrachten einen Massepunkt M mit Masse m , der nur längs der x-Achse beweglich sei. Im Zeitpunkt t befinde er sich am Ort $x(t)$. Im Zeitpunkt t wirke auf M die **Federkraft**

$$(1) \quad K_1(t) = -k * x(t) \quad (k=\text{Federkonstante}).$$

Die an M wirkende **Reibungskraft** hat meist die Form

$$(2) \quad K_2(t) = -r * x'(t) \quad (r=\text{Reibungskonstante}).$$

Schließlich kann noch eine **äußere erregende Kraft** einwirken, die wir als zeitlich periodisch annehmen:

$$(3) \quad K_3(t) = K_0 * \cos(\omega_E * t) \quad (K_0=\text{Amplitude}, \omega_E=\text{Erregungsfrequenz})$$

Nach dem **NEWTONschen Bewegungsgesetz** ("actio=reactio") gilt

$$(4) \quad \begin{aligned} m * x''(t) &= K_1(t) + K_2(t) + K_3(t) = \\ &= -k * x(t) - r * x'(t) + K_0 * \cos(\omega_E * t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung (da höchste Ableitung x'') mit konstanten Koeffizienten. Modelle dieser Art kann man auch für strömungsmechanische Probleme angeben!

Interessant ist nun noch die analoge Situation aus der Elektrizitätslehre :

Ein Kondensator der Kapazität C sei über den OHMschen Widerstand R und die Induktivität L zu einem "Schwingkreis" geschlossen. Dieser Schwingkreis sei mit einem Erregerkreis gekoppelt, der eine zeitlich periodische Spannung $U(t) = U_0 * \cos(\omega * t)$ überträgt. Heute haben wir im PC schon $\omega = 2-3$ Giga-Hz zur Verfügung!

Für die im Zeitpunkt t am Kondensator herrschende Spannung $U(t)$ gilt dann die Gleichung

$$(5) \quad L * U'' + R * U' + \frac{1}{C}U = \frac{U_0}{C} \cos(\omega * t) \quad (2.13)$$

Gleichungen dieser Art (mit nichtlinearen Komponenten) sind Grundlage der Simulation des Verhaltens von Transistor-Schaltkreisen! Dabei sind pro Transistor 3 Gleichungen zweiter Ordnung anzusetzen. In realen Simulationen sind also Systeme mit $\sim 10^5$ Differentialgleichungen zu lösen!!!

(Zur weiteren Information gebe man in die GOOGLE-Suchmaschine das Stichwort SHICHMAN HODGES ein).

Die Differentialgleichungen (4) und (5) werden später mithilfe der komplexen Exponentialfunktion gelöst.

Zwischen dem mechanischen Fall (Differentialgleichung (4)) und dem elektrischen Fall (Differentialgleichung (5)) bestehen folgende Analogien:

| MECHANISCH | ELEKTRISCH |
|------------------------------|---------------------------|
| Ort $x(t)$ des Massenpunktes | Spannung $U(t)$ |
| Masse m | Induktivität L |
| Dämpfungskonstante r | Widerstand R |
| Federkonstante k | Inverse Kapazität $1/C$ |
| Erreger-Amplitude K_0 | Erreger-Amplitude U_0/C |

(2.14)

Mithilfe der komplexen Exponentialfunktion kann man nun alle Lösungen obiger Gleichungen für mechanische und auch elektrische lineare Schwingungen berechnen

:

2.4.2 Der harmonische Oszillator

Wir untersuchen die **homogene** lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(1) \quad f''(t) + 2 * d * f'(t) + k * f(t) = 0$$

(freier Harmonischer Oszillator), mit den Konstanten

$$(2) \quad 2 * d \geq 0 \quad \text{Dämpfungskonstante}$$

$$(3) \quad k > 0 \quad \text{Elastizitätskonstante}$$

Mit dem Differentialoperator

$$(4) \quad Df(t) := f'(t), \quad D^k f(t) := f^{(k)}(t), \quad k \in \mathbf{N}$$

kann man (1) formal schreiben als

$$(5) \quad P(D)f(t) = (D^2 + 2 * d * D + k * D^0)f(t) = 0$$

Setzt man speziell

$$(6) \quad f(t) := e^{z * t}, \quad z \in \mathbf{C}$$

so erhält man aus 2.11(5)

$$(7) \quad P(D)e^{z * t} = P(z) * e^{z * t} = (z^2 + 2 * d * z + k) * e^{z * t}$$

(2.15)

Satz:

$$P(z) = 0 \implies \text{(wegen 2.15(7))}$$

$$f(t) := e^{z * t} \text{ ist Lösung der Differentialgleichung 2.15(1)}$$

Also erhält man mit:

$$z_1 = -d + \sqrt{d^2 - k}, \quad z_2 = -d - \sqrt{d^2 - k}$$

$$f_1(t) := e^{z_1 * t}, \quad f_2(t) := e^{z_2 * t}$$

zwei Lösungen der Differentialgleichung 2.15(1)

$$P(D)f_1(t) = P(D)f_2(t) = 0$$

(2.16)

Die Lösungsmenge von 2.15(1)(5) ist ein Vektorraum der Dimension 2 :

$$P(D)f_1(t) = 0, \quad P(D)f_2(t) = 0 \implies$$

$$P(D)(\alpha_1 * f_1 + \alpha_2 * f_2) = \alpha_1 * P(D)(f_1) + \alpha_2 * P(D)(f_2) = 0, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$$

(2.17)

Hat man zwei linear unabhängige Lösungen $f_1(t), f_2(t)$ von 2.15(1) ermittelt, so hat jede Lösung von 2.15(1) die Form

$$f(t) = \alpha_1 * f_1(t) + \alpha_2 * f_2(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C} \quad (2.18)$$

Nun trifft man die **Fallunterscheidungen** :

$$\Omega := d^2 - k, \quad \Omega < 0, \quad \Omega = 0, \quad \Omega > 0 \quad (2.19)$$

Starke Dämpfung

(1) $\Omega > 0 \implies d^2 > k \implies$.

z_1, z_2 reell
 $z_1 \neq z_2$
 $z_1 < 0, z_2 < 0$ (*)
 $f_j(t) := \exp(z_j * t)$, $j=1,2$
sind zwei linear unabhängige Lösungen
Wegen (*) gilt:
 $\lim_{t \rightarrow \infty} f_j(t) = 0$, $j = 1, 2$
Jede Lösung hat höchstens ein Extremum
und maximal eine Nullstelle

(2.20)

Schwache Dämpfung (Schwingungsfall)

(2) $\Omega < 0 \implies d^2 < k \implies$.

z_1, z_2 konjugiert komplex und
 $z_1 \neq z_2$
 $f_1(t) := \exp(z_1 * t)$, $f_2(t) := \exp(z_2 * t)$
sind zwei linear unabhängige Lösungen

(2.21)

Kritische Dämpfung

(3) $\Omega = 0 \implies d^2 = k \implies$.

z_1, z_2 reell und
 $z_1 = z_2 = -d \leq 0$
 $f_1(t) := e^{-d * t}$, $f_2(t) := t * e^{-d * t}$
sind zwei linear unabhängige Lösungen
 $d > 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} f_j(t) = 0$, $j = 1, 2$
Jede Lösung hat höchstens ein Extremum
und maximal eine Nullstelle

(2.22)

Der Fall 2.21 (Schwingungsfall) ist am interessantesten: definieren wir

$$\begin{aligned} \omega_0 &:= \sqrt{|\Omega|} = \sqrt{|d^2 - k|} > 0 \quad \text{Eigenfrequenz} \\ \text{also} \\ z_1 &= -d + i * \omega_0, \quad z_2 = -d - i * \omega_0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

so kann man mit der EULER-Formel

$$e^{i * \phi} = \cos(\phi) + i * \sin(\phi) \quad (2.24)$$

die Lösungen von 2.21 folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= e^{(-d + i * \omega_0) * t} = e^{-d * t} * e^{i * \omega_0 * t} = \\ &= e^{-d * t} * (\cos(\omega_0 * t) + i * \sin(\omega_0 * t)) \\ f_2(t) &= e^{-(d - i * \omega_0) * t} = e^{-d * t} * e^{-i * \omega_0 * t} = \\ &= e^{-d * t} * (\cos(\omega_0 * t) - i * \sin(\omega_0 * t)) \end{aligned}$$

Um **reelle** Lösungen $f_j^R(t)$, $j=1,2$ zu erhalten, müssen in der allgemeinen Lösung

$$f(t) = \alpha_1 * f_1(t) + \alpha_2 * f_2(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{C} \quad (2.25)$$

die Konstanten α_1, α_2 geeignet gewählt werden, z.B.:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= 1/2, \quad \alpha_2 := 1/2 \implies \\ f_1^R(t) &= e^{-d * t} * \cos(\omega_0 * t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= -i/2, \quad \alpha_2 := i/2 \implies \\ f_2^R(t) &= e^{-d * t} * \sin(\omega_0 * t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.4.3 Erzwungene Schwingungen

Wir untersuchen die **inhomogene** lineare Differentialgleichung

$$P(D)f(t) := f''(t) + 2 * d * f'(t) + k * f(t) = a_E * \cos(\omega_E * t) =: F(t)$$

(Harmonischer Oszillator mit periodischer äußerer Anregung F(t))

(2.28)

mit den Konstanten

$$\begin{array}{ll} d \geq 0 & \text{Dämpfungskonstante} \\ k > 0 & \text{Elastizitätskonstante} \\ a_E > 0 & \text{Amplitude der externen Erregung} \\ \omega_E > 0 & \text{Frequenz der externen Erregung} \end{array}$$

(2.29)

Satz:

Sei

(1) $P(D)f_k^R(t) = 0$, für $k=1,2$

mit reellen , linear unabhängigen Funktionen $f_1^R(t), f_2^R(t)$ und

(2) $P(D)f^*(t) = F(t)$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung 2.28.

Dann hat die allgemeine reelle Lösung von 2.28 die Form

(3) $f(t) = \alpha_1 * f_1^R(t) + \alpha_2 * f_2^R(t) + f^*(t)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$

Eindeutige Lösungen $x(t)$ von

(4) $P(D)f(t) = F(t)$ erhält man durch zusätzliche Bedingungen , wie z.B.

(5a) $f(t_0) := c_0$, $f'(t_0) := c_1$ (**Anfangsbedingungen**) oder

(5b) $f(t_0) := c_0$, $f(t_1) := c_1$ (**Randbedingungen** ($t_0 < t_1$))

erhält man durch Einsetzen von (5a) bzw. (5b) in (3)

und Auflösung des linearen Gleichungssystems nach α_1 und α_2

(2.30)

Wir müssen also *eine* spezielle Lösung $f^*(t)$ von 2.28 ermitteln.

Im Falle $F(t) = \text{const} = \gamma$

sieht man sofort, daß $f^*(t) = \gamma/k$ eine Lösung von 2.28 ist.

Im Falle $F(t) = a_E * \cos(\omega_E * t) = \text{Re}(a_E * e^{i * \omega_E * t})$

trifft man die **Fallunterscheidung**

$$P(i * \omega_E) \neq 0, P(i * \omega_E) = 0 :$$

Es gilt der

Satz:

Sei

$$(1) \quad P(i * \omega_E) = (i * \omega_E)^2 + 2 * d * i * \omega_E + k =: r * e^{i * \phi} \neq 0, \text{ mit}$$

$$(2) \quad P_R := \text{Re}(P(i * \omega_E)), \quad P_I := \text{Im}(P(i * \omega_E))$$

$$r := \sqrt{P_R^2 + P_I^2}, \quad \frac{P_R}{r} = \cos(\phi)$$

Wir definieren:

$$(3) \quad f^*(t) := a_E * \frac{e^{i * \omega_E * t}}{P(i * \omega_E)} \stackrel{(2)}{=} a_E * \frac{e^{i * \omega_E * t}}{r * e^{i * \phi}} = \frac{a_E}{r} * e^{i * (\omega_E * t - \phi)}$$

Dann gilt:

$$(4) \quad P(D)f^*(t) = \frac{a_E}{P(i * \omega_E)} * P(D)e^{i * \omega_E * t} = (\text{vgl. 2.11(5)})$$

$$= \frac{a_E}{P(i * \omega_E)} * P(i * \omega_E) * e^{i * \omega_E * t} \stackrel{(1)}{=}$$

$$= a_E * e^{i * \omega_E * t} .$$

Da das Polynom P nur reelle Koeffizienten hat, gilt

$$(5) \quad \text{Re}(P(D)f^*(t)) = P(D)\text{Re}(f^*(t)) \stackrel{(4)}{=} \\ = \text{Re}(a_E * e^{i * \omega_E * t}) = a_E * \cos(\omega_E * t)$$

Damit ist

$$(6) \quad \text{Re}(f^*(t)) \stackrel{(3)}{=} \frac{a_E}{r} * \cos(\omega_E * t - \phi)$$

unter der Voraussetzung (1) : $P(i * \omega_E) \neq 0$
eine spezielle (reelle) Lösung von 2.28

(2.31)

Für den Fall $P(i * \omega_E) = 0$ gilt der

Satz:

Sei

$$(1a) \quad z_1 := i * \omega_E, \quad z_2 := -i * \omega_E \quad \text{und}$$

$$(1b) \quad P(z_1) = z_1^2 + 2 * d * z_1 + k = 0$$

Dann gilt :

$$(2a) \quad d = 0 \quad \text{und} \quad P(z_2) = 0$$

$$(2b) \quad \omega_E = \omega \quad \text{d.h. Erregerfrequenz } \omega_E = \text{Eigenfrequenz } \omega_0$$

Resonanz

$$(2c) \quad P(D)f(t) = f''(t) + k * f(t) = 0$$

hat die beiden linear unabhängigen Lösungen

$$f_1^R(t) = \cos(\omega_0 * t), \quad f_2^R(t) = \sin(\omega_0 * t)$$

Beweis:

$$(3a) \quad P(z) = 0 \implies$$

$$(3b) \quad z = z_{1,2} = -d \pm \sqrt{d^2 - k} \implies$$

$$(3c) \quad P(z) = (z - z_1) * (z - z_2) \stackrel{(1b)}{\implies}$$

$$(3d) \quad z_1 * z_2 = k \stackrel{(1a)}{\implies}$$

$$(3e) \quad (i * \omega_E) * (-i * \omega_E) = k$$

Da z_1 und z_2 rein imaginär sind, folgt (2a) aus (3b).

Aus (3e) erhält man :

$$(4) \quad \omega_E^2 = k \stackrel{(d=0)}{=} \omega_0^2, \quad \text{vgl. 2.23}$$

woraus sofort (2c) folgt.

(2.32)

Satz: 2.33 Lösung der inhomogenen Schwingungsgleichung: Resonanzfall**Voraussetzung:**

- (1) $P(i * \omega_E) = 0$, also
 (2) Dämpfung $d = 0$, $\omega_E = \omega_0 = \sqrt{k}$ und daher mit $D^0 f = f$
 (3) $P(D) = D^2 + k * D^0 = D^2 + \omega_0^2 * D^0 = (D + i * \omega_0) * (D - i * \omega_0)$

Argumentation:

Wir betrachten wiederum die komplexe Gleichung

$$(4) \quad P(D)f(t) = a_E * e^{i * \omega_E * t} = a_E * e^{i * \omega_0 * t}$$

Ansatz für die spezielle Lösung:

$$(5) \quad \hat{f}(t) = \gamma * t * e^{i * \omega_0 * t} , \quad \gamma \in \mathbf{C} \text{ noch unbestimmt}$$

Einsetzen von (5) in (4) liefert

$$(6) \quad P(D)\hat{f}(t) = 2 * i * \gamma * \omega_0 * e^{i * \omega_0 * t}$$

Vergleich von (4) und (6) liefert

$$(7) \quad a_E = 2 * i * \gamma * \omega_0 \implies \gamma = \frac{a_E}{2 * i * \omega_0} =: \gamma_0$$

Damit gilt:

$$(8) \quad f^*(t) = \gamma_0 * t * e^{i * \omega_0 * t}$$

ist eine spezielle Lösung der (komplexen) inhomogenen Schwingungsgleichung (4)

$$(9) \quad P(D)f^*(t) = a_E * e^{i * \omega_0 * t}$$

Da $P(D)$ nur reelle Koeffizienten besitzt, gilt wiederum

$$(10) \quad \operatorname{Re}(P(D)f^*(t)) = P(D)\operatorname{Re}(f^*(t)) \stackrel{(9)}{=} \operatorname{Re}(a_E * e^{i * \omega_0 * t}) = a_E * \cos(\omega_0 * t)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} (11) \quad \operatorname{Re}(f^*(t)) &= \operatorname{Re}(\gamma_0 * t * e^{i * \omega_0 * t}) \\ &= \operatorname{Re}(\gamma_0 * t * (\cos(\omega_0 * t) + i * \sin(\omega_0 * t))) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{a_E}{2 * i * \omega_0} * t * (\cos(\omega_0 * t) + i * \sin(\omega_0 * t))\right) \\ &= \frac{a_E}{2 * \omega_0} * t * \sin(\omega_0 * t) \end{aligned}$$

und wir erhalten das

Resultat:

$$(12) \quad f_R^*(t) := \operatorname{Re}(f^*(t)) = \frac{a_E}{2 * \omega_0} * t * \sin(\omega_0 * t)$$

ist reelle Lösung der inhomogenen Schwingungsgleichung

$$(13) \quad f''(t) + k * f(t) = a_E * \cos(\omega_0 * t)$$

Für $a \neq 0$ wächst also im Resonanzfall die allgemeine Lösung

$$(14) \quad f(t) = f_R^*(t) + \alpha_1 * f_R^1(t) + \alpha_2 * f_R^2(t) , \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$$

$$= \frac{a_E}{2 * \omega_0} * t * \sin(\omega_0 * t) + \alpha_1 * \sin(\omega_0 * t) + \alpha_2 * \cos(\omega_0 * t)$$

unbeschränkt. ("Resonanzkatastrophe")

(2.33)

Kapitel 3

Topologie metrischer Räume

3.1 Metrische Räume (insbesondere R^n)

Dieses Kapitel lehnt sich an FORSTER,O.:Analysis 2 an; dieses Buch wird als weiterführende Lektüre empfohlen.

3.1.1 Allgemeine metrische Räume

Definition:

Sei X eine Menge. Eine **Metrik** auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

mit folgenden Eigenschaften

(1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(2) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$ (Symmetrie)

(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$
(Dreiecksungleichung)

(3.1)

Ein **metrischer Raum** ist ein Paar (X, d) bestehend aus einer Menge X und einer Metrik d .

Folgerung:

(4) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$

Beweis: Anwendung der Dreiecksungleichung auf $x, y, z := x, y, x$ liefert

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2 * d(x, y), \forall x, y \in X$$

Beispiel 1:

Die Menge \mathbf{R} der reellen Zahlen und die Menge \mathbf{C} der komplexen Zahlen werden zu metrischen Räumen, wenn man als Abstand definiert

$$d(x, y) := |x - y|, \forall x, y, \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$$

3.1.2 Normierte Vektorräume

Die wichtigsten Beispiele metrischer Räume entstehen aus normierten Vektorräumen.

Definition:

Sei V ein reeller Vektorraum. Unter einer **Norm** auf V versteht man eine Abbildung $V \rightarrow \mathbf{R}_0^+ := \{r \in \mathbf{R} : r \geq 0\}$
 $x \rightarrow \|x\|$

mit folgenden Eigenschaften:

- (1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in \mathbf{R}, x \in V$
- (3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in V$

(3.2)

Folgerung:

- (4) $\|x - y\| \geq | \|x\| - \|y\| |, \forall x, y \in V$
- (5) $\|x\| \geq 0, \forall x \in V$

Ein **normierter Vektorraum** $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Vektorraum versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$. Hierfür gilt der

Satz:

Auf jedem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ wird durch
 $d(x, y) := \|x - y\|, \forall x, y \in V$
 eine Metrik d auf V definiert.

(3.3)

Beispiel 1 :

Auf \mathbf{R}^n erhält man über das Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k * y_k, \forall x, y \in \mathbf{R}^n$$

die sog. **euklidische Norm**

$$\|x\|_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Beispiel 2 :

Eine weitere, wichtige Norm auf \mathbf{R}^n ist

$$\|x\|_\infty := \max_{k=1, \dots, n} |x_k|$$

die sog. **Maximum-Norm**

Allgemein definiert man auf \mathbf{R}^n die **p-Normen** ($p \in \mathbf{R}, p \geq 1$)

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

Satz:

- (1) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$
 Allgemeiner gilt die *Äquivalenz aller Normen* auf \mathbf{R}^n , d.h.
 Für jedes Paar von Normen p_1, p_2 auf \mathbf{R}^n
 existieren Konstanten m, M mit $0 < m < M$ und
- (2) $m * p_2(x) \leq p_1(x) \leq M * p_2(x), \forall x \in \mathbf{R}^n$

(3.4)

Beweis später.

3.2 Offene und abgeschlossene Mengen

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann definiert man

$$B(x_0, r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\} \quad , \quad \forall x_0 \in X \quad , \quad \forall r > 0 \quad (3.5)$$

als **offene Kugel (Ball)** in X um x_0 mit Radius r .

Definition :

Eine Teilmenge $U \subset X$ heißt **Umgebung** von $x_0 \in X$, wenn
 $\exists \epsilon = \epsilon(x_0) > 0$ mit $B(x_0, \epsilon) \subset U$

(3.6)

Definition :

Eine Teilmenge $T_X \subset X$ heißt **offen**, wenn
 $\forall x_0 \in T_X \quad \exists r = r(x_0) > 0$ mit $B(x_0, r) \subset T_X$
 Eine Teilmenge $T_X \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn
 $X \setminus T_X := \{x \in X \mid x \notin T_X\}$ **offen ist** .

(3.7)

Definition :

Sei X ein metrischer Raum und T_X eine Teilmenge von X . Ein Punkt $x_R \in X$ heißt **Randpunkt** von T_X , wenn in *jeder* Kugel $B(x_R, r) \subset X$ sowohl ein Punkt $x_1 \in T_X$ als auch ein Punkt x_2 aus dem Komplement $X \setminus T_X$ liegt.

Die Menge aller Randpunkte von T_X wird mit ∂T_X bezeichnet.

Es gilt:

- (1) $T_X \setminus \partial T_X$ ist offen
- (2) $T_X \cup \partial T_X$ ist abgeschlossen
- (3) ∂T_X ist abgeschlossen

Beweis : Übung.

Definition (4) : $T_X^0 := X \setminus \partial T_X$ **offener Kern** von X

Definition (5) : $T_X \cup \partial T_X$ **abgeschlossene Hülle** von X

Das folgende Lemma gilt sinngemäß in allgemeinen metrischen Räumen. Der Anschaulichkeit halber wird es im \mathbf{R}^k formuliert:

| | |
|---|-------|
| <p>Lemma</p> <p>(1a) $\emptyset \neq I$ Indexmenge</p> <p>(1b) $\mathbf{R}^k \supset X_i$ offen, $\forall i \in I \implies$</p> <p>(2) $\bigcup_{i \in I} X_i$ ist offen</p> | (3.8) |
| <p>(3) Für alle $x \in \mathbf{R}^k$ und $r > 0$ ist die r-Kugel $B(x, r)$ offen.</p> | |

Beweis:

zu (2) Sei $x \in \bigcup_{i \in I} X_i \implies$

$\exists i_0 \in I$ mit $x \in X_{i_0} \xrightarrow{X_{i_0} \text{ offen}}$

$\exists \epsilon > 0 : B(x, \epsilon) \subset X_{i_0}$

also a fortiori

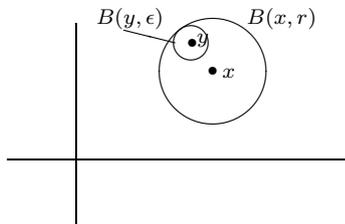
$B(x, \epsilon) \subset \bigcup_{i \in I} X_i \implies (2) : \bigcup_{i \in I} X_i$ offen.

zu (3) Sei $y \in B(x, r)$

zu zeigen : $\exists \epsilon > 0 : y \in B(y, \epsilon) \subset B(x, r)$

wähle $\epsilon := r - \underbrace{\|x - y\|}_< r >$

Skizze:



zeige: $B(y, \epsilon) \subset B(x, r)$

Sei also $z \in B(y, \epsilon)$, dann ist

$$\|z - x\| = \|z - y + y - x\| \leq \|z - y\| + \|y - x\|$$

$$< \epsilon + \|y - x\| = r - \|x - y\| + \|y - x\| = r,$$

also $z \in B(x, r)$.

| | |
|---|-------|
| <p>Beispiele:</p> <p>In \mathbf{R} (also $k = 1$) sind z.B. die Mengen</p> <p>$(0, 1)$, $(-2, 1) \cup (4, 5)$, $(1, \infty)$, $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, ... offen.</p> <p>Nicht offen sind z.B. die Mengen $\{0\}$, $[0, 1)$, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{Q}, ...</p> | (3.9) |
|---|-------|

Kapitel 4

Grenzwerte, Stetigkeit

In diesem Kapitel werden die aus dem \mathbf{R}^1 bekannten Grenzwert- und Stetigkeitsbegriffe auf metrische Räume (X, d) verallgemeinert. Im Falle normierter Räume ($d(x, y) = \|x - y\|$) ist dabei (bis auf marginale Ausnahmen) formal lediglich der Absolutbetrag durch eine Norm zu ersetzen.

4.1 Grenzwerte

Definition:

Sei X ein metrischer Raum und

$$(x^k)_{k \in \mathbf{N}} \subset X := (x^1, x^2, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots) =: (x^k)$$

eine **Folge** von Punkten in X .

Dann nennt man die Folge (x^k) **konvergent** gegen $a \in X$, Symbol

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a, \text{ salopp } x^k \rightarrow a$$

wenn außerhalb jeder Umgebung von a nur endlich viele Punkte der Folge liegen, d.h.

zu jeder Umgebung U von a existiert ein $n = n(U) \in \mathbf{N}$ mit

$$x^k \in U, \forall k \geq n(U)$$

Nach Definition des Umgebungsbegriffs ist dies äquivalent mit

$$\forall \epsilon > 0 \exists n = n(\epsilon) \text{ mit } d(x^k, a) < \epsilon, \forall k \geq n(\epsilon)$$

(4.1)

Im \mathbf{R}^n kann man die Folgenkonvergenz auf die Konvergenz von Folgen reeller Zahlen zurückführen: es gilt der

Satz

$$(1) (x^k) \subset \mathbf{R}^n \rightarrow a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \iff$$

$$(2) \lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = a_i, \forall i = 1, \dots, n, \text{ d.h. komponentenweise Konvergenz.}$$

(4.2)

Beweis: Übung

Die Bezeichnung $\| \cdot \|_\infty$ wird durch den

Satz:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$$

plausibel.

Satz:

- (1) X metrischer Raum ,
 - (2) $X \supset A$ abgeschlossen genau dann, wenn
 - (3) $A \supset (x_k) \rightarrow a \in X \implies x \in A$
- (4.3)

Definition :

- (1) X metrischer Raum
 - (2) Folge $(x_k) \subset X$ heißt CAUCHY-Folge \iff
 - (3a) $\forall \epsilon > 0 \exists K = K(\epsilon) \in \mathbf{N}$ mit
 - (3b) $d(x_m, x_n) < \epsilon, \forall m, n > K(\epsilon)$
- (4.4)

4.2 Funktionen von endlich vielen reellen Variablen

Wir beschäftigen uns in diesem und im nächsten Kapitel mit Funktionen

$$f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m, \text{ bzw. } f: U \rightarrow \mathbf{R}^m$$

mit $U \subset \mathbf{R}^k$ geeignet, $k, m \in \mathbf{N}$.

Für unsere Vorstellung werden wir $m = 1$ und $k = 1$ oder $k = 2$ setzen, denn nur in diesen zwei Fällen können wir den Graphen von f zeichnen (bzw. von MAPLE zeichnen lassen).

Zur Erinnerung:

Ist $f: X \rightarrow Y$, so ist

$$\text{graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

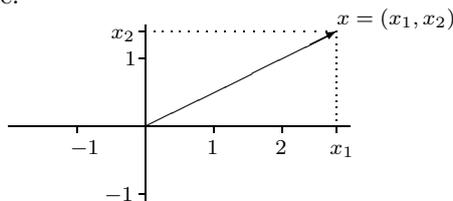
MAPLE >plot3d(4*cos(x+y)*exp(x*y/10), x=-10..10, y=-2..2, grid=[50,50]);

Die Elemente des \mathbf{R}^k sind die k -Tupel (Spaltenvektoren)

$$(x_1, \dots, x_k)^t, x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, k.$$

Eine Anschauung von einem k -Tupel (x_1, \dots, x_k) haben wir nur in den Fällen $k = 1, 2$ oder 3 .

Skizze:



\mathbf{R}^k trägt die Struktur eines \mathbf{R} -Vektorraumes, d.h. wir haben eine *Addition* (komponentenweise) $(x_1, \dots, x_k) + (y_1, \dots, y_k) := (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$

sowie eine *Multiplikation mit einem Skalar*

$$\lambda * (x_1, \dots, x_k) := (\lambda * x_1, \dots, \lambda * x_k), \lambda \in \mathbf{R},$$

so daß die (bekannten) Vektorraumgesetze erfüllt sind.

Für das neutrale Element bzgl. $+$, den Nullvektor (Ursprung des Koordinatensystems), schreiben wir kurz nur $0 := (0, \dots, 0)^t$.

Beachte:

Auf \mathbf{R}^k , $k > 1$, ist **keine** Division von Vektoren möglich;
 $\frac{1}{x}$ für $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ bei $k > 1$ **nicht** definiert!

Für reelle Zahlen $x \in \mathbf{R}$ haben wir den Betrag $|x|$;

unser Analogon für $x = (x_1, \dots, x_k)^t \in \mathbf{R}^k$ ist

Definition

Für $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ heißt $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ (4.5)
 die **euklidische Norm** von x .

Im Fall $k = 1$ ist $\|x\|_2 = |x|$; für $k = 2$ vgl. auch die Definition des Betrags für komplexe Zahlen!

Für $x, y \in \mathbf{R}^k$ beschreibt $\|x - y\|_2$ den (elementargeometrischen) Abstand der Punkte x und y . Insbesondere ist also $\|x\|_2$ der (elementargeometrische) Abstand des Punktes x vom Nullpunkt.

$\|\cdot\|_2$ ist eine Norm im folgenden allgemeinen Sinn

Definition

Ist V ein reeller Vektorraum, so heißt eine Abbildung

- (1) $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ **Norm** (auf V), falls
 (2) $\forall x, y \in V \forall \lambda \in \mathbf{R}$ gilt
 (3a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
 (3b) $\|\lambda * x\| = |\lambda| * \|x\|$
 (3c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**Dreiecksungleichung**)
- (4.6)

Definition

Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V , so definiert man

- $d(x, y) := \|x - y\|$
 als **Abstand** $d(x, y)$ von x und y bzgl. dieser Norm.
- (4.7)

Folgerung

Mit dieser Definition von $d(x, y)$ gilt

- (1) $\forall x, y, z \in V$:
 (2a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (folgt sofort aus 4.6(3a))
 (2b) $d(x, y) = d(y, x)$, (folgt sofort aus 4.6(3b))
 (2c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,
Dreiecksungleichung, (folgt sofort aus 4.6(3c))
- (4.8)

4.3 Stetigkeit

Definition:

Seien X und Y metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

$$f \text{ heißt stetig in } a \in X \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(4.9)

Satz:

Seien X, Y, Z metrische Räume und

$$f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z \text{ Abbildungen}$$

Ist f stetig in $a \in X$ und g stetig in $b := f(a) \in Y$, dann gilt:

$$f \circ g : X \rightarrow Z \text{ stetig in } a.$$

(4.10)

Satz:

Sei X ein metrischer Raum. Eine Abbildung

$$f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbf{R}^n$$

ist genau dann stetig, wenn alle Komponenten

$$f_k : X \rightarrow \mathbf{R}$$

stetig sind.

(4.11)

Satz:

(1) X, Y metrische Räume

(2) $f : X \rightarrow Y$ im Punkt $a \in X$ stetig \iff

(3a) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ mit

(3b) $d_X(x, a) < \delta(\epsilon) \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$

(4.12)

Definition:

(1) X, Y metrische Räume

(2) $f_n : X \rightarrow Y, \forall n \in \mathbf{N}$

(3) $f : X \rightarrow Y$

Die Funktionenfolge (f_n) konvergiert **gleichmäßig** gegen die Funktion $f \iff$

(4a) $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon)$ mit

(4b) $d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon, \forall x \in X, \forall n > N(\epsilon)$

(4.13)

Satz:

(5a) f_n stetig $\forall n \in \mathbf{N}$,

(5b) $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig

Dann ist auch

(6) f stetig

4.3.1 Lineare Abbildungen

Satz:

- (1) V, W normierte Vektorräume
 - (2) $L : V \rightarrow W$ sei lineare Abbildung
 d.h. $L(\alpha_1 * v_1 + \alpha_2 * v_2) = \alpha_1 * L(v_1) + \alpha_2 * L(v_2)$ (4.14)
- Dann gilt :
- (3a) L stetig \iff
 - (3b) $\exists \gamma \in \mathbf{R}$ mit
 $\| L(x) \| \leq \gamma * \| x \| , \forall x \in V$

Definition:

- (1) V, W normierte Vektorräume
 - (2) $L : V \rightarrow W$ sei eine **stetige** lineare Abbildung (4.15)
- Dann definiert man die **Norm** von L durch
- (3) $\| L \| := \sup\{ \| Lx \| : x \in V , \| x \| = 1 \}$

Folgerung

- Nach 4.14 gilt:
- (1) $\| Lx \| \leq \gamma \| x \| , \forall x \in V$
 also nach Division durch $\| x \| \neq 0$:
 - (2) $\| L(\frac{x}{\| x \|}) \| \leq \gamma , \forall 0 \neq x \in V$ (4.16)
- woraus
- (3) $\| L \| < \infty$ und
 - (4) $\| Lx \| \leq \| L \| \| x \| \forall x \in V$,
 folgt.

Nun betrachten wir den Spezialfall $V := \mathbf{R}^n , W := \mathbf{R}^m , \| \cdot \| := \| \cdot \|_2$
 Eine lineare Abbildung $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$

hat, bezogen auf die kanonischen Basisvektoren $e^k := (\delta_{jk} , j = 1, \dots, n)$, die Form

$$Lx = L\left(\sum_{k=1}^n x_k e^k \right) = \sum_{k=1}^n x_k L(e^k) = A_L x$$

einer Matrix $A := (a_{ik} , i = 1, \dots, m , k = 1, \dots, n) := A_L$:

die n **Spalten** von A (der Länge m) sind gerade die n Bilder $L(e^k)$ der kanonischen Basisvektoren e^k .

Definition:

- (1) $A \in \mathbf{R}^{m,n}$, d.h. Matrix mit m Zeilen, n Spalten (4.17)
- Dann definiert man die (von der Vektornorm $\| \cdot \|_2$) generierte) Norm der Matrix A durch
- (2) $\| A \|_{g(2)} := \sup\{ \| Ax \|_2 : x \in \mathbf{R}^n , \| x \|_2 = 1 \}$

Diese Matrixnorm kann folgendermaßen abgeschätzt werden:

Satz:

$$\max_{i, k} |a_{ik}| \leq \|A\|_{g(2)} \leq \sqrt{m * n} \max_{i, k} |a_{ik}|$$

(4.18)

Beweis : Übung.

4.4 Kompaktheit

Definition:

- (1) Teilmenge $X_T \subset X$ metrischer Raum
- (2) I sei eine beliebige (endliche oder unendliche) Indexmenge
- (3) $X \supset U_i$ offen, $\forall i \in I$
- (4) $(U_i)_{i \in I}$ heißt **offene Überdeckung** von $X_T \iff X_T \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

(4.19)

- (5) X_T heißt **kompakt** \iff
- (6a) Zu jeder offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I} \supset X_T$ existiert eine **endliche** Indexmenge $I_n \subset I$ mit
- (6b) $X_T \subset \bigcup_{i \in I_n} U_i$

Satz:

Jede kompakte Teilmenge X_T eines metrischen Raumes X ist beschränkt und abgeschlossen

(4.20)

Die Umkehrung ist nicht generell richtig. Es gilt aber:

Satz: (HEINE-BOREL)

- (1) $\mathbf{R}^n \supset R_T$ kompakt \iff
- (2) R_T abgeschlossen und beschränkt.

(4.21)

Satz:

- (1a) Metrischer Raum $X \supset X_T$ kompakt
 - (1b) $f : X_T \rightarrow \mathbf{R}$ stetig.
- Dann nimmt f auf X_T die Extremwerte an, d.h.
- (2a) $\exists x_1, x_2 \in X_T$:
 - (2b) $f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in X_T\}$
 - (2c) $f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in X_T\}$

(4.22)

Kapitel 5

Differentialrechnung von Fkt. mehrerer Variabler

5.1 Partielle Ableitungen, Gradient

Wir betrachten Abbildungen

$$f: \mathbf{R}^n \supseteq T_n \longrightarrow \mathbf{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

Definition :

”Geometrische” Darstellung von Funktionen mehrerer Variabler

Der **Graph** G_f von f ist die Menge

$$(1) \quad G_f := \{(x, f(x)) : x \in T_n\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

Die **Niveaumenge** $N_f(c)$ von f zum Niveau c ist die Menge

$$(2) \quad N_f(c) := \{x \in T_n : f(x) = c\} \subset \mathbf{R}^n$$

(5.1)

Im Falle $n=2$ nennt man N_f auch ”Höhenlinie”

(vgl. z.B. Wetterkarte (Isobaren, Isothermen) oder alpine Wanderkarten).

Solche Linien existieren allerdings nur unter zusätzlichen Voraussetzungen an f .

MAPLE - 3d-Plot:

```
> f:=(x,y) -> (x*x+y*y);  
> plot3d(f(x,y),x=-1..1,y=-1..1,grid=[41,41],axes=boxed,style=hidden);
```

MAPLE - Höhenlinien:

```
> f:=(x,y) -> (2*x*x+3*y*y);  
> plot3d(f(x,y),x=-1..1,y=-1..1,grid=[41,41],axes=boxed,style=contour,  
contours=20,orientation=[180,0]);
```

Definition : Richtungsableitung , partielle Ableitung und Gradient

- (1) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und
- (2) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}$
- (3) $x \in T_n$ fest gewählt
- (4) $v \in \mathbf{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$
- (5) $\phi(t) := f(x + t * v)$ (definiert nur für $x + t * v \in T_n$)
- (6) $\exists \frac{d}{dt}\phi(t) |_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} =: D_v f(x)$

Dann nennt man $D_v f(x)$ **Richtungsableitung** von f in Richtung v.

Im Spezialfall

- (7) $v = e^k = (0, \dots, 0, \overset{k}{1}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$ (k-ter Einheitsvektor)
bezeichnet man

- (8) $f_{x_k}(x) := \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} := D_{e^k} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t * e^k) - f(x)}{t} = \phi'(0)$

als **partielle Ableitung** von f und f als **partiell differenzierbar** in $v \in T_n$
Der Vektor

- (9) $grad(f(x)) := \overset{\text{"nabla"}}{\nabla} f(x) := (f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x))^t \in \mathbf{R}^n$
heißt **Gradient** von f , in Operatorschreibweise

- (10) $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$

und wird (insbesondere in der mathematischen Physik) häufig benötigt.

(5.2)

Beispiel 1 :

$f(x_1, x_2) := x_1 + x_2^2$

$f_{x_1}(x) = 1$ (x_2 bleibt konstant)

$f_{x_2}(x) = 2 * x_2$ (x_1 bleibt konstant)

$grad(f(x)) = (1, 2 * x_2)^t$

Satz:

- (1) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und
 - (2) $f, g : T_n \rightarrow \mathbf{R}$
 - (3) $\exists \text{grad}(f(x)), \text{grad}(g(x))$
- Dann gilt:
- (4) $\text{grad}(f * g) = g * \text{grad}(f) + f * \text{grad}(g)$

Beweis:

- (4) folgt aus der Produktregel für Funktionen einer Variablen (vgl. 5.1(5),(6)):
- (5)
$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} * g + f * \frac{\partial g}{\partial x_k}$$

(5.3)

5.2 Totale Differenzierbarkeit

Definition (5.4) : (Totale) Differenzierbarkeit

- (1) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und
 (2) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}^m$
 f heißt im Punkt $x \in T_n$ **(total) differenzierbar**, falls
 (3a) \exists lineare Abbildung $L^x : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ und
 (3b) \exists Umgebung $U=U(x)$ mit
 (3c) $f(x + \xi) = f(x) + L^x(\xi) + \phi(\xi)$, $\forall (x + \xi) \in U$ und
 (3d) $\lim_{\xi \rightarrow 0, x + \xi \in U} \frac{\phi(\xi)}{\|\xi\|_2} = 0$

(5.4)

- Die lineare Abbildung L^x lautet in Matrixform
 (4a) $L^x \xi = A_L^x \xi$,
 mit einer Matrix
 (4b) $A_L^x = (a_{jk}^x) \in \mathbf{R}^{m,n}$ (m Zeilen, n Spalten)
 Damit geht (3d) über in
 (4c) $f(x + \xi) = f(x) + A_L^x \xi + \phi(\xi)$, $\forall (x + \xi) \in U$
 also komponentenweise
 (4d) $f_j(x + \xi) - f_j(x) = \sum_{k=1}^n a_{jk}^x \xi_k + \phi(\xi)$,
 $\forall j = 1, \dots, m, \forall (x + \xi) \in U$

Beispiel:

- (5) $C \in \mathbf{R}^{M,N}$, $C^t = C$, d.h. C symmetrisch (quadratische Form)
 (6) $f(x) := \langle x, Cx \rangle = x^t Cx = \sum_{k,j=1}^N c_{kj} x_k x_j$, d.h. n:=N, m:=1 in (2).
 (7) $f(x + \xi) = \langle x + \xi, Cx + C\xi \rangle =$
 $= \langle x, Cx \rangle + \langle x, C\xi \rangle + \langle \xi, Cx \rangle + \langle \xi, C\xi \rangle \stackrel{C_{symm.}}{=} =$
 $= \langle x, Cx \rangle + 2 \langle Cx, \xi \rangle + \langle \xi, C\xi \rangle =$
 $= f(x) + \langle a, x \rangle + \phi(\xi)$, wobei
 (8) $a := 2Cx$, $\phi(\xi) := \langle \xi, C\xi \rangle$
 Mit der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung $\langle u, v \rangle \leq \|u\|_2 \|v\|_2$ folgt
 (11) $\|\phi(\xi)\|_2 \leq \|\xi\|_2 \|C\xi\|_2 \leq \|\xi\|_2 \|C\| \|\xi\|_2 = \|C\| \|\xi\|_2^2$
 Damit gilt
 (11) $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\phi(\xi)}{\|\xi\|_2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \|C\| \|\xi\|_2 = 0$
 also ist f $\forall x \in \mathbf{R}^N$ differenzierbar.

| |
|---|
| <p>SATZ (5.5)</p> |
| <p>(1) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und (2) $f = (f_1, \dots, f_m) : T_n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ sei im Punkt $x \in T_n$ (total) differenzierbar, mit (3) $f(x + \xi) = f(x) + A^x \xi + \phi(\xi)$, (4a) $\lim_{\xi \rightarrow 0, x + \xi \in T_n} \frac{\phi(\xi)}{\ \xi\ _2} = 0$ (4b) $A^x \in \mathbf{R}^{m,n}$ Dann gilt:</p> |
| <p>(5) f ist in x stetig (6) $\frac{\partial f_j}{\partial x_k}(x) = a_{jk}^x, \forall x \in T_n, \forall j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, n$</p> |
| <p>Definition: (7) $(Df)(x) := A^x = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)$ nennt man Differential auch JACOBI-Matrix, Funktionalmatrix von f.</p> |

(5.5)

Es gilt auch umgekehrt:

| |
|--|
| <p>SATZ (5.6) (1) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und (2) $f = (f_1, \dots, f_m) : T_n \longrightarrow \mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ (3) $f_{x_k}(x)$ stetig in $x \in T_n, \forall k = 1, \dots, n$</p> |
| <p>Dann folgt: (4a) f ist in x total differenzierbar , damit aber auch (4b) f ist in x stetig</p> |

(5.6)

SATZ (5.8) Kettenregel

- (1a) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$, $\mathbf{R}^m \supseteq T_m$ offen und
- (1b) $g : T_n \rightarrow \mathbf{R}^m$
- (1c) $f : T_m \rightarrow \mathbf{R}^k$
- (1d) g in $x \in T_n$ total differenzierbar
- (1e) f in $y = g(x)$ total differenzierbar

(5.7)

Dann ist die Kompositionsabbildung

- (2a) $h := f \circ g : T_n \rightarrow \mathbf{R}^k$
- in $x \in T_n$ total differenzierbar mit
- (2b) $D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) * Dg(x)$

Folgerung : Kettenregel für k=1

- (1a) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$, $\mathbf{R}^m \supseteq T_m$ offen und
- (1b) $g : T_n \rightarrow \mathbf{R}^m$
- (1c) $f : T_m \rightarrow \mathbf{R}^1$
- (1d) g in $x \in T_n$ total differenzierbar
- (1e) f in $y = g(x)$ total differenzierbar

(5.8)

Dann gilt für die die Kompositionsabbildung

- (2a) $h := f \circ g : T_n \rightarrow \mathbf{R}^1$
- (2b) $\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}(g(x)) \frac{\partial g_j}{\partial x_k}(x)$, $\forall k = 1, \dots, n$

| | |
|---|--|
| Satz 5.9 | |
| <p>(1) $\mathbf{R}^n \supset T_n$ offen (2) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}^1$ stetig differenzierbar (3a) $x, v \in \mathbf{R}^n$ fest, $\ v\ _2 = 1$, $t \in \mathbf{R}^1$ (3b) $g(t) := x + t * v = (x_1 + t * v_1 + \dots + x_n + t * v_n)^t$ $= (g_1(t), \dots, g_n(t))^t$ (3c) $g(0) = x$, $g'(t) = v$ (4) Richtungsableitung $D_v f(x) = \frac{d}{dt} f(g(t)) _{t=0}$ Dann gilt $\forall x \in T_n$</p> | |
| (5) | $D_v f(x) = \langle v, \text{grad } f(x) \rangle$ |
| Beweis | |
| Da n. Vor. T_n offen und h stetig ist, gilt | |
| (6) $\exists \epsilon > 0 : h(t) := f(g(t)) \in T_n, \forall t \in]-\epsilon, \epsilon[$ | |
| Die Kettenregel 5.8 liefert | |
| (9) | $\frac{d}{dt} g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t)) \frac{d}{dt} g_k(t)$ |
| | $\stackrel{(3b)}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(t)) v_k$ |
| (10) | $\frac{d}{dt} g(t) _{t=0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(g(0)) v_k$ |
| | $\stackrel{(3b)}{=} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) v_k$ |
| | $= \langle \text{grad } f(x), v \rangle = \langle v, \text{grad } f(x) \rangle$ |

(5.9)

| | |
|-----------------------|--|
| Folgerung 5.10 | |
| (1) | $D_v f(x) = \langle v, \text{grad } f(x) \rangle \implies$ |
| (2) | $D_v f(x) = \ v\ _2 \ \text{grad } f(x) \ _2 \cos(\alpha)$ wobei |
| (3) | $\alpha =$ Winkel zwischen v und $\text{grad } f(x)$ |
| Damit folgt : | |
| (4) | Die Richtungsableitung wird maximal für $\alpha = 0$. d.h. |
| (5) | Der Vektor $\text{grad } f(x)$ liefert die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt x. |

(5.10)

Mittelwertsatz 5.11

- (1) $\mathbf{R}^n \supset T_n$ offen
 (2) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}^m$ stetig differenzierbar.
 (3) $x \in T_n$, $v \in \mathbf{R}^n$
 (4) Die Strecke $x + t * v$, $0 \leq t \leq 1$ liegt ganz in T_n
 Dann gilt :

$$(5a) \quad f(x + v) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x + t * v) dt \right) v$$

mit der Funktionalmatrix (m Zeilen, n Spalten)

$$(5b) \quad Df = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} \right)_{j=1, \dots, m, k=1, \dots, n}$$

und mit

$$(6a) \quad M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + tv)\|$$

erhält man

$$(6b) \quad \|f(x + v) - f(x)\| \leq M * \|v\|$$

(5.11)

| |
|---|
| <p>TAYLOR-Formel 5.12</p> |
| <p>(1a) $\mathbf{N}^n \ni \alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (1b) $\alpha := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ (1c) $\alpha! := \alpha_1! * \dots * \alpha_n!$ (1d) $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} * \dots * x_n^{\alpha_n}, \forall x \in \mathbf{R}^n$ Ist f α mal stetig differenzierbar, definiert man (2) $D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} f$</p> <p>(3) $\mathbf{R}^n \supset T_n$ offen, $x \in T_n$ (4) $v \in \mathbf{R}^n$ mit $x + t * v \in T_n, \forall t \in [0, 1]$ (5) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}^1$ sei $k+1$ mal stetig differenzierbar. Dann gilt:</p> |
| <p>(6a) $\exists \theta \in [0, 1]$ mit (6b) $f(x + v) = \sum_{ \alpha \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + \sum_{ \alpha \leq k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta * v)}{\alpha!} v^\alpha$</p> |
| <p>Gilt zusätzlich (7) $\exists \delta > 0 : \{y \in \mathbf{R}^n : \ y - x\ < \delta\} \subset T_n$ so kann man den zweiten Summanden in (6b) abschätzen und erhält</p> |
| <p>(8) $\forall v \in \mathbf{R}^n$ mit $\ v\ < \delta$</p> <p>(9a) $f(x + v) = \sum_{ \alpha \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} v^\alpha + o(\ v\ ^k)$ wobei $o(\ v\ ^k)$ eine Funktion ϕ darstellt mit (9b) $\phi(0) = 0$ (9c) $\lim_{v \rightarrow 0, v \neq 0} \frac{\phi(v)}{\ v\ ^k} = 0$</p> |
| <p>Im Falle $k=2$ erhält (9a) die anschauliche Form (10a) $f(x + v) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), v \rangle + \frac{1}{2} \langle v, H(x)v \rangle + o(\ v\ ^2)$ Anteil: konstant linear quadratisch</p> <p>mit der HESSE-Matrix (10b) $H(x) := (D_j D_k f(x)) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right) = (f_{x_j x_k}) \in \mathbf{R}^{n,n}$</p> |

(5.12)

MAPLE - HESSE-Matrix:

```
> with(linalg):
> hessian(x*y*z, [x,y,z]):
```

Satz:(Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge)

- (1) $\mathbf{R}^n \supset T_n$ offen
- (2) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}$ stetig differenzierbar.

Dann gilt:

- (3a) $D_j D_k f(x) = D_k D_j f(x)$, $j, k = 1, \dots, n$, anders geschrieben
- (3b) $f_{x_j x_k} = f_{x_k x_j}$, d.h.
- (3c) Die HESSE-Matrix $H(x) := (D_j D_k f(x))$ ist symmetrisch, $H = H^t$

(5.13)

Für Funktionen $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ kann MAPLE in vielen Fällen die TAYLOR-Entwicklung berechnen :

MAPLE - TAYLOR-Formel:

```
> mtaylor(sin(x*x+y*y), [x,y]);
```

5.3 Vektorfelder, Divergenz, Rotation, LAPLACE-Operator

Definition: Vektorfeld

- (1) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und
 - (2) $v(x) := (v_1(x), \dots, v_n(x)) : T_n \rightarrow \mathbf{R}^n$
- Dann nennt man die Abbildung v ein **Vektorfeld**.
- (3) v differenzierbares Vektorfeld $\iff \exists \text{grad}(v_k), \forall k = 1, \dots, n$

Beispiel: f total differenzierbar $\implies \text{grad}(f)$ ist ein Vektorfeld.

MAPLE - Vektorfeld des Gradienten:

```
> with(linalg):
> with(plots):
> G:=grad(x*x+3*y*y, [x,y]);
> fieldplot(G,x=-4..4,y=-4..4);
```

Definition: Divergenz

- (1) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und
 - (2) $v(x) := (v_1(x), \dots, v_n(x)) : T_n \rightarrow \mathbf{R}^n$ differenzierbares Vektorfeld
- Dann definiert man die **Divergenz** :

$$(3) \quad \text{div}(v) := \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \langle \nabla, v \rangle = \langle \text{grad}, v \rangle \tag{5.15}$$

Folgerung:

- (4) $\phi : T_n \rightarrow \mathbf{R}$ partiell differenzierbar \implies

$$(5a) \quad \frac{\partial(\phi * v_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \phi}{\partial x_k} * v_k + \phi * \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \text{ (Produktregel)}$$

Summation über $k = 1, \dots, n$ liefert

$$(5b) \quad \text{div}(\phi * v) = \langle \nabla \phi, v \rangle + \phi * \text{div} v$$

MAPLE - Divergenz:

```
> with(linalg):
> f:=[x,y*y,z+x]: v:=[x,y,z]:
> diverge(f,v);
```

Definition: Rotation (curl)

- (1) $\mathbf{R}^3 \supseteq T_3$ offen und
 (2) $v(x) := (v_1(x), v_2(x), v_3(x)) : T_n \rightarrow \mathbf{R}^3$ differenzierbares Vektorfeld
 Dann definiert man die **Rotation** :
 (3) $rot(v) := \nabla \times v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)$

(5.16)

MAPLE - Rotation:

```
> with(linalg):
> f := [x*x, x*z, y*y*z]: v := [x, y, z]:
> curl(f, v);
```

Satz:

- (1a) $\mathbf{R}^3 \supset T_3$ offen
 (1b) $f : T_3 \rightarrow \mathbf{R}^1$ zweimal stetig partiell differenzierbar
 Dann gilt
 (2) $rot\ grad\ f(x) = 0, \forall x \in T_3$

(5.17)

Beweis:

Aus 5.13 folgt:

Die erste Komponente von $rot\ grad\ f(x)$ ist $f_{x_3x_2} - f_{x_2x_3} = 0$

Analog erhält man diese Aussage für die 2. und 3. Komponente durch zyklische Vertauschung.

Definition: LAPLACE-Operator

- (1a) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und
 (1b) $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ zweimal (stetig) differenzierbar
 Dann definiert man den LAPLACE-Operator Δ durch

$$(2) \quad \Delta f(x) := div\ grad\ f(x) = \sum_{k=1}^n u_{x_k x_k}$$

(5.18)

MAPLE - LAPLACE-Operator:

```
> with(linalg):
> laplacian(x*x*x+y*y, [x, y]):
```

5.4 Lokale Extrema

Definition: Minimum, Maximum

- (1a) $\mathbf{R}^n \supset T_n$ offen
- (1b) $x^* \in T_n$
- (1c) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}$

Dann definiert man:

- (2a) x^* *lokales Maximum* von $f \iff$
- (2b) \exists Umgebung $V \subset T_n$ mit
- (2c) $f(x^*) \geq f(y)$, $\forall y \in V$
- (3a) x^* *lokales Minimum* von $f \iff$
- (3b) \exists Umgebung $V \subset T_n$ mit
- (3c) $f(x^*) \leq f(y)$, $\forall y \in V$

(5.19)

Ein *Extremum* ist ein Maximum oder Minimum.
Ist das Extremum x^* in der Umgebung T_n von x^* eindeutig bestimmt, so spricht man von einem *isolierten Extremum*

**Satz: Notwendige Bedingung
für Extrema differenzierbarer Funktionen.**

- (1a) $\mathbf{R}^n \supset T_n$ offen
- (1b) $x^* \in T_n$
- (1c) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}$
nach allen Variablen partiell differenzierbar
- (1d) f hat in x^* ein lokales Extremum

(5.20)

Dann gilt:

- (1d) $\text{grad } f(x^*) = 0$

5.4.1 Positiv definite Matrizen

| | |
|--|--------|
| <p>Definition : Definitheit symmetrischer Matrizen Sei $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ eine symmetrische Matrix ($A^t = A$) mit den (reellen) Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.</p> <p>(1a) A heißt positiv definit \iff (1b) $\langle Ax, x \rangle > 0, \forall 0 \neq x \in \mathbf{R}^n \iff$ (1c) $\lambda_k > 0, \forall k = 1, \dots, n$</p> <p>(2a) A heißt positiv semidefinit \iff (2b) $\langle Ax, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}^n \iff$ (2c) $\lambda_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n$</p> <p>(3a) A heißt negativ definit \iff (3b) $\langle Ax, x \rangle < 0, \forall 0 \neq x \in \mathbf{R}^n \iff$ (3c) $\lambda_k < 0, \forall k = 1, \dots, n$</p> <p>(4a) A heißt negativ semidefinit \iff (4b) $\langle Ax, x \rangle \leq 0, \forall x \in \mathbf{R}^n \iff$ (4c) $\lambda_k \leq 0, \forall k = 1, \dots, n$</p> <p>(5a) A heißt indefinit \iff (5b) $\exists x, y$ mit $\langle Ax, x \rangle > 0$ und $\langle Ay, y \rangle < 0 \iff$ (5c) $\exists j, k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_j < 0, \lambda_k > 0$</p> | (5.21) |
|--|--------|

MAPLE berechnet die Eigenwerte einer reellen Matrix A folgendermaßen:

| |
|--|
| <p>MAPLE - Eigenwerte :</p> <pre>> with(linalg): > A:=matrix(3,3,[1.0,2.0,3.0,1.0,2.0,3.0,2.0,5.0,6.0]); > eigenvalues(A);</pre> |
|--|

5.4.2 Notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

| | |
|--|--------|
| <p>Satz: Hinreichende Bedingung für Extrema differenzierbarer Funktionen.</p> | |
| <p>(1a) $\mathbf{R}^n \supset T_n$ offen (1b) $x^* \in T_n$ (1c) $f : T_n \rightarrow \mathbf{R}$ nach allen Variablen zweimal stetig partiell differenzierbar (1d) $H(x^*) = (f_{x_j x_k})_{j, k = 1, \dots, n} \in \mathbf{R}^{n,n}$ HESSE-Matrix von f (1d) $\text{grad } f(x^*) = 0$ (d.h. x^* ist "stationärer Punkt")</p> | (5.22) |
| <p>Dann gilt: (Erinnerung: $H^t = H$, H symmetrisch)</p> <p>(2a) $H(x^*)$ positiv definit \implies f hat in x^* ein isoliertes Minimum (2b) $H(x^*)$ negativ definit \implies f hat in x^* ein isoliertes Maximum (2c) $H(x^*)$ indefinit \implies f hat in x^* kein lokales Extremum</p> | |

| | |
|--|--------|
| Beispiel 1: | |
| (1) $f(x) := c + x_1^2 + 3 * x_2^2$ | |
| (2a) $\nabla f(x) = (2 * x_1, 6 * x_2)^t$ (2b) $\nabla f(0,0) = (0,0)^t$ (3a) $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = H(0,0)$. | (5.23) |
| Eigenwerte von H: (3b) $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = 6 > 0$ also ist $H(0,0)$ positiv definit und wegen 5.22(2a) gilt: (4) f hat in $(0,0)$ ein <u>isoliertes lokales Minimum</u> . Der Graph von f (5) $G_f := \{x \in \mathbf{R}^3 : x_3 = x_1^2 + 3 * x_2^2\}$ ist ein in Richtung $e^3 = (0,0,1)$ offenes Paraboloid. | |

| | |
|---|--------|
| Beispiel 2: | |
| (1) $f(x) := c + x_1^2 - x_2^2$ | |
| (2a) $\nabla f(x) = (2 * x_1, -2 * x_2)^t$ (2b) $\nabla f(0,0) = (0,0)^t$ (3a) $H(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = H(0,0)$. | |
| Eigenwerte von H: (3b) $\lambda_1 = 2 > 0$, $\lambda_2 = -2 > 0$ also ist $H(0,0)$ indefinit, in $(0,0)$ liegt also kein Extremum. (4) f hat in $(0,0)$ einen <u>Sattelpunkt</u> . Der Graph von f (5) $G_f := \{x \in \mathbf{R}^3 : x_3 = c + x_1^2 - x_2^2\}$ ist eine Sattelfläche (Der Kopf des Reiters zeigt in Richtung $e^3 = (0,0,1)$) | (5.24) |

5.5 Implizite Funktionen

5.5.1 Implizite Funktionen in der Computertomographie (CT)

Zur Motivation der Untersuchung impliziter Funktionen (und auch später der Kurvenintegrale) streifen wir kurz die Computer-Tomographie, eines der brillanten Beispiele für die enorme Bedeutung der Mathematik für die Menschheit! Im Jahr 1970 wurde die CT von dem britischen Ingenieur G.N. HOUNSFIELD und dem amerikanischen Physiker A.M.CORMACK entwickelt. Beide erhielten dafür 1979 den Nobelpreis für Medizin. Bei der CT benutzt man Röntgenstrahlen, um das Innere des Körpers bzw. der Körperteile abzubilden, und zwar schichtweise, indem man unter verschiedenen Winkeln röntgt. Ein Computer berechnet aus diesen Schichtaufnahmen dann zwei- oder dreidimensionale Bilder. Dazu werden mathematische Verfahren wie die RADON-Transformation (Johann RADON, 1887-1956) oder auch die FOURIER-Transformation (Joseph FOURIER, 1768-1830) eingesetzt. Die typischen Röntgenbilder mit den hellen und dunklen Mustern entstehen dadurch, daß viele Gewebe einen spezifischen Schwächungskoeffizienten μ besitzen, d.h. es tritt unterschiedlich viel Strahlungsenergie durch. Um dies zu messen, benutzt man die HOUNSFIELD-Skala, die verschiedene Dichtewerte des Gewebes repräsentiert. Wasser hat den Wert 0 HE (HOUNSFIELD Einheiten), Luft -1000 HE und Knochen 3000 HE. Der Durchgang eines Röntgenstrahls durch das Gewebe wird durch ein Linienintegral beschrieben, das man mithilfe der RADON- und der FOURIER-Transformation auflösen kann. Wenn der Computer auf diese Weise nun hinreichend viele verschiedene Linienintegrale auswertet, kann er die untersuchte Schicht in guter Näherung rekonstruieren:

- (1) $\mu(x)$ = gesuchte Dichtefunktion des Gewebes
- (2) I_0/I relative Strahlungsintensität nach Durchgang
- (3) $\ln(I_0/I_k) = \int_{\text{Linie}(k)} \mu_k(x(s)) ds, k \in K$

Schreibt man (3) in der Form

$$(4) \quad F_k(I_k, \mu_k(x)) := \ln(I_0/I_k) - \int_{\text{Linie}(k)} \mu_k(x(s)) ds = 0$$

so ist die gesuchte Funktion μ in "impliziter" Form gegeben : man muß die Funktion $F(I, \mu)$ nach μ "auflösen".

Bei der CT ist das ein mathematisch und numerisch hartes Problem, das erst seit einigen Jahren ausreichend gut beherrscht wird; es gibt hier keine exakte, nur eine näherungsweise Auflösung.

Im folgenden Abschnitt sollen Bedingungen für eine exakte Auflösbarkeit unter Differenzierbarkeitsbedingungen (bei der CT i. allg. nicht erfüllt) vorgestellt werden.

5.5.2 Implizite Funktionen

| Hauptsatz über implizite Funktionen | |
|---|--------|
| (1a) $a \in \mathbf{R}^k$, $b \in \mathbf{R}^m$ (1b) $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ (2a) $U_1 := \{x \in \mathbf{R}^k : \ x - a\ < r_1\}$ (2b) $U_2 := \{y \in \mathbf{R}^m : \ y - b\ < r_2\}$ (3a) $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbf{R}^m$ $(x, y) \mapsto F(x, y)$ (3b) $F(a, b) = 0$ (3c) F in $(a, b) \in \mathbf{R}^{k+m}$ total differenzierbar (3d) $\mathbf{R}^{m,m} \ni \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ ist invertierbar | (5.25) |
| (4a) $g : U_1 \rightarrow \mathbf{R}^m$ stetig (4b) $g(a) = b$ (4c) $g(U_1) \subset U_2$ (5) $F(x, g(x)) = 0, \forall x \in U_1$ | |
| Dann gilt: (6a) g ist in a differenzierbar mit der JACOBI-Matrix (6b) $\frac{\partial g}{\partial x}(a) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(a, b)$ | |

Dabei ist

$$(7) \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m,k}.$$

$$(8) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m,k}.$$

$$(9) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m,m}.$$

Auflösungssatz für implizite Funktionen

- (1) $U_1 \subset \mathbf{R}^k$, $U_2 \subset \mathbf{R}^m$ offene Mengen
- (2) $F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbf{R}^m$
 $(x, y) \mapsto F(x, y)$
 stetig differenzierbar
- (3a) $(a, b) \in U_1 \times U_2$
- (3b) $F(a, b) = 0$
- (3c) $\mathbf{R}^{m,m} \ni \frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar

Dann gilt:

- (4a) \exists offene Umgebung V_1 mit $a \in V_1 \subset U_1$
- (4b) \exists offene Umgebung V_2 mit $b \in V_2 \subset U_2$
- (5) $\exists g : V_1 \rightarrow V_2$ stetig
 "Auflösung" von $F(x, y) = 0$ nach $y = g(x)$

mit

(6) $F(x, g(x)) = 0$, $\forall x \in V_1$

und

(7) $((x, y) \in V_1 \times V_2, F(x, y) = 0) \implies y = g(x)$
 (Eindeutigkeit der Auflösung $y = g(x)$)

Aus 5.25 folgt

(8a) $\exists U_1^* \subset U_1$, $U_2^* \subset U_2$ mit

(8b) $\frac{\partial g}{\partial x}(x) = - \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))$, $\forall x \in U_1$

(5.26)

5.5.3 Höhenlinien

| |
|---|
| Satz: Höhenlinien |
| <p>Voraussetzungen:</p> <p>(1) $\mathbf{R}^2 \supset U$ offen (2) $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ stetig differenzierbar Die Niveaumenge $N_f(c)$ von f zum Niveau c ist die Menge (3) $N_f(c) := \{(x, y) \in U : f(x, y) = c\} \subset \mathbf{R}^2$ (4a) $(a, b) \in U$ (4b) $c := f(a, b)$ (5) $\text{grad } f(a, b) \neq (0, 0)$ (6) $F(x, y) := f(x, y) - c$</p> |
| <p>Argumentation:</p> <p>Anwendung von Satz 5.26 auf die Funktion F <i>Fallunterscheidung nach (5):</i> (6) Fall 1): $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0 \implies$ (6a) \exists offene Intervalle $I_1, I_2 \in \mathbf{R}$ mit $(a, b) \in I_1 \times I_2 \subset U$ und $h : I_1 \rightarrow I_2$ mit $N_f(c) \cap (I_1 \times I_2) = \{(x, y) \in I_1 \times I_2 : y = h(x)\}$ (7) Fall 2): $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \neq 0$ analog zu Fall 1), x und y vertauscht.</p> |
| <p>Resultat: Die Höhenlinien lassen sich also in der Umgebung eines Punktes, in dem der Gradient nicht verschwindet, stets als Graph einer Funktion h von x oder y darstellen.</p> |

(5.27)

MAPLE - Höhenlinien:

```
> f:=(x,y) -> (2*x*x+3*y*y);
> plot3d(f(x,y),x=-1..1,y=-1..1,grid=[41,41],axes=boxed,style=contour,
contours=20,orientation=[180,0]);
```

5.5.4 Umkehrabbildungen

| |
|--|
| Satz : |
| <p>(1) $\mathbf{R}^n \supset U_1, U_2$ offen (2) $f : U_1 \rightarrow U_2$ (3) $a \in U_1, b := f(a)$ (4a) $\exists g := f^{-1} : U_2 \rightarrow U_1 \implies$ (4b) $g \circ f = Id_{U_1} \implies$ (Kettenregel) (4c) $D(g \circ f)(a) = Dg(b)Df(a) = D(Id_{U_1}) = (\delta_{jk}) = \mathbf{1} \in \mathbf{R}^{n,n}$ (Einheitsmatrix)</p> |
| <p>Daraus folgt: (5) $Dg(b) = (Df(a))^{-1}$</p> |

(5.28)

Die Bedingung 5.28(5) ist auch hinreichend für Invertierbarkeit, wenn man ggf. die Umgebungen U_1, U_2 noch verkleinert: mithilfe des Satzes über implizite Funktionen beweist man den

| |
|---|
| Satz : |
| <p>(1) $\mathbf{R}^n \supset U$ offen (2) $f : U \rightarrow \mathbf{R}^n$ stetig differenzierbar (3) $a \in U, b := f(a)$ (4) $\det Df(a) \neq 0$</p> |
| <p>Dann gilt: (5a) $\exists U \supset V$ offen (5b) \exists offen $V^* \ni b$ mit (6a) $f : V \rightarrow V^*$ bijektiv und (6b) $g := f^{-1} : V^* \rightarrow V$ stetig differenzierbar mit (7) $Dg(b) = (Df(a))^{-1}$</p> |

(5.29)

5.5.5 Lokale Extrema mit Nebenbedingungen LAGRANGE-Multiplikatoren

Als weitere wichtige Anwendung der Theorie der impliziten Funktionen werden nun notwendige Bedingungen für lokale Extrema von Funktionen unter Nebenbedingungen abgeleitet:

| | |
|---|--------|
| Satz : LAGRANGE-Multiplikatoren | |
| (1) $\mathbf{R}^n \supset U$ offen (2) $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ stetig differenzierbar (3) $M := \{x \in U : f(x) = 0\}$ (Menge der zulässigen Punkte) (4) $a \in U$, $\text{grad}(f(a)) \neq 0 \in \mathbf{R}^n$ Die Funktion (5a) $h : U \rightarrow \mathbf{R}$ besitze in a ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung (5b) $f(a) = 0$ d.h. (5c) \exists Umgebung $V : a \in V \subset U$ mit (5d) $h(a) \geq (\leq) h(x)$, $\forall x \in M \cap V$ | (5.30) |
| Dann existiert ein "LAGRANGE-Multiplikator" $\lambda \in \mathbf{R}$ mit (6) $\text{grad } h(a) = \lambda \text{ grad } f(a)$ | |
| Dies kann man auch anders schreiben: Definiert man nämlich (7) $L(x, \lambda) := h(x) - \lambda * f(x)$ (LAGRANGE-Funktion) so lauten die beiden notwendigen Bedingungen (7a) $\nabla_x L(a, \lambda) = 0 : \nabla h(a) - \lambda \nabla f(a) = 0$ (7b) $\nabla_\lambda L(a, \lambda) = 0 : f(a) = 0$ | |

Beispiel 1:

- (8a) $h(x) := x_1^2 + x_2^2$
- (8b) $f(x) := 3 * x_1 + x_2 - 1$ (=0 : Gerade)
- (9) Aufgabe : $h(x) \rightarrow \min$ unter der Nebenbedingung $f(x) = 0$
- (9a) $\nabla h(x) = (2x_1, 2x_2)^t$
- (9b) $\nabla f(x) = (3, 1)^t$
- (10) (7a) : $(2 * a_1, 2 * a_2)^t - \lambda * (3, 1)^t = 0 \implies$
- (10a) $2 * a_1 - 3 * \lambda = 0$
- (10b) $2 * a_2 - \lambda = 0$
- (11) (7b) : $3 * a_1 + a_2 = 1$
- (10a),(10b),(11) sind drei lineare Gleichungen für drei Unbekannte a_1, a_2, λ
- (12) (10a)-3*(10b) $\implies 2 * a_1 - 6 * a_2 = 0$
- (13) 6*(11)+(12) $\implies 20 * a_1 = 6$
- (14) $a_1 = 3/10$ in (11) $\implies a_2 = 1/10$

Damit ist noch nicht bewiesen, daß diese Werte a_1, a_2 eine Extremalstelle von $h(x)$ unter der Nebenbedingung $f(x) = 0$ darstellen !!!. Die Bedingungen (7a),(7b) sind nur notwendig und i.allg. nicht hinreichend. Um tatsächlich ein Extremum festzustellen, sind zusätzliche Überlegungen notwendig.

Hier geht das ohne Probleme:

Die Aufgabe (9) ist so einfach, daß man sie ohne LAGRANGE-Multiplikatoren lösen kann. (Die Nebenbedingungen sind nach x_2 auflösbar):

setzt man nämlich die Nebenbedingung $x_2 = 1 - 3 * x_1$ in (8a) ein, erhält man:

$$(15a) \quad h^*(x_1) := x_1^2 + (1 - 3 * x_1)^2 = 10 * x_1^2 - 6 * x_1 + 1$$

$$(15b) \quad \frac{d(h^*(x_1))}{dx_1} = 20 * x_1 - 6 = 0 \implies$$

$$(15c) \quad \boxed{x_1 = 3/10 \implies x_2 = 1 - 3 * x_1 = 1/10} \text{ in Übereinstimmung mit (14)}$$

$$(15d) \quad \frac{d^2(h^*(x_1))}{d^2x_1} = 20 > 0 \implies \text{es liegt ein Minimum vor.}$$

Die Theorie der LAGRANGE-Multiplikatoren ermöglicht auch die Charakterisierung der extremalen Eigenwerte symmetrischer Matrizen:

| |
|--|
| <p>Satz : Extremale Eigenwerte symmetrischer Matrizen</p> |
| <p>(1) $\mathbf{R}^{n,n} \ni A, A^t = A$ (2a) $h : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ (2b) $h(x) := \langle x, Ax \rangle = x^t Ax$ quadratische Form (2c) $\nabla h(x) = 2Ax$ Aufgabe: (3) $h(x) \rightarrow \text{Extremum}$ unter der Nebenbedingung (4a) $x \in M := \{x \in \mathbf{R}^n : \ x\ = 1\}$, d.h. (4b) $f(x) := \ x\ _2 - 1 = 0$ (4c) $\nabla f(x) = 2x$ Dann lauten die beiden notwendigen Bedingungen (5a) $\nabla h(x) - \lambda \nabla f(x) = 0 : 2Ax = \lambda 2x$ (5b) $f(x) = 0$</p> |
| <p>Damit ist die notwendige Bedingung (5a) äquivalent zum Eigenwertproblem (6) $Ax = \lambda x, \ x\ _2 = 1$ für die Matrix A (LAGRANGE-Multiplikator entspricht Eigenwert!)</p> |
| <p>(7a) M kompakt, h stetig $\implies h(x)$ nimmt auf M Minimum und Maximum an \implies (5a) ist erfüllt $\implies \exists$ Eigenwert $\lambda \in \mathbf{R}$ von A</p> <p>Sei (7b) $h(a^1) := \min_{x \in M} h(x), h(a^2) := \max_{x \in M} h(x)$</p> <p>Dann gilt (8a) $h(a^1) = \langle a^1, Aa^1 \rangle = \langle a^1, \lambda_1 a^1 \rangle = \lambda_1 \langle a^1, a^1 \rangle = \lambda_1 \implies$ \exists kleinster Eigenwert $\lambda_1 \in \mathbf{R}$ der symmetrischen Matrix A. (8b) $h(a^2) = \langle a^2, Aa^2 \rangle = \langle a^2, \lambda_2 a^2 \rangle = \lambda_2 \langle a^2, a^2 \rangle = \lambda_2 \implies$ \exists größter Eigenwert $\lambda_2 \in \mathbf{R}$ der symmetrischen Matrix A.</p> |

(5.31)

Extremum der Entropie

Mit einem diskreten Wahrscheinlichkeitsvektor

(1a) $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{R}^n$

(1b) $p_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n$

(1c) $\sum_{k=1}^n p_k = 1$

und der Funktion

(2) $h(x) = \begin{cases} -x \cdot \log_2(x) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

definiert man die **Entropie (SHANNON-Information)**

(3) $H(p_1, \dots, p_n) := \sum_{k=1}^n h(p_k) \geq 0$

Aufgabe:

(4a) $H(p) \rightarrow \text{Max}$
 unter den Nebenbedingungen
 (4b) $p_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n$ und
 (4c) $f(p) = \sum_{k=1}^n p_k - 1 = 0$

LAGRANGE-Funktion

(5) $L(p, \lambda) = H(p) - \lambda f(p)$

Notwendige Bedingung für Extrema unter Nebenbedingung

(6) $\nabla_p L(p, \lambda) = \nabla H(p) - \lambda \nabla f(p) = 0$

Zunächst berechnet man mit

(7a) $\frac{d}{dx} \log_2(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(2)}$ für $x > 0$

(7b) $h'(x) = -\log_2(x) - \frac{x}{x \cdot \ln(2)} = -\log_2(x) - \frac{1}{\ln(2)}$ für $x > 0$

Damit wird (6) wegen (3) und (4c) zu

(8a) $-\log_2(p_k) - \frac{1}{\ln(2)} - \lambda \cdot \frac{\partial p_k}{\partial p_k} = 0, \forall k = 1, \dots, n$

woraus folgt

(8b) $\log_2(p_k) = -\frac{1}{\ln(2)} - \lambda = \text{const.}, \forall k = 1, \dots, n$

wegen (4c) also

(8c) $p_k = \frac{1}{n}, \forall k = 1, \dots, n$ **Gleichverteilung !**

Im Inneren des Simplex

(9) $S(p) := \{p \in \mathbf{R} : p \geq 0 \text{ und } \sum_{k=1}^n p_k = 1\}$

liegt kein Maximum, da

(10a) $h'(x) = -\log_2(x) - \frac{1}{\ln(2)} = 0 \iff$

(10b) $h''(x) = -\frac{1}{x \cdot \ln(2)} < 0$

Im Falle

(11a) $\exists k^* : p_{k^*} = 1, \text{ also } p_k = 0, \text{ für } k \neq k^* \text{ folgt}$

(11b) $H(p) = 0, \text{ wegen (8c) also}$

(12) $0 \leq H(p) \leq 1 = H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \log_2 n$

Kapitel 6

Partielle Differentialgleichungen

6.1 Differentialoperatoren der mathematischen Physik

6.1.1 Typeinteilung linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine Gleichung der Form

(1a) $\mathbf{R}^n \supset \Omega$ offen

(1b) $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$

(2a) $F : \mathbf{R}^{(1+n+n*n)} \rightarrow \mathbf{R}$

(2b) $F(x, u(x), grad(u(x)), H(u(x))) =$

$$F(x, u(x), u_{x_1}(x), \dots, u_{x_n}(x), \left. \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right|_{j, k = 1, \dots, n}) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

heißt **partielle Differentialgleichung 2. Ordnung** für n unabhängige Variable x_1, \dots, x_n und die gesuchte Funktion $u(x)$

I. allg. ist die Lösung u von (2b) nicht eindeutig und man muß (wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen) geeignete Anfangs- bzw. Randbedingungen stellen, um Eindeutigkeit zu erhalten.

Die partielle Differentialgleichung (2b) heißt **linear**, falls

(3) $F(x, g, H)$ linear in allen Argumenten von g und H

Wir betrachten nun den Spezialfall

$$(4) \quad F(x, grad(u(x)), H(u(x))) = \sum_{j, k = 1}^n A_{jk}(x) u_{x_j x_k} - f(x)$$

und hier wiederum den Fall $n = 2$ mit

$$(5) \quad F(x, grad(u(x)), H(u(x))) = a u_{x_1 x_1} + 2b u_{x_1 x_2} + c u_{x_2 x_2}$$

Durch analytische Überlegungen kommt man zur Fallunterscheidung

- (6a) $ac - b > 0$: **elliptischer Typ** (Reine Randwertaufgaben)
(6b) $ac - b < 0$: **hyperbolischer Typ** (Anfangs- und Randwertaufgaben)
(6c) $ac - b = 0$: **parabolischer Typ** (Anfangs- und Randwertaufgaben)

6.1.2 LAPLACE-Gleichung, POISSON-Gleichung

| |
|--|
| POISSON-Gleichung |
| <p>(1a) $\mathbf{R}^n \supset \Omega$ offen , $n = 2, 3$ (1b) Der Rand $\partial\Omega$ von Ω sei hinreichend glatt Gesucht ist eine Funktion (2a) $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ mit (2b) $\Delta f(x) = q(x), \forall x \in \Omega$</p> |
| <p>mit Randbedingungen oder (3) $\gamma_1 * f(x) + \gamma_2 * \frac{\partial}{\partial \nu} f(x) = r_3(x) , \forall x \in \partial\Omega$ (3a) $\gamma_1 \neq 0 , \gamma_2 \equiv 0$: DIRICHLET-Randbedingung (3b) $\gamma_1 \equiv 0 , \gamma_2 \neq 0$: NEUMANN-Randbedingung (3c) $\gamma_1 \neq 0 , \gamma_2 \neq 0$: Gemischte Randbedingung Dabei ist $\nu \in \mathbf{R}^n$ der Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen (Senkrechten) auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω und $\frac{\partial}{\partial \nu}$ die Richtungsableitung in Richtung ν.</p> |
| LAPLACE-Gleichung |
| <p>Für den Spezialfall (4a) $q(x) = 0$ in (2b) (keine Quellen) erhält man (4b) $\Delta f(x) = 0$ (LAPLACE-Gleichung) Funktionen f , die der Gleichung (4b) genügen, nennt man harmonisch</p> |

(6.1)

LAPLACE-Operator Δ bei Rotationssymmetrie

Sei

(1a) $f : \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar

(1b) $R(x) := f(\|x\|_2)$ (rotationssymmetrische Funktion)

Anwendung der Kettenregel :

$$(2) \quad \nabla R(x) = f'(\|x\|_2) \nabla \|x\|_2 = f'(\|x\|_2) \frac{x}{\|x\|_2} \implies$$

$$(3) \quad \Delta R(x) = \Delta f(\|x\|_2) = \operatorname{div} \nabla f(\|x\|_2) = \operatorname{div} \left(f'(\|x\|_2) \frac{x}{\|x\|_2} \right)$$

Definieren wir

$$(4) \quad \phi(x) := f'(\|x\|_2), \quad v(x) := \frac{x}{\|x\|_2}$$

so folgt aus der Produktregel für die Divergenz

$$(5) \quad \boxed{\operatorname{div}(\phi * v) = \langle \nabla \phi, v \rangle + \phi * \operatorname{div} v} \quad \text{vgl. 5.15(5b):}$$

$$(6) \quad \begin{aligned} \Delta R(x) &= \langle \nabla f'(\|x\|_2), \frac{x}{\|x\|_2} \rangle + f'(\|x\|_2) \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|_2} \\ &= \langle f''(\|x\|_2) \frac{x}{\|x\|_2}, \frac{x}{\|x\|_2} \rangle + f'(\|x\|_2) \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|_2} \\ &= f''(\|x\|_2) \left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, \frac{x}{\|x\|_2} \right\rangle + f'(\|x\|_2) \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|_2} \\ &= f''(\|x\|_2) * 1 + f'(\|x\|_2) \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|_2} \end{aligned}$$

Zur Berechnung des zweiten Summanden definieren wir nun

$$(7) \quad \phi(x) := \frac{1}{\|x\|_2}, \quad v(x) := x$$

und erhalten wiederum aus (5)

$$(8) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} \frac{x}{\|x\|_2} &= \langle \nabla \frac{1}{\|x\|_2}, x \rangle + \frac{1}{\|x\|_2} * \operatorname{div} x \\ &= \left\langle -\frac{x}{\|x\|_2^3}, x \right\rangle + \frac{1}{\|x\|_2} * \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial x_k} \\ &= -\|x\|_2^2 * \|x\|_2^{-3} + \frac{n}{\|x\|_2} \\ &= -\frac{1}{\|x\|_2} + \frac{n}{\|x\|_2} \\ &= \frac{n-1}{\|x\|_2} \end{aligned}$$

Setzt man dies in (6) ein, so folgt

$$(9) \quad \boxed{\Delta R(x) = \Delta f(\|x\|_2) = f''(\|x\|_2) + \frac{n-1}{\|x\|_2} f'(\|x\|_2)}$$

Als Spezialfälle erhält man die singulären Lösungen

$$\boxed{\begin{aligned} (10a) \quad &\Delta \ln(\|x\|_2) = 0, \quad n = 2 \\ (10b) \quad &\Delta \frac{1}{\|x\|_2^{n-2}} = 0, \quad n > 2 \end{aligned}}$$

6.1.3 Diffusionsgleichung

| |
|---|
| Diffusionsgleichung |
| <p>(1) $u_t(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \alpha \Delta u(x, t)$ $\forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), $\forall t \in (0, T)$: $\alpha =$ Wärmeleitungs- bzw. Diffusionskoeffizient</p> |
| <p>Separationsansatz: (2) $u(x, t) =: f(x) * g(t)$ Einsetzen in die Diffusionsgleichung (1) liefert</p> <p>(3a) $f(x) \frac{dg(t)}{dt} = \alpha g(t) \Delta f(x)$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^{n+1} \implies$</p> <p>(3b) $\frac{g'(t)}{g(t)} = \alpha \frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \lambda = const.$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ Dies sind zwei Differentialgleichungen</p> <p>(4a) $g'(t) = \lambda g(t) \implies$ $g(t) = e^{-\lambda * t}$</p> <p>und</p> <p>(4b) $\Delta f = \frac{\lambda}{\alpha} f =: \lambda^* f$ Eigenwertproblem für den LAPLACE-Operator (HELMHOLTZsche Schwingungsgleichung)</p> |

(6.2)

| |
|---|
| Satz: |
| <p>(1) $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_0^+$ $F(x, t) := t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\ x\ _2^2}{4t}\right)$ ist eine Lösung der Diffusionsgleichung</p> <p>(2) $F_t(x, t) = \Delta F(x, t)$</p> |

(6.3)

6.1.4 Wellengleichung

| |
|--|
| Wellengleichung |
| <p>(1) $u_{tt}(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \Delta u(x, t)$ $\forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$), $\forall t \in (0, T)$: $c =$ Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle</p> |
| <p>Separationsansatz: (2) $u(x, t) =: f(x) * g(t)$ Einsetzen in die Wellengleichung (1) liefert: (3a) $f(x) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = c^2 g(t) \Delta f(x)$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^{n+1} \implies$ (3b) $\frac{g''(t)}{g(t)} = c^2 \frac{\Delta f(x)}{f(x)} = \lambda = const.$, $\forall (x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ Dies sind zwei Differentialgleichungen (4a) $g''(t) = \lambda g(t) \implies$ $g(t) = e^{\pm i * \sqrt{\lambda} * t}$ und (4b) $\Delta f = \frac{\lambda}{c^2} f =: \lambda^* f$ Eigenwertproblem für den LAPLACE-Operator (HELMHOLTZsche Schwingungsgleichung)</p> |

(6.4)

| |
|--|
| Satz: |
| <p>(1) $\mathbf{R} \ni c > 0$ (Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle) (2) $v \in \mathbf{R}^n$, $\ v\ _2 = 1$ (Ausbreitungsrichtungsvektor der Welle) (3) $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar</p> |
| <p>Dann gilt (4) $F : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ $F(x, t) := f(\langle v, x \rangle - ct)$ ist eine Lösung der Wellengleichung (5) $F_{tt} = c^2 \Delta F$</p> |

(6.5)

6.1.5 Telegraphengleichung

Telegraphengleichung

Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in Drähten.
("Überlagerung" von Wellenausbreitung und Diffusion (Dämpfung))

$$(1) \quad c_1^2 u_{tt}(x, t) + c_2^2 u_t(x, t) = \Delta u(x, t)$$

(6.6)

Spezielle Lösungen erhält man wiederum mit dem

Separationsansatz:

$$(2) \quad u(x, t) =: f(x) * g(t)$$

analog zur Diffusions- und Wellengleichung

6.1.6 MAXWELL-Gleichungen der Elektrodynamik

Die Vektoroperationen *div* (Divergenz) und *rot* (Rotation) erlauben eine elegante Formulierung der MAXWELL-Gleichungen für elektrische und magnetische Felder in homogenen Medien : (vgl. LEIS , S. 12)

| |
|--|
| MAXWELL-Gleichungen |
| <p>(1a) $\operatorname{rot} E + \mu \frac{\partial H}{\partial t} = 0$</p> <p>(1b) $\operatorname{rot} H - \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma E = 0$ mit den Anfangsbedingungen (zur Zeit t=0)</p> <p>(2a) $E(x, 0) := E_0(x)$ (2b) $\operatorname{div} E_0(x) = 0$ (3a) $H(x, 0) := H_0(x)$ (3b) $\operatorname{div} H_0(x) = 0$</p> |
| <p>und den Konstanten</p> <p>(4a) $\epsilon > 0$ Dielektrizitätskonstante (4b) $\mu > 0$ Permeabilität (4c) $\sigma > 0$ Elektrische Leitfähigkeit</p> |
| <p>Gesucht ist:</p> <p>(4) $E = E(x, t) \in \mathbf{R}^3$, (Elektrische Feldstärke) (5) $H = H(x, t) \in \mathbf{R}^3$, (Magnetische Feldstärke)</p> |

(6.7)

MAXWELL (1831-1879) konnte mit den Gleichungen (1a),(1b) die Existenz elektromagnetischer Wellen vorhersagen, die erst 1888 von HERTZ (1857-1894) experimentell nachgewiesen wurden.

**Folgerung 1 : Divergenzfreiheit des elektrischen
und magnetischen Feldes**

Wir setzen:

$$(6a) \quad f(x, t) := \operatorname{div} E(x, t), \text{ also nach Vor. (2a):}$$

$$(6b) \quad f(x, 0) = E_0(x)$$

Divergenzbildung auf beiden Seiten der MAXWELL-Gleichung (1b) liefert

$$(7a) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} H - \epsilon \operatorname{div} \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma \operatorname{div} E = 0.$$

also wegen

$$(7b) \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0 \text{ (vgl. Übung):}$$

$$(7c) \quad -\epsilon \operatorname{div} \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma \operatorname{div} E = 0.$$

Falls $E(x, t)$ zweimal stetig partiell differenzierbar ist, kann in (6d) die Differentiationsreihenfolge vertauscht werden, also folgt

$$(7d) \quad -\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} E - \sigma \operatorname{div} E = 0.$$

und mit (6a), (6b):

$$(8a) \quad -\epsilon \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} - \sigma f(x, t) = 0.$$

$$(8b) \quad f(x, 0) = E_0(x)$$

Setzen wir (für festes x)

$$(9a) \quad \phi(t) := f(x, t), \text{ also}$$

$$(9b) \quad \phi(0) = f(x, 0)$$

so geht (8a), (8b) über in

$$(10a) \quad \frac{d\phi(t)}{dt} = -\frac{\sigma}{\epsilon} \phi(t) \implies$$

$$(10b) \quad \frac{d\phi(t)}{\phi(t)} = -\frac{\sigma}{\epsilon} dt \implies$$

$$(10c) \quad \int_0^t \frac{d\phi(\tau)}{\phi(\tau)} d\tau = -\frac{\sigma}{\epsilon} \int_0^t d\tau \implies$$

$$(10d) \quad \log(\phi(t)) = -\frac{\sigma}{\epsilon} t + \operatorname{const.} \implies$$

$$(10e) \quad \phi(t) = \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t + \operatorname{const.}\right) \implies \\ = \gamma \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right) \implies$$

$$(11) \quad f(x, t) = \phi(t) \stackrel{(9b)}{=} f(x, 0) \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right)$$

Dies bedeutet aber wegen (6a):

$$(12) \quad \operatorname{div} E(x, t) = \operatorname{div} E(x, 0) \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right)$$

$$\stackrel{(2a)}{=} 0 * \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon} t\right) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

d.h. die Divergenzfreiheit des elektrischen Feldes $E(x, t)$ für $t = 0$ wird durch die MAXWELL-Gleichungen auch für $t > 0$ erhalten!

$\operatorname{div} E(x, t) = 0$ bedeutet: das elektrische Feld ist quellenfrei, d.h. in (x, t) sind keine Ladungen vorhanden. Analog zeigt man

$$(13) \quad \operatorname{div} H(x, t) = 0, \quad \forall t \geq 0$$

Zeitunabhängige (stationäre) MAXWELL-Gleichungen

Satz:

Für die Lösungen E und H der MAXWELL-Gleichungen gilt:

$$(1) \quad \Delta E - \mu \left(\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E}{\partial t} \right) = 0$$

$$(2) \quad \Delta H - \mu \left(\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0$$

Die Komponenten von E und H genügen also der *Telegraphengleichung* und im Falle $\sigma = 0$ der *Wellengleichung*.

Beweis:

$$(3a) \quad \Delta E(x, t) := (\Delta E_1(x, t), \Delta E_2(x, t), \Delta E_3(x, t))^t$$

$$(3b) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\Delta E + \operatorname{grad} \operatorname{div} E \quad (\text{Beweis : Übung})$$

Damit erhält man

$$(4) \quad \Delta E - \mu \frac{\partial \operatorname{rot} H}{\partial t} = 0$$

u.s.w. (Übung)

Stationäre Lösungen

erhält man mit dem **Separationsansatz**

$$(5a) \quad E(x, t) = e^{i * \omega * t} E^*(x)$$

$$(5b) \quad H(x, t) = e^{i * \omega * t} H^*(x)$$

Einsetzen in 6.8(1a),(1b) liefert die stationären MAXWELL-Gleichungen

$$(6a) \quad \operatorname{rot} E^* - i\omega\mu H^* = 0$$

$$(6b) \quad \operatorname{rot} H^* + (i\omega\epsilon - \sigma)E^* = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar

$$(7a) \quad \operatorname{div} E^* = 0 \quad \text{und}$$

$$(7b) \quad \operatorname{div} H^* = 0$$

(6.8)

6.1.7 NAVIER-STOKES-Gleichungen der Strömungsmechanik

Die (inkompressiblen) NAVIER-STOKES-Gleichungen für zähe Flüssigkeiten oder Gase ("fluids") haben die Form

| | |
|--|-------|
| NAVIER-STOKES Gleichungen: | |
| (1) $\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \langle v, \nabla v \rangle - \eta \Delta v = K - \nabla p$ $\forall x \in \Omega \subset \mathbf{R}^3, \forall t \in (0, T) :$ | |
| (2) $\operatorname{div} v(x, t) = 0$, (Inkompressibilitätsbedingung) $\forall x \in \Omega, \forall t \in (0, T) :$ | |
| (3) $v(x, t) = 0$, (Haftbedingung am Rand) $\forall x \in \partial\Omega, \forall t \in (0, T) :$ | |
| (4) $v(0, x) = v_0(x)$, (Anfangsgeschwindigkeit für t=0) $\forall x \in \Omega$ | |
| (5) $\int_{\Omega} p(x, t) dx = p_0(t)$, (mittlerer Druck) | (6.9) |
| Gegeben ist: (6a) Offenes Gebiet $\Omega \in \mathbf{R}^3$, $\partial\Omega$ "hinreichend glatt" (6b) ρ Dichte (konstant) (6c) η Viskositätskonstante (6d) $K = K(x)$ äußere Kraftdichte (6e) $p_0(t)$ mittlerer Druck | |
| Gesucht ist: (7a) $v = v(x, t) \in \mathbf{R}^3$, (Geschwindigkeitsfeld) (7b) $p = p(x, t) \in \mathbf{R}$, (Druck) | |

Eine fundamentale Rolle spielt hier die dimensionslose REYNOLDS-Zahl

(8) $Re := \frac{\rho * V * D}{\eta}$, wobei

(8a) $V := \int_{\Omega} ||v||_2 dx$, (mittlere Geschwindigkeit)

(8b) $D =$ Durchmesser von Ω

Im Experiment wird beobachtet, daß bei **großen REYNOLDS-Zahlen Turbulenz** eintritt.

Kapitel 7

Integrale von Funktionen mehrerer Variabler

7.1 Kurven im \mathbf{R}^n

- (1a) (Parameter)Intervall $I := [a, b] \subset \mathbf{R}$
 (1b) $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ stetig differenzierbar.
 Dann heißt c eine stetig differenzierbare **Kurve** im \mathbf{R}^n .
 (1c) $C := \{c(x) : x \in I\}$

Beispiel 1: Kreis

(2) $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$
 $c(t) := (r * \cos(t), r * \sin(t))^t$

Beispiel 2: Gerade durch v^0 mit Richtungsvektor v

(3) $c :]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbf{R}^n$
 $c(t) := v^0 + t * v$

Beispiel 3: Schraubenlinie

(4) $c :]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbf{R}^3$
 $r, c \in \mathbf{R} : r > 0, \gamma \neq 0$
 $c(t) := (r * \cos(t), r * \sin(t), \gamma * t)$

Beispiel 4: Zykloiden (Abrollen eines Rades auf einer Geraden:
 Beobachtungspunkt P)

(5) $c :]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbf{R}^2$
 $r = \text{Radius}, \phi = \text{Wälzwinkel des rollenden Rades}$
 $c_1(\phi) := r * (\phi - \mu \sin(\phi))$
 $c_2(\phi) := r * (\phi - \mu \cos(\phi))$
 Fall 1: $\mu = 1$: P liegt auf dem Rand des Rades
 Fall 2: $0 < \mu < 1$: P liegt im Inneren des Rades (Trochoide)
 Fall 3: $\mu > 1$: P liegt außerhalb des Rades (Trochoide)

Beispiel 5: NEILSche Parabel

(6) $c :]-\infty, \infty[\rightarrow \mathbf{R}^2$
 $c(t) := (t^2, t^3)$

Beispiel 6: Logarithmische Spirale

(7) $c(t) := (e^{\gamma t} * \cos(t), e^{\gamma t} * \sin(t))$, $\gamma > 0$

(7.1)

MAPLE - Kurvenplot:

```
> with(plots)
> spacecurve(.....)
```

| |
|---|
| Kurventangentialvektoren |
| <p>Falls $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve ist, nennt man</p> <p>(1) $\frac{dc(t)}{dt} = (c'_1(t), \dots, c'_n(t))^t$</p> <p>Tangentialvektor von c.</p> <p>Die Kurve c heißt regulär in t^*, falls</p> <p>(2) $\frac{dc(t^*)}{dt} \neq 0 \in \mathbf{R}^n$</p> <p>andernfalls nennt man c singulär in t^*</p> |
| <p>Beispiel: NEILSche Parabel</p> <p>$c(t) := (t^2, t^3)$ $c'(t) = (2t, 3t^2) = (0, 0)$, für $t = 0$</p> |

(7.2)

| |
|--|
| Schnittpunkte von Kurven |
| <p>Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbf{R}^n$ muß nicht notwendig injektiv sein. Gilt</p> <p>(1) $\exists t_1 \neq t_2 : c(t_1) = c(t_2) =: c_{12}$ $\iff c_{12}$ heißt Doppelpunkt der Kurve $c(t)$</p> <p>Im Doppelpunkt c_{12} kann sich die Kurve durchdringen und dann dort zwei verschiedene Tangentialvektoren besitzen.</p> |
| <p>Beispiel:</p> <p>(2) $c(t) := (t^2 - 1, t^3 - t)$</p> <p>(3) $c(-1) = c(1) = 0$, also 0 Doppelpunkt von c</p> <p>(4a) $c'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$</p> <p>(4b) $c'(-1) = (-2, 2)$, $c'(1) = (2, 2)$</p> <p>Damit besitzt c im Doppelpunkt zwei verschiedene Tangentenvektoren.</p> |
| <p>Der Schnittwinkel α zweier differenzierbarer Kurven c und d ist der Schnittwinkel der jeweiligen Tangentialvektoren, also</p> <p>(5a) $c(t_1) = d(t_2) \implies$</p> <p>(5b) $\cos(\alpha) = \frac{\langle c'(t_1), d'(t_2) \rangle}{\ c'(t_1)\ _2 \ d'(t_2)\ _2}$</p> |

(7.3)

Rektifizierbare Kurven**Satz: Jede stetig differenzierbare Kurve c ist rektifizierbar:**Für ihre Länge $L(c)$ gilt

$$L(c) = \int_a^b \left\| \frac{dc(t)}{dt} \right\|_2 dt \quad (\text{Bogenlänge})$$

(7.4)

Beispiel: Einheitskreisumfang

(2a) $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$

(2b) $c'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$, $\|c'(t)\|_2 = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$

(3a) $\int_0^{2\pi} \left\| \frac{dc(t)}{dt} \right\|_2 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$

7.2 Kurvenintegrale

| Kurvenintegral über Vektorfeld |
|--|
| <p>Definition: Gegeben sei ein differenzierbares Vektorfeld v mit (1a) $\mathbf{R}^n \supseteq T_n$ offen und (1b) $v(x) := (v_1(x), \dots, v_n(x)) : T_n \rightarrow \mathbf{R}^n$ und eine stetig differenzierbare Kurve c mit (2a) (Parameter)Intervall $I := [a, b] \in \mathbf{R}$ (2b) $c : I \rightarrow T_n$ stetig differenzierbar . (2c) $C := \{c(t) : t \in I\}$ (2d) $A := c(a)$, $B := c(b)$ Auf v definiert man das (skalare) Kurvenintegral des Vektorfeldes v über der Kurve c</p> $(3) \quad \int_C v \, dc := \int_a^b \langle v(c(t)), c'(t) \rangle \, dt$ |
| <p>Beispiel: Ist v ein Kraftfeld, so bedeutet das Integral (3) die Arbeit, die bei der Verschiebung eines Massepunktes auf der Kurve c von $c(a)$ nach $c(b)$ zu leisten ist.</p> |

(7.5)

| |
|--|
| Wegunabhängigkeit |
| <p>Betrachtet man zwei verschiedene Kurven (1a) $c^1 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ und $c^2 : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$, die zwei Punkte A, B miteinander verbinden, d.h. (1b) $A = c^1(a) = c^2(a)$, $B = c^1(b) = c^2(b)$ so werden die beiden Kurvenintegrale auf dem Vektorfeld v i.allg. verschiedene Werte haben. Ein stetig differenzierbares Vektorfeld v heißt konservativ in einem Gebiet Ω , falls die Kurvenintegrale über stetig differenzierbare Kurven nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen. (Äquivalent : Kurvenintegrale über <i>geschlossene</i> Kurven sind stets null) Ist v speziell ein konservatives Kraftfeld, dann ist die geleistete Arbeit unabhängig vom Weg. Kurvenintegrale über <i>geschlossene</i> Kurven c werden mit dem Symbol</p> <p>(2) $\oint_{c(a)}^{c(b)}$ bezeichnet.</p> |
| <p>Satz: Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld v über einem einfach zusammen- hängenden Gebiet Ω gilt: (3) v konservativ $\iff rot v = 0$ (Integrabilitätsbedingung)</p> |
| Potential |
| <p>Existiert zu einem Vektorfeld $v : \mathbf{R}^n \supset T_n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ eine skalare Funktion $U : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^1$ mit (4) $v(x) = -\nabla U(x)$ dann bezeichnet man U als ein Potential des Vektorfeldes v und das Feld v selbst als Gradientenfeld. Mit (5a) $U^*(t) := U(c(t))$ (5b) $\int_C v dc := \int_a^b \langle v(c(t)), c'(t) \rangle dt$ $= \int_a^b \langle -\nabla U(c(t)), c'(t) \rangle dt$ $= \int_a^b - \frac{dU^*(t)}{dt} dt = U(c(a)) - U(c(b))$</p> <p>folgt der</p> |
| <p>Satz: Jedes Gradientenfeld ist konservativ.</p> |

Umgekehrt besitzt jedes konservative Feld v ein Potential

$$U(x) := U(x^0) - \int_A^B v \, dc = U(x^0) - \int_a^b \langle v(c(t)), c'(t) \rangle \, dt$$

Dabei ist x^0 ein fester Punkt und das Integral darf über eine beliebige differenzierbare Kurve mit $c(a) = x^0$ und $c(b) = x$ erstreckt werden.

Beispiele für konservative Kraftfelder

$$x \in \mathbf{R}^3, v = K(x), E(x) \in \mathbf{R}^3$$

Schwerefeld der Erde:

$$K = -g (0, 0, 1)^t,$$

$$U(x) = g x_3$$

g =Erdbeschleunigung

Kraftfeld der Sonne (Position in $x=0$)

$$r := \|x\|_2$$

$$K(x) = -\gamma \frac{m_S * m_E}{r^2} \frac{x}{r}$$

$$U(x) = +\gamma \frac{m_S * m_E}{r}$$

m_S =Masse der Sonne

m_E =Masse der Erde

γ =Gravitationskonstante

Elektrische Feldstärke einer Ladung Q , die sich in $x=0$ befindet

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{x}{r}$$

$$U(x) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

ϵ_0 =Dielektrizitätskonstante

Im elektrischen Feld bezeichnet man das Potential auch als **Spannung**.

(7.7)

7.3 Flächen im \mathbf{R}^3

| | |
|---|--|
| Definition : | |
| (1a) | Rechteck $Q :=]a_1, b_1[\times]a_2, b_2[$ Parameterdarstellung der Fläche |
| (1b) | $f : \mathbf{R}^2 \supset Q \longrightarrow \mathbf{R}^3$ $f_k = f_k(\xi_1, \xi_2)$, $k = 1, 2, 3$ stetig partiell differenzierbar |
| (1c) | $F := \{f(\xi) : \xi \in Q\}$ |
| Tangentialvektoren | |
| (2a) | $t^1(\xi) = \left(\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_1}, \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_1} \right)$ |
| (2b) | $t^2(\xi) = \left(\frac{\partial f_1(\xi)}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f_2(\xi)}{\partial \xi_2}, \frac{\partial f_3(\xi)}{\partial \xi_2} \right)$ |
| Die Fläche F heißt regulär im Punkt $x = f(\xi) \in F \iff$ $(t^1(\xi) \neq 0, t^2(\xi) \neq 0)$ und t^1, t^2 linear unabhängig | |
| Wir setzen ab hier stets Regularität der Fläche voraus. | |
| (3a) | $n_F(\xi) := t^1(\xi) \times t^2(\xi)$ (Normalenvektor zur Fläche f) |
| (3b) | $n_F^*(\xi) := \frac{t^1(\xi) \times t^2(\xi)}{\ t^1(\xi) \times t^2(\xi)\ _2}$ (Normaleneinheitsvektor zur Fläche f) |

(7.8)

7.4 Integrale von Vektorfeldern über Flächen im \mathbf{R}^3

Definition: Integral eines Vektorfeldes v über die Fläche F :

$$\int_F v df := \int_Q \langle v(f(\xi_1, \xi_2)), n_F(\xi_1, \xi_2) \rangle d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.9)$$

$$= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \langle v(f(\xi_1, \xi_2)), n_F(\xi_1, \xi_2) \rangle d\xi_1 \right) d\xi_2$$

7.5 Volumenintegrale im \mathbf{R}^n

7.5.1 Integrale über Quader

| | |
|--|--------|
| <p>(1) $V := Q := \prod_{k=1}^n [a_k, b_k] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$</p> <p>(2) $f : Q \rightarrow \mathbf{R}$ stetig</p> | (7.10) |
| <p>(3) $\int_Q f(x) dx = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx_1 \right) \dots dx_{n-1} \right) dx_n$</p> | |
| <p>(4) Die Reihenfolge der eindimensionalen Integrationen kann beliebig vertauscht werden.</p> | |

7.5.2 Transformationssatz für Volumenintegrale

Verallgemeinerung der Substitutionsregel $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(y) dy = \int_a^b f(\phi(x)) \phi'(x) dx$
 der eindimensionalen Integration

| | |
|--|---|
| <p>(1) $\mathbf{R}^n \supset V, V^*$ offen</p> <p>(2) $\phi : V \rightarrow V^*$ sei ein C^1-Diffeomorphismus, d.h.</p> <p>(2a) ϕ bijektiv (injektiv und surjektiv) und</p> <p>(2b) ϕ und ϕ^{-1} stetig partiell differenzierbar.</p> | |
| <p>Dann gilt:</p> | |
| <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;"> <p>(3) $\int_{\phi(V)} f(y) dy = \int_V f(\phi(x)) * \left \det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right dx$</p> </td> </tr> </table> | <p>(3) $\int_{\phi(V)} f(y) dy = \int_V f(\phi(x)) * \left \det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right dx$</p> |
| <p>(3) $\int_{\phi(V)} f(y) dy = \int_V f(\phi(x)) * \left \det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right dx$</p> | |
| <p>Polarkoordinaten (n=2):</p> <p>$\phi : \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r * \cos(\alpha) \\ r * \sin(\alpha) \end{pmatrix}$, $\det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = r$ (Übung)</p> <p>$0 < r$, $0 < \alpha < \pi$</p> <p>Kugelkoordinaten (n=3):</p> <p>$\phi : \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r * \sin(\alpha) * \cos(\beta) \\ r * \sin(\alpha) * \sin(\beta) \\ r * \cos(\alpha) \end{pmatrix}$, $\det \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = r^2 * \sin(\alpha)$ (Übung)</p> <p>$0 < r$, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$</p> | |

(7.11)

Berechnung des GAUSSschen Fehlerintegrals durch Reduktion auf ein Doppelintegral

Gesucht ist

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) dx_1$$

$$\begin{aligned} A * A &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) dx_1 \right) * \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\right) dx_2 \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

mit

$$f(x_1, x_2) := \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right)$$

Wegen

$$\exp(-(-\xi)^2) = \exp(-(+\xi)^2)$$

gilt aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned} A * A &= 4 * \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} f(x) dx \end{aligned}$$

mit der konzentrischen Kreisscheibe

$$\Omega_n := \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0, x_2 > 0, \frac{1}{n} < \|x\|_2^2 < n\}$$

Nun führt man Polarkoordinaten ein.

Ω_n ist Bild des Rechtecks $R_n :=]\frac{1}{n}, n[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ unter der Abbildung

$$\phi : \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r * \cos(\alpha) \\ r * \sin(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \det\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = r$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} f(x) dx &= \int_{1/n}^n \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) * r \, dt dr \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_{1/n}^n \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) * r \, dr \right) dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \Big|_{1/n}^n \right) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \left(\exp\left(-\frac{1}{2}n^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{\pi}{2}(0 - 1) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$A^2 = 4 * \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} f(x) dx = 4 * \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$A := \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) dx_1 = \sqrt{2\pi}$$

7.6 Integralsätze

Die Integralsätze von GAUSS, STOKES und GREEN sind mehrdimensionale Varianten des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b \phi'(t) dt = \phi(b) - \phi(a)$$

Dies gilt auch für die in 7.6(5b) abgeleitete Beziehung im Gradientenfeld

$$\int_A^B v dc := \int_a^b \langle \nabla U(c(t)), c'(t) \rangle dt = U(c(a)) - U(c(b))$$

Sämtliche Integralsätze (auch für höhere Dimensionen) können mithilfe der Theorie der Differentialformen in die elegante, einheitliche Form

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

(allgemeiner STOKESscher Satz) gebracht werden, vgl. etwa FORSTER III, §21.

7.6.1 Der Satz von GAUSS im \mathbf{R}^n

- (1) $\mathbf{R}^n \supset V$ offen, beschränkt
- (2) $F := \partial V$ (geschlossene) reguläre Fläche
- (3) $n_F : \partial V \rightarrow \mathbf{R}^n$ äußeres Normalenfeld
- (4) ∂V hinreichend glatt
- (5) $v : V \rightarrow \mathbf{R}^n$ stetig differenzierbares Vektorfeld

Dann gilt:

Volumenintegral der Divergenz = Oberflächenintegral des Vektorfeldes:

$$(6) \quad \boxed{\int_V \operatorname{div} v(x) dx = \int_{F := \partial V} v df}$$

Falls (für $n=3$) die Fläche ∂V über einem Rechteck parametrisierbar ist, gilt

$$(7) \quad \int_V \operatorname{div} v(x) dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \langle v(f(\xi_1, \xi_2)), n_F(\xi_1, \xi_2) \rangle d\xi_1 d\xi_2$$

Bemerkung:

Der GAUSSsche Integralsatz gilt auch noch, wenn der Rand ∂V von V nicht glatt ist, sondern endlich viele Kanten, Ecken etc. besitzt.

Physikalische Interpretation :

Ergiebigkeit eines Volumens =

Integral des Flusses durch die (geschlossene) Oberfläche

7.6.2 Der Satz von STOKES für Flächen im \mathbf{R}^3

| | |
|---|--------|
| <p>(1) $\mathbf{R}^3 \supset V$ offen , beschränkt (2) Reguläre Fläche $F \subset V$ (3) $C := \partial F$ geschlossene,stückweise glatte Kurve (4) $v : V \rightarrow \mathbf{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld</p> | |
| <p>Dann gilt</p> $(5) \int_F \text{rot } v \, df = \int_{C := \partial F} v \, dc$ <p style="text-align: center;"><i>Oberflächenintegral Kurvenintegral</i></p> | (7.13) |
| <p>Physikalische Interpretation: Das Integral über die Wirbel $\text{rot } v$ einer Fläche $F =$ Zirkulation des Vektorfeldes um die (geschlossene) Flächenrandkurve $C = \partial F$</p> | |

7.6.3 GREENSche Formeln

| |
|---|
| <p>Voraussetzungen wie beim Integralsatz von GAUSS:</p> <p>(1) $\mathbf{R}^n \supset V$ offen, beschränkt (2) $F := \partial V$ (geschlossene) reguläre Fläche (3) $n_F : \partial V \rightarrow \mathbf{R}^n$ äußeres Normalenfeld (4) ∂V hinreichend glatt (5a) $P : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ stetig differenzierbares Skalarfeld (5a) $Q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^1$ stetig differenzierbares Skalarfeld</p> |
| <p>Dann gilt die erste GREENSche Formel:</p> $(6) \int_V P(x)\Delta Q(x)dx = \int_{F = \partial V} P(x)\nabla Q(x)df - \int_V \langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle dx$ <p style="text-align: center;"><i>Volumenintegral Oberflächenintegral Volumenintegral</i></p> |
| <p>Beweis: Anwendung der Produktregel und des Integralsatzes von GAUSS auf das Vektorfeld (7a) $v(x) := P(x)\nabla Q(x)$ (7b) $\text{div } v(x) = P(x)\Delta v(x) + \langle \nabla P(x), \nabla Q(x) \rangle$</p> |
| <p>Bemerkung: Die Formel (6) ist das n-dimensionale Analogon zur partiellen Integration im \mathbf{R}^1:</p> $(8) \int_a^b r(x)s'(x)dx = [r(x)s(x)]_a^b - \int_a^b r'(x)s(x)dx$ |

(7.14)

Kapitel 8

Variationsrechnung

8.1 Eindimensionale Probleme

8.1.1 Integrale mit Parametern

LEMMA 1

(1a) $\mathbf{R} \supset I_1$ kompakt

(1b) $\mathbf{R}^{n-1} \supset T_{n-1}$ kompakt

(2a) $f : I_1 \times T_{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$

(2b) f stetig auf $I_1 \times T_{n-1}$

(2c) $\exists \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ stetig auf T_{n-1} , $\forall k = 2, \dots, n$

(3a) $\phi : T_{n-1} \rightarrow \mathbf{R}$

(3b) $\phi(x_2, \dots, x_n) := \int_{I_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1$

(8.1)

Dann gilt:

(4a) ϕ ist stetig differenzierbar nach x_2, \dots, x_n und

(4b) $\frac{\partial \phi(x)}{\partial x_k} = \int_{I_1} \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} dx_1, \forall k = 2, \dots, n$

d.h. man kann "unter dem Integral differenzieren".

Beispiel:

(5) $T_n := K_n := \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\|_2 < r\}$

(6) $v : T_n \rightarrow \mathbf{R}$ stetig differenzierbares Vektorfeld

Gesucht ist ein "Potential" des Vektorfeldes v auf T_n , d.h. eine Funktion P mit

(7a) $P : T_n \rightarrow \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar

(7b) $v(x) = \nabla P(x)$, also

(7c) $v_j(x) = \frac{\partial P(x)}{\partial x_j}$, $\forall j = 1, \dots, n$

Notwendig für (7b) ist dann

(8) $\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_j \partial x_k} \stackrel{(7a)}{=} \frac{\partial^2 P(x)}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j}$, $\forall j, k = 1, \dots, n$

Aus (8) erhält man sofort

(9) $rot(v) = \nabla \times v = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = 0$

Wir setzen nun voraus:

(10a) $rot v = 0$

(10b) $P(x) := \sum_{k=1}^n \int_0^1 v_k(\alpha x) d\alpha x_k$

Behauptung:

(11) $\nabla P(x) = v$

Beweis:

Mit (10b) und der Produktregel folgt

$$\begin{aligned} (12a) \quad \frac{\partial P(x)}{\partial x_j} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 v_k(\alpha x) d\alpha \right) x_k + \sum_{k=1}^n \left(\int_0^1 v_k(\alpha x) d\alpha \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_j} \\ &\stackrel{(8.1)}{=} \left(\sum_{k=1}^n \int_0^1 \alpha \frac{\partial v_k(\alpha x)}{\partial x_j} d\alpha \right) x_k + \int_0^1 v_j(\alpha x) d\alpha \cdot 1 \\ &= \int_0^1 \left(v_j(\alpha x) + \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_j} x_k \right) d\alpha \end{aligned}$$

Ferner gilt für festes $x \in T_n$:

$$\begin{aligned} (12b) \quad \frac{d}{d\alpha}(\alpha v_j(\alpha x)) &= v_j(\alpha x) + \alpha \frac{d}{d\alpha} v_j(\alpha x) \\ &= v_j(\alpha x) + \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_j}{\partial x_k} x_k \\ &\stackrel{(10a)}{=} v_j(\alpha x) + \alpha \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_j} x_k \end{aligned}$$

Aus (12a) und (12b) folgt also

(12c) $\frac{\partial P}{\partial x_j} = \int_0^1 \frac{d}{d\alpha}(\alpha v_j(\alpha x)) d\alpha = \alpha v_j(\alpha x)|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = v_j(x)$ q.e.d

Ein stetig differenzierbares Vektorfeld v läßt sich also genau dann als Gradient eines Potentials $P(x)$ darstellen, wenn $rot v = 0$ ist.

| | |
|--|-------|
| LEMMA 2 (Variationslemma) | |
| (1) Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$, $a < b$ (2a) $C^0[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ stetig auf } [a, b]\}$ (2b) $C^2[a, b] := \{f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ zweimal stetig diff.bar auf } [a, b]\}$ (2c) $C_0^2[a, b] := \{g \in C^2[a, b] : g(a) = g(b) = 0\}$ (3) $f \in C^0[a, b]$ | (8.2) |
| Dann gilt: (4a) $(\int_a^b f(t)g(t)dt = 0, \forall g \in C_0^2[a, b]) \implies$ (4b) $f(t) = 0, \forall t \in [a, b]$ | |

Beweis:

Aus der Stetigkeit von f folgt die Äquivalenz von (4b) zu

$$(5) f(t) = 0, \forall t : a < t < b$$

Beweis von (5) durch Widerspruch: Annahme: o.E.:

$$(6) \exists x \in]a, b[: \epsilon := f(x) > 0$$

Wiederum wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$ mit

$$(7a) [x - \delta, x + \delta] \subset]a, b[\text{ mit}$$

$$(7b) f(t) \geq \frac{\epsilon}{2}, \forall t \in [x - \delta, x + \delta]$$

Nun konstruiert man eine (Glättungs-)Funktion g mit den Eigenschaften

$$(8a) g(t) \in C^2[a, b]$$

$$(8b) g(t) > 0, x - \delta < t < x + \delta$$

$$(8c) g(t) = 0, (t \leq x - \delta, t > x + \delta)$$

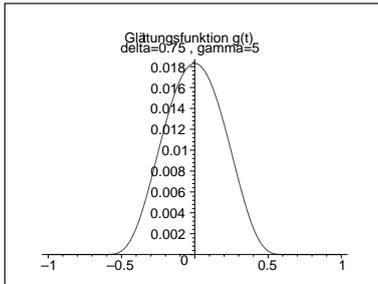
Die Funktion g hat also die in (2c) geforderten Eigenschaften, ist damit in (4a) "zur Konkurrenz zugelassen".

Funktionen der Form

$$(9a) \quad r = r(t) := \|x - t\|_2, \quad \gamma > 0$$

$$(9b) \quad g(t) = \begin{cases} \exp\left(1 - \gamma * \frac{\delta^2}{\delta^2 - r^2(t)}\right) & , \text{ falls } r < \delta \\ 0 & , \text{ falls } r \geq \delta \end{cases}$$

haben die gewünschten Eigenschaften (8) (auch sinngemäß im \mathbf{R}^n ! , weshalb die Beweise dieses Kapitels relativ einfach auf den \mathbf{R}^n verallgemeinert werden können)



Damit hat man

$$(10) \quad 0 = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)g(t)dt \geq \frac{\epsilon}{2} \int_{x-\delta}^{x+\delta} g(t)dt > 0$$

Dies ist ein **Widerspruch** , also ist die Annahme (6) falsch. q.e.d.

8.1.2 HAMILTONsches Prinzip

Zur Motivation der Variationsrechnung dient das folgende wichtige klassische Resultat aus der Physik:

Ein physikalisches System werde beschrieben durch n Funktionen der Zeit t :

$$(1) \quad f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \quad a \leq t \leq b$$

$$(2a) \quad T = T\left(t, \frac{df}{dt}\right) = \text{kinetische Energie}$$

$$(2b) \quad U = U(t, f) = \text{potentielle Energie}$$

$$(2c) \quad L\left(t, f, \frac{df}{dt}\right) = \text{LAGRANGE-Funktion}$$

Bei verlustfreien (mechanisch:reibungsfreien) Systemen gilt

$$(3) \quad L\left(t, f, \frac{df}{dt}\right) = T\left(t, \frac{df}{dt}\right) - U(t, f)$$

HAMILTONsches Prinzip: die Funktionen $f^*(t)$ des tatsächlich ablaufenden physikalischen Systems machen das "Wirkungsintegral"

$$(4a) \quad W(f) := \int_a^b L\left(t, f(t), \frac{df(t)}{dt}\right) dt$$

über alle Funktionen $f = (f_1, \dots, f_n)$ mit den Eigenschaften

$$(4b) \quad f_k : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$(4c) \quad f_k \in C^2[a, b]$$

$$(4d) \quad \text{z.B. Randbedingungen: } f(a) = f_a \in \mathbf{R}^n, \quad f(b) = f_b \in \mathbf{R}^n$$

zum Minimum, falls $f^* \in C^2[a, b]$.

Analog zur Tatsache, daß die Bedingung $f'(x^*) = 0$ notwendig für ein differenzierbares Extremum einer Funktion $f = f(t)$ von reellen Zahlen ist, kann man ein notwendiges Kriterium dafür herleiten, daß ein Funktional $F(f(t))$, also eine Abbildung einer Menge von Funktionen f in die reellen (oder komplexen) Zahlen, ein Extremum besitzt. Gesucht ist hier also **ein extremales** f^* (nicht ein extremaler Wert t^*) Dieses Kriterium liefern die berühmten EULERSchen Differentialgleichungen.

8.1.3 EULERSche Differentialgleichungen

| |
|--|
| Vorbereitende Definitionen : |
| <p>(1) $I := [a, b]$ kompaktes Intervall Die (später LAGRANGE-)Funktion (2a) $L : I \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ (2b) $(t, p, q) \mapsto L(t, p, q)$ sei zweimal stetig partiell differenzierbar (3a) $C^2[a, b] := \{f := [a, b] \rightarrow \mathbf{R}, f \text{ zweimal stetig differenzierbar}\}$ (3b) $C^2[a, b]$ ist ein (unendlichdimensionaler) Vektorraum Zu (physikalisch) vorgegebenen Konstanten (Randbedingungen) $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ definiert man die Menge der "Konkurrenzfunktionen" (4) $K := \{f \in C^2[a, b] : f(a) = c_1, f(b) = c_2\}$</p> |

(8.3)

| |
|---|
| EULERSche Differentialgleichungen : |
| Voraussetzungen wie in 8.3(1)-(4) |
| <p>Das zu minimierende Funktional F hat die Form (1a) $F : K \longrightarrow \mathbf{R}$ (1b) $F(f) := \int_a^b L(t, f(t), \frac{df(t)}{dt}) dt$</p> |
| <p>Dann gilt: Notwendig dafür, daß (2) $F(f^*) = \inf\{F(f) : f \in K\}$ ist, daß f^* die EULERSche Differentialgleichung</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p>(3a) $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q} L(t, f(t), f'(t)) - \frac{\partial}{\partial p} L(t, f(t), f'(t)) = 0$</p> </div> <p>erfüllt.</p> |
| <p>Ist f eine vektorwertige Funktion mit n Komponenten, so gilt unter entsprechenden Voraussetzungen:</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <p>(3b) $\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_k} L(t, f(t), f'(t)) - \frac{\partial}{\partial p_k} L(t, f(t), f'(t)) = 0, \forall k = 1, \dots, n$</p> </div> |

(8.4)

Beweis: Wir setzen (2) voraus; dann gilt

$$(4) \quad F(f^*) \leq F(f), \quad \forall f \in K$$

Sei nun

$$(5) \quad g \in C_0^2[a, b], \quad \text{also } g(a) = g(b) = 0$$

Nun kommt der entscheidende Variations-Ansatz:

$$(6a) \quad f^* + \epsilon * g \in K, \quad \forall \epsilon \in \mathbf{R}$$

$$(6b) \quad \Phi(\epsilon) := F(f^* + \epsilon * g)$$

Wegen (4) gilt dann

$$(6c) \quad \Phi(0) \leq \Phi(\epsilon), \quad \forall \epsilon \in \mathbf{R}$$

Die reelle differenzierbare Funktion Φ hat daher ein Minimum bei $\epsilon = 0$, also

$$(6d) \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = 0$$

Berechnung dieser Ableitung:

$$\begin{aligned} (7a) \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon}(\epsilon) &= \frac{d}{d\epsilon} F(f^* + \epsilon * g) \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \int_a^b L(t, f(t) + \epsilon g(t), f'(t) + \epsilon g'(t)) dt = (8.1 \text{ LEMMA } 1) \\ &= \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} L(t, f(t) + \epsilon g(t), f'(t) + \epsilon g'(t)) dt = (\text{Kettenregel}) \\ &= \int_a^b (L_t t \epsilon + L_p(\dots) p \epsilon + L_q(\dots) q \epsilon) dt \\ &= \int_a^b (0 + L_p(\dots) g(t) + L_q(\dots) g'(t)) dt \end{aligned}$$

Partielle Integration ergibt wegen $g(a) = g(b) = 0$:

$$(7b) \quad \int_a^b L_q(\dots) g'(t) dt = L_q(\dots) g(t) \Big|_a^b - \int_a^b g(t) \frac{d}{dt} L_q(\dots) dt = 0 - \int_a^b g(t) \frac{d}{dt} L_q(\dots) dt$$

Setzt man (7b) in (7a) ein, folgt mit (6d):

$$(7c) \quad 0 = \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial p}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q}(t, f(t), f'(t)) \right) g(t) dt$$

Dies gilt $\forall g \in C_0^2[a, b]$, also folgt aus dem Variationslemma (8.3) daß der erste Faktor des Integranden in (7c) verschwindet:

$$(7d) \quad \frac{dL}{dp}(t, f(t), f'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q}(t, f(t), f'(t)) = 0, \quad a < t < b$$

also die EULERSche Differentialgleichung.

(3b) wird analog bewiesen.

8.1.4 Bewegung eines Massepunktes im Potentialfeld

(1) $x(t) := (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ Ortsvektor des Massepunktes

(2) $v(t) := x'(t) := (x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t))$ Geschwindigkeit des Massepunktes

Kinetische Energie des Massepunktes mit der Masse m :

$$(3a) \quad T(x') = \frac{1}{2}m\|x'(t)\|_2^2 = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^3 x'_k(t)^2$$

Potential

$$(3b) \quad U : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$$

Gesamtenergie

$$(3c) \quad E = T + U$$

LAGRANGE-Funktion

$$(4a) \quad L(x, x') = T(x') - U(x) = \frac{m}{2}\|x'\|_2^2 - U(x)$$

mit

$$(4b) \quad \frac{\partial L}{\partial x_k} = -\frac{\partial U}{\partial x_k}$$

$$(4c) \quad \frac{\partial L}{\partial v_k} = m v_k$$

Notwendig für ein Minimum von L sind die EULER-Gleichungen

$$(5a) \quad \frac{dL}{dp_k}(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_k}(t, x(t), x'(t)) = 0, k = 1, \dots, n$$

$$(5b) \quad p = x, \quad q = v = x'$$

also

$$(6a) \quad m \frac{d}{dt} x'_k(t) + \frac{\partial U}{\partial x_k}(x(t)) = 0, \quad \forall k = 1, \dots, n \implies$$

$$(6b) \quad m x''_k(t) = -\frac{\partial U}{\partial x_k}(x(t)), \quad \forall k = 1, \dots, n$$

$$(6c) \quad \boxed{m x''(t) = -\nabla U(x)}$$

$$(7a) \quad E(t) = \frac{m}{2}\|x'\|_2^2 + U(x) \quad \text{Die Kettenregel liefert}$$

$$(7b) \quad \frac{dE(t)}{dt} = m \sum_{k=1}^n x'_k(t)x''_k(t) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial U}{\partial x_k}(x(t))x'_k(t)$$

$$= m \langle x''(t), x'(t) \rangle + \langle \nabla U(x(t)), x'(t) \rangle$$

$$= \langle mx''(t) - \nabla U(x(t)), x'(t) \rangle = 0$$

wegen der EULER-Gleichungen (6c).

Aus (7b) folgt die Konstanz der Gesamtenergie $E = E(t)$.

8.2 Mehrdimensionale Probleme

Sei

- (1a) $\mathbf{R}^2 \supset G$ offen
- (1b) $\mathbf{R}^2 \supset \partial G =: C =: \{c(t) : a \leq t \leq b\}$ stetig differenzierbare Kurve
- (1c) $\partial G =: \partial G_1 \cup \partial G_2$
- (2a) $k_1, k_2, r_1, r_2 \in C^0(G)$
- (2b) $\alpha, \gamma \in C^0(\partial G)$

Gegeben sei das Funktional

$$(3a) \quad F(f) := \int_G \left[\frac{1}{2}(k_1(x)f_{x_1}^2(x) + k_2(x)f_{x_2}^2(x)) - \frac{1}{2}r_1(x)f^2(x) + r_2(x)f(x) \right] dx \\ + \int_{\partial G} \left[\frac{1}{2}\alpha(x)f^2(x) - \gamma(x)f(x) \right] ds$$

Dabei ist das skalare Kurvenintegral in (3a) mit (1b) definiert als

- (3b) $\int_{\partial G} f(x) ds := \int_a^b f(c(t)) \|c'(t)\|_2 dt$
- (4a) $K := \{f \in C^0(\overline{G}) : f(x) = \phi(x) \text{ , } \forall x \in \partial G_1\}$, $\phi \in C^0(\partial G_1)$
- (4b) $K_0 := \{g \in C^0(\overline{G}) : g(x) = 0 \text{ , } \forall x \in \partial G_1\}$

Gesucht ist ein

- (5a) $f^* \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G}) \cap K$ mit
- (5b) $F(f^*) \leq F(f)$, $\forall f \in C^2(G) \cap C^0(\overline{G}) \cap K$

Nun kommt wiederum der entscheidende Variations-Ansatz:

- (5c) $f^* + \epsilon * g \in K$, $\forall \epsilon \in \mathbf{R}$, $\forall g \in K_0$
- (5d) $\Phi(\epsilon) := F(f^* + \epsilon * g)$

Wegen (5b) gilt dann

- (6a) $\Phi(0) \leq \Phi(\epsilon)$, $\forall \epsilon \in \mathbf{R}$

Die reelle differenzierbare Funktion Φ hat daher ein Minimum bei $\epsilon = 0$, also

$$(6b) \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = 0$$

$$(7) \quad \Phi(\epsilon) = \int_G \left[\frac{1}{2}(k_1 * ((f^* + \epsilon * g)_{x_1})^2 + k_2 * ((f^* + \epsilon * g)_{x_2})^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2}r_1 * (f^* + \epsilon * g)^2 + r_2 * (f^* + \epsilon * g) \right] dx \\ + \int_{\partial G} \left[\frac{1}{2}\alpha * (f^* + \epsilon * g)^2 - \gamma * (f^* + \epsilon * g) \right] ds$$

Differentiation nach ϵ :

$$(8a) \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon}(\epsilon) = \int_G \left[k_1 * (f^* + \epsilon * g)_{x_1} * g_{x_1} + k_2 * (f^* + \epsilon * g)_{x_2} * g_{x_2} \right. \\ \left. - r_1 * (f^* + \epsilon * g) * g + r_2 * g \right] dx \\ + \int_{\partial G} \left[\alpha * (f^* + \epsilon * g) * g - \gamma * g \right] ds$$

$$(8b) \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = \int_G \left[k_1 * (f^*)_{x_1} * g_{x_1} + k_2 * (f^*)_{x_2} * g_{x_2} \right. \\ \left. - r_1 * (f^*) * g + r_2 * g \right] dx + \int_{\partial G} \left[\alpha * (f^*) * g - \gamma * g \right] ds$$

Das erste Integral wird mit partieller Integration

- (9a) $\int_G u(x)v_{x_j}(x) dx = \int_G u(x)v(x) \cos(n_x, j) ds - \int_G u_{x_j}(x)v(x) dx$, $j = 1, 2$
- (9b) $(u = k_1 * f_{x_1}^*$, $v := g)$ bzw. $(u = k_2 * f_{x_2}^*$, $v := g)$ umgeformt, wobei
- (9c) $\cos(n_x, j)$ = Cosinus des Winkels zwischen der äußeren Normalen $n_x = n(x)$ zu ∂G im Punkt $x \in \partial G$ und der x_j -Achse

Damit geht (8b) über in

$$(11a) \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = \int_G \left[-\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1 * \frac{\partial f^*}{\partial x_1} \right) * g - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2 * \frac{\partial f^*}{\partial x_2} \right) * g \right. \\ \left. - r_1 * f^* * g + r_2 * g \right] dx \\ + \int_{\partial G} \left[k_1 * \frac{\partial f^*}{\partial x_1} * g * \cos(n_x, 1) + k_2 * \frac{\partial f^*}{\partial x_2} * g * \cos(n_x, 2) \right] ds \\ + \int_{\partial G} \left[\alpha * f^* * g - \gamma * g \right] ds$$

Ausklammern von g liefert

$$(11b) \quad \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = \int_G \left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1 * \frac{\partial f^*}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2 * \frac{\partial f^*}{\partial x_2} \right) \right) \right. \\ \left. - (r_1 * f^* - r_2) \right] * g dx \\ + \int_{\partial G} \left[\left(k_1 * \frac{\partial f^*}{\partial x_1} * \cos(n_x, 1) + k_2 * \frac{\partial f^*}{\partial x_2} * \cos(n_x, 2) \right) \right. \\ \left. + \alpha * f^* - \gamma \right] * g ds \\ = 0 \quad , \quad \forall g \in K_0$$

Nach dem Variationslemma 8.2 verschwinden alle Klammerausdrücke, die als Faktor die Funktion g haben, und man erhält als **notwendige** Bedingung für die Existenz einer Funktion f^* , die das Funktional (3a) minimiert,

| |
|---|
| EULERSche Differentialgleichungen |
| $(12a) \quad -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(x) * \frac{\partial f^*(x)}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(x) * \frac{\partial f^*(x)}{\partial x_2} \right) \\ - (r_1(x) * f^*(x) - r_2(x)) = 0 \quad , \quad \forall x \in G$ |
| <p>und notwendig für f^* sind auch die sog. natürlichen Randbedingungen</p> $(12b) \quad k_1(x) * \frac{\partial f^*(x)}{\partial x_1} * \cos(n_x, 1) + k_2(x) * \frac{\partial f^*(x)}{\partial x_2} * \cos(n_x, 2) \\ + \alpha(x) * f^*(x) - \gamma(x) = 0 \quad , \quad \forall x \in \partial G_2$ <p>Sie werden von einer minimierenden Funktion f^* automatisch erfüllt.</p> |
| <p>Die sog. wesentlichen Randbedingungen</p> $(12b) \quad f(x) = \phi(x) \quad , \quad \forall x \in \partial G_1$ <p>sind echte Einschränkungen an f^* und müssen bei numerischen Rechnungen (z.B. Methode der Finiten Elemente) speziell eingebaut werden.</p> |

(8.5)

8.2.1 Das lineare Elastizitätsproblem

8.2.2 Computersimulation: Die Methode der Finiten Elemente

Kapitel 9

Beispiele

9.1 MAPLE

MAPLE-Funktionsprozedur

```
> f:=(x,y) -> (x*x+y*y);
```

MAPLE - 3d-Plot:

```
> plot3d(f(x,y),x=-1,..1,y=-1..1,grid=[41,41],axes=boxed,style=hidden);
```

MAPLE - Höhenlinien:

```
> plot3d(f(x,y),x=-1,..1,y=-1..1,grid=[41,41],axes=boxed,style=contour,  
contours=20,orientation=[180,0]);
```

MAPLE - Gradient:

```
> with(linalg):  
> with(plots):  
> G:=grad(x*x+y*y,[x,y]);  
> fieldplot(G,x=-4..4,y=-4..4);
```

(9.1)

9.2 Stetigkeit

Die Funktion

$$(1a) \quad f(x) := \frac{x_1 * x_2}{x_1^2 + x_2^2} \text{ für } x \neq (0, 0)$$

$$(1b) \quad f((0, 0)) := 0$$

ist in $x = (0, 0)$ nicht stetig.

Beweis:

Setzt man die Folge

$$(2) \quad x^n := \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \longrightarrow (0, 0)$$

in (1a) ein, so erhält man

$$(3) \quad f(x^n) = \frac{n^{-2}}{2 * n^{-2}} = \frac{1}{2}$$

und damit

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x^n) = \frac{1}{2} \neq 0 = f((0, 0))$$

also ist f in $x = (0, 0)$ nicht stetig.

(9.2)

Gilt für eine Funktion

$$f : \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}^1 \quad |f(x) - f(0, 0)| \leq \|x\|$$

so ist f in $(0, 0)$ stetig

9.3 Gradient, Mittelwertsatz, TAYLOR-Formel

9.3.1 Fehlerrechnung

Eine physikalische Größe y hänge nach einem bekannten Gesetz von n Größen x_1, \dots, x_n ab:

$$(1) \quad y = f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Zur Berechnung von y muß also der Meßwert-Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)$ gemessen werden, was nur mit begrenzter Genauigkeit möglich ist. Wir definieren:

$$(2a) \quad \widehat{x} = (\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) \text{ gemessene Werte.}$$

$$(2b) \quad \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \text{ wahre Werte.}$$

Aus den Meßwerten errechnet sich für y der Näherungswert

$$(3) \quad \widehat{y} = f(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$$

während der wahre y -Wert durch

$$(4) \quad \bar{y} = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

gegeben ist. Die Differenz

$$(5) \quad |\widehat{y} - \bar{y}| \text{ heißt } \textit{absoluter Fehler} \text{ von } y.$$

Gesucht ist eine Abschätzung von $|\widehat{y} - \bar{y}|$, wenn man weiß, wie groß die Beträge der Meßfehler $|\widehat{x}_k - \bar{x}_k|$, $k=1, \dots, n$ höchstens sind.

Nach dem Mittelwertsatz erhält man (mit einem $\delta \in (0, 1)$):

$$(6) \quad f(\bar{x}) - f(\widehat{x}) = \langle \text{grad}(f(\widehat{x} + \delta * (\bar{x} - \widehat{x}))), (\bar{x} - \widehat{x}) \rangle \\ = \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k - \widehat{x}_k) f_{x_k}(\widehat{x} + \delta * (\bar{x} - \widehat{x}))$$

In dieser Formel (6) sind zwar die wahren Werte \bar{x} unbekannt, aus dem jeweils angewandten Meßverfahren ergibt sich aber in der Regel auch eine Aussage über die *Meßgenauigkeit*, d.h.

$$(7) \quad \exists \epsilon_k \in \mathbf{R}, \quad k = 1, \dots, n : \quad |\bar{x}_k - \widehat{x}_k| < \epsilon_k, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Außerdem ist es häufig möglich, eine obere Schranke M für $|f_{x_k}|$ zu finden:

$$(8) \quad |f_{x_k}(x)| \leq M_k, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \text{ mit } |x_k - \widehat{x}_k| \leq \epsilon_k, \quad k = 1, \dots, n$$

Wegen $0 < \delta < 1$ gilt diese Schranke auch in Gleichung (6), da $\widehat{x} + \delta * (\bar{x} - \widehat{x})$ für $0 < \delta < 1$ die Verbindungsgerade zwischen \bar{x} und \widehat{x} durchläuft.

Damit erhält man die Meßfehlerabschätzung

$$(9) \quad |\widehat{y} - \bar{y}| \leq \sum_{k=1}^n \epsilon_k * M_k$$

Beispiel: Es ist die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Massepunktes zu ermitteln. Dazu mißt man die Länge s einer Strecke und die Zeit t , die der Massepunkt braucht, um diese Strecke zurückzulegen. Seine Geschwindigkeit ist dann

$$(10) \quad v = \frac{s}{t} =: f(s, t)$$

Die wirklich gemessenen Werte seien

$$(11a) \quad \widehat{s} = 27.1 \overset{+}{-} \Delta s, \quad \text{Meßgenauigkeit } \Delta s = 0.03$$

$$(11b) \quad \widehat{t} := 11.3 \overset{+}{-} \Delta t, \quad \text{Meßgenauigkeit } \Delta t = 0.05$$

Man berechne (mit dem Mittelwertsatz) Schranken v_1 und v_2 für die wahre Geschwindigkeit \bar{v} :

$$(12) \quad v_1 \leq \bar{v} \leq v_2$$

Wir haben also

$$(13) \quad \epsilon_1 = 0.03, \quad \epsilon_2 = 0.05$$

Lösung dieser Aufgabe: siehe Übung, Blatt 3.

9.3.2 Ausgleichsrechnung

Bei vielen wissenschaftlichen Versuchen bzw. Beobachtungen sind die Werte wesentlicher Konstanten

$$(1) \quad x_1, \dots, x_n$$

nicht direkt meßbar bzw. beobachtbar und man ist auf **indirekte** Methoden zur (approximativen) Bestimmung dieser Konstanten angewiesen.

Ist z.B. ein Zusammenhang der Form

$$(2) \quad y = f(\alpha, x_1, \dots, x_n)$$

bekannt, wobei

(3a) y = "einfach" zu messende bzw. beobachtbare Größe

(3b) α = Versuchs- bzw. Beobachtungsbedingung

so führt man den Versuch bzw. die Beobachtung m -mal aus und erhält die Daten

$$(4) \quad y_k = f(\alpha_k, x_1, \dots, x_n) =: f_k(x_1, \dots, x_n), \forall k = 1, \dots, m$$

Nun muß i. allg. mindestens

$$(5) \quad m \gg n$$

gelten, damit x aus (4) in einer noch zu präzisierenden Weise eindeutig bestimmt werden kann. Wegen (5) ist aber (4) ein **überbestimmtes** Gleichungssystem, das i.allg. keine Lösung besitzt, da die Meß- bzw. Beobachtungswerte y_k meist ungenau sind. Man muß also einen "verallgemeinerten" Lösungsbegriff entwickeln. Wenn (4) schon nicht exakt lösbar ist, macht es Sinn, zu versuchen, "möglichst gute" Lösungen von (4) zu ermitteln:

Ansatz 1 *EUKLIDische Norm*²

$$(6a) \quad \sum_{k=1}^m (y_k - f_k(x_1, \dots, x_n))^2 \longrightarrow Min$$

Ansatz 2 *Maximum-Norm*

$$(6b) \quad \sum_{k=1}^m |y_k - f_k(x_1, \dots, x_n)| \longrightarrow Min$$

Für beide Ansätze wurden Lösungsverfahren entwickelt. Beim Ansatz 2 liegt ein sogenanntes "diskretes TSCHEBYSCHEFF-Problem vor, dessen Lösung relativ kompliziert ist. Wir werden uns hier auf die EUKLIDische Norm beschränken (**Methode der kleinsten Quadrate nach GAUSS**), da diese Norm differenzierbar ist und damit einen einfachen Lösungsalgorithmus gestattet. Darüberhinaus hat dieser Ansatz 1 auch statistische Relevanz.

Falls die Funktionen $f_1(x), \dots, f_m(x)$ stetig partiell differenzierbar sind, liefern die sog. "**Normalgleichungen**"

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{k=1}^m (y_k - f_k(x_1, \dots, x_n))^2 = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

eine notwendige Bedingung für ein Minimum.

Ein wichtiger Spezialfall ist das sogenannte **lineare Ausgleichsproblem**.
Hier sind die Funktionen f_k linear, d.h.

$$(8a) \quad \exists A \in \mathbf{R}^{m,n} \quad (n \text{ Spalten, } m \text{ Zeilen } m \geq n)$$

$$(8b) \quad \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} = A \cdot x.$$

In diesem Fall hat das Minimierungsproblem (6) die Form

$$(9) \quad \|Ax - y\|_2^2 \longrightarrow \text{Min}$$

und die Normalgleichungen (7) lauten (vgl. Übung)

$$(10) \quad \nabla(Ax - y)^t(Ax - y) = 2A^tAx - 2A^ty = 0$$

Falls $\text{Rang}(A)=n$ ist (Maximalrang), dann ist A^tA regulär, die Normalgleichungen (10) damit eindeutig lösbar, das Minimum in (6) existiert und ist ebenfalls eindeutig (vgl. Übung).

Statistische Interpretation der Matrix $(A^tA)^{-1}$: Annahme:

(11a) y_1, \dots, y_m unabhängige zufällige Variable mit

(11b) Erwartungswerte $E(y_k) = \mu_k, \forall k = 1, \dots, m$

(11c) Kovarianzen $c_{jk} := E((y_j - \mu_j)(y_k - \mu_k)) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
d.h. y_j und y_k unkorreliert für $j \neq k$

Mit dem Erwartungswertvektor

$$(12a) \quad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^t$$

wird (11b) zu

$$(12b) \quad E(y) = \mu$$

und (11c) zu

$$(12c) \quad \text{Kovarianzmatrix von } y : C = C(y) = \sigma^2 * I \in \mathbf{R}^{m,m}$$

Falls $\text{Rang } A=n$ (Maximalrang) ist, erhält man die Lösung

$$(13) \quad x = (A^tA)^{-1}A^ty$$

x ist ebenfalls ein zufälliger Vektor mit dem Erwartungswert

$$(14) \quad \begin{aligned} E(x) &= E((A^tA)^{-1}A^ty) = (\text{Linearität des Erwartungswertes}) \\ &= (A^tA)^{-1}A^tE(y) \\ &= (A^tA)^{-1}A^t\mu \end{aligned}$$

und der Kovarianzmatrix

(Erwartungswert eines dyadischen Produkts : Spalte \times Zeile=Matrix)

$$(15) \quad \begin{aligned} C(x) &= E[(x - E(x))(x - E(x))^t] \\ &= E[(A^tA)^{-1}A^t(y - \mu)(y - \mu)^tA(A^tA)^{-1}] \\ &= (A^tA)^{-1}A^t E[(y - \mu)(y - \mu)^t] A(A^tA)^{-1} \\ &= \sigma^2(A^tA)^{-1} \text{ wegen (12c).} \end{aligned}$$

9.4 2-dimensionale Variationsaufgaben: Methode der Finiten Elemente

Zur numerischen Approximation von Lösungen von Variationsproblemen, deren EULER-Gleichungen partielle Differentialgleichungen mit zwei Raumvariablen über allgemeinen Gebieten $G_2 \subset \mathbf{R}^2$ sind, kann man folgendermaßen vorgehen:

- **(1) Netzgenerierung**

Zerlegung des Grundgebietes G_2 in Elemente $E_j : G_2 = \bigcup_{j=1}^{n_E} E_j$

mit Knoten x^k , $x^k = 1, \dots, k_E$ (gegen den Uhrzeigersinn numeriert) ("Lineare") Dreiecke $E_j = T_j = \text{Con}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$:

Die $k_T = 3$ Knoten sind die Eckpunkte

Einheitsdreieck $T^0 := \text{Con}((0, 0), (1, 0), (0, 1)) =: \text{Con}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)})$

("Lineare") Vierecke $E_j = Q_j := \text{Con}(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)})$

Die $k_Q = 4$ Knoten sind die Eckpunkte.

Einheitsviereck $Q^0 := \text{Con}((0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1))$

Bei quadratischen Elementen kommen noch Seitenmittelpunkte dazu.

- **(2) Formfunktionen:**

Für jedes Einheitselement $E^0 \in \{T^0, Q^0, \dots\}$ sind Formfunktionen (shape functions) $s^{(j)} = s^{(j)}(\xi)$ mit $s^{(j)}(\xi^{(k)}) = \delta_{j,k}$ zu konstruieren

- **(3) Lineare Abbildung Einheitselement $E_j^0 \rightarrow E_j$:**

- **(4) Interpolation**

Interpolation der unbekanntenen Lösung $u = u^E$ auf dem Einheitselement

$x^E := (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(k_E)})$ Knoten der Einheitselemente

$u^E := (u(\xi^{(1)}), u(\xi^{(2)}), \dots, u(\xi^{(k_E)})) =: (u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(k_E)})$

Unbekannte Lösung u auf den Elementen E

$u^*(x) := \sum_{j=1}^{k_E} u^{(j)} * s^{(j)}(x)$ Interpolation der Lösung u auf E .

Nach Konstruktion der Formfunktionen $s^{(j)}$ gilt

$u^*(\xi^{(j)}) = u^{(j)}$, $\forall j = 1, \dots, k_E$ (LAGRANGE-Interpolation)

- **(5) Quadratur**

Integration des Variationsfunktionals (einfaches Beispiel)

$$\begin{aligned} J(u) &:= \int_{G_2} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + c * u^2) dx_1 dx_2 \\ &= \sum_{k=1}^{n_E} \int_{E_k} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + c * u^2) dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Approximation des Integrals

$$J_k(u) := \int_{E_k} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + c * u^2) dx_1 dx_2$$

durch

$$J_k(u^*) := \int_{E_k} (u_{x_1}^{*2} + u_{x_2}^{*2} + c * u^{*2}) dx_1 dx_2$$

9.4.1 Lineare Dreieckselemente

Gegeben sei ein allgemeines Dreieck

$$(1) \quad T := \text{Con}(\{P_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), P_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}), P_3 = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)})\})$$

wobei die Punkte P_1, P_2, P_3 im Gegenuhrzeigersinn numeriert seien.

T sei nicht entartet, d.h. Fläche $|T| \neq 0$

Das Einheitsdreieck

$$(2) \quad T^0 = \text{Con}(\{(0,0), (1,0), (0,1)\}) = \{\xi \in \mathbf{R}^2 : \xi_1, \xi_2 \geq 0, \xi_1 + \xi_2 \leq 1\}$$

Koordinatensystem : $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

kann mit der linearen Transformation

$$(3a) \quad L : T^0 \longrightarrow T :$$

$$(3b) \quad x_1 := x_1^{(1)} + (x_1^{(2)} - x_1^{(1)}) * \xi_1 + (x_1^{(3)} - x_1^{(1)}) * \xi_2$$

$$(3c) \quad x_2 := x_2^{(1)} + (x_2^{(2)} - x_2^{(1)}) * \xi_1 + (x_2^{(3)} - x_2^{(1)}) * \xi_2$$

$$(3d) \quad \xi_1, \xi_2 \geq 0, \xi_1 + \xi_2 \leq 1$$

also

$$(3e) \quad x = L\xi = A_L\xi + x^{(1)}$$

eindeutig auf das allgemeine (nichtentartete) Dreieck T

(Koordinatensystem $x = (x_1, x_2)$) in (1) abgebildet werden, denn

$$(4) \quad \det\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right) \neq 0 \text{ (Übung)}$$

Mit den sog. **Formfunktionen** (shape functions)

$$(5a) \quad s^{(1)}(\xi_1, \xi_2) := 1 - \xi_1 - \xi_2$$

$$(5b) \quad s^{(2)}(\xi_1, \xi_2) := \xi_1$$

$$(5c) \quad s^{(3)}(\xi_1, \xi_2) := \xi_2$$

und den Vektoren

$$(6a) \quad X_1 := (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, x_1^{(3)}) \in \mathbf{R}^{3=k_E}$$

$$(6b) \quad X_2 := (x_2^{(1)}, x_2^{(2)}, x_2^{(3)}) \in \mathbf{R}^3$$

$$(7) \quad S(\xi) := (s^{(1)}(\xi), s^{(2)}(\xi), s^{(3)}(\xi)) \in \mathbf{R}^3$$

geht die lineare Transformation (3) über in

$$(8a) \quad x_1 := x_1^{(1)} * s^{(1)}(\xi) + x_1^{(2)} * s^{(2)}(\xi) + x_1^{(3)} * s^{(3)}(\xi) = \langle X_1, S(\xi) \rangle$$

$$(8b) \quad x_2 := x_2^{(1)} * s^{(1)}(\xi) + x_2^{(2)} * s^{(2)}(\xi) + x_2^{(3)} * s^{(3)}(\xi) = \langle X_2, S(\xi) \rangle$$

9.4.2 Lineare Viereckselemente

Das Einheitsquadrat

$$(9a) \quad Q^0 = \text{Con}(\{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)\})$$

$$(9b) \quad k_E = k_Q = 4 \text{ (Zahl der Knoten)}$$

mit den Formfunktionen:

$$(10a) \quad s^{(1)}(\xi_1, \xi_2) := (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

$$(10b) \quad s^{(2)}(\xi_1, \xi_2) := \xi_1 * (1 - \xi_2)$$

$$(10c) \quad s^{(3)}(\xi_1, \xi_2) := \xi_1 \xi_2$$

$$(10d) \quad s^{(4)}(\xi_1, \xi_2) := (1 - \xi_1)\xi_2$$

kann analog zu (8) mit den Formeln

$$(11a) \quad x_1 = \langle X_1, S(\xi) \rangle$$

$$(11b) \quad x_2 = \langle X_2, S(\xi) \rangle$$

bijektiv auf jedes nichtentartete Viereck

$$(12) \quad Q := \text{Con}(\{P_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) , k = 1, 2, 3, 4\})$$

abgebildet werden, wobei die Punkte P_k wiederum gegen den Uhrzeigersinn zu numerieren sind.

9.4.3 Allgemeiner algorithmischer Ansatz für die Methode der Finiten Elemente in zwei Raumdimensionen

Geometrische Transformation:

$$(13a) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = L(\xi) = \begin{pmatrix} \langle X_1, S(\xi) \rangle \\ \langle X_2, S(\xi) \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1^T S(\xi) \\ X_2^T S(\xi) \end{pmatrix}$$

$$X_k \in \mathbf{R}^{kE}, \quad k = 1, 2$$

$$(13b) \quad \det\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = \det\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right) = \begin{vmatrix} X_1^T S_{\xi_1} & X_1^T S_{\xi_2} \\ X_2^T S_{\xi_1} & X_2^T S_{\xi_2} \end{vmatrix} =: J$$

$$(13c) \quad \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^{-1}$$

$$(13d) \quad \det\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \left(\det\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)\right)^{-1} = \frac{1}{J}$$

Die inverse Matrix in (13c) kann man mit (13a),(13d) berechnen:

$$(13e) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} * \frac{1}{J} = X_2^T \frac{\partial S}{\partial \xi_2} * \frac{1}{J} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} * \frac{1}{J} = -X_1^T \frac{\partial S}{\partial \xi_2} * \frac{1}{J} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= -\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} * \frac{1}{J} = -X_2^T \frac{\partial S}{\partial \xi_1} * \frac{1}{J} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} * \frac{1}{J} = X_1^T \frac{\partial S}{\partial \xi_1} * \frac{1}{J} \end{aligned}$$

Interpolation:

Mit den obigen Formfunktionen kann man nun auch (linear) interpolieren:

Im Einheitsdreieck gilt (mit den entsprechenden Formfunktionen):

$$(14a) \quad u^*(\xi) := \langle (u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}) , S(\xi) \rangle = \langle u^E, S(\xi) \rangle, \quad S = S_{T^0}$$

Dann gilt (Übung)

$$(14b) \quad u^*((0,0)) := u^{(1)}, \quad u^*((1,0)) := u^{(2)}, \quad u^*((0,1)) := u^{(3)}$$

und im Einheitsquadrat hat man analog

$$(15a) \quad u^*(\xi) := \langle u^E, S(\xi) \rangle, \quad S = S_{Q^0}$$

mit (siehe Übung)

$$(15b) \quad \begin{aligned} u^*((0,0)) &:= u^{(1)}, \quad u^*((1,0)) := u^{(2)}, \\ u^*((1,1)) &:= u^{(3)}, \quad u^*((0,1)) := u^{(4)} \end{aligned}$$

Variationsintegrale

Wichtigstes Hilfsmittel wird dabei der Transformationssatz für Gebietsintegrale sein; damit genügt es, Integrationsformeln über die "Einheitselemente" abzuleiten.

Wir wollen nun exemplarisch das Variationsintegral

$$(16) \quad J_k^*(u^*) := \int_{E_k} (u_{x_1}^{*2} + u_{x_2}^{*2} + c * u^{*2}) dx_1 dx_2 =: \int_{E_k} f(x) dx_1 dx_2$$

berechnen (Dabei ist u^* die Interpolationsfunktion)

Transformationssatz für Gebietsintegrale:

$$(17) \quad \int_{E_k = L(E_k^0)} f(x) dx = \int_{E_k^0} f(L(\xi)) * \det\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right) d\xi$$

Mit der Kettenregel erhält man für $u^*(x) = u^*(\xi(x))$

$$(18a) \quad u_{x_1}^* = u_{\xi_1}^* * \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + u_{\xi_2}^* * \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = (14a), (15a)$$

$$= \langle u^E, S_{\xi_1} \rangle * \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \langle u^E, S_{\xi_2} \rangle * \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}$$

$$= \langle u^E, S_{\xi_1} * \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + S_{\xi_2} * \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \rangle =: \langle u^E, h^{(1)} \rangle$$

$$(18b) \quad u_{x_2}^* = u_{\xi_1}^* * \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + u_{\xi_2}^* * \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}$$

$$= \langle u^E, S_{\xi_1} \rangle * \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \langle u^E, S_{\xi_2} \rangle * \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}$$

$$= \langle u^E, S_{\xi_1} * \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + S_{\xi_2} * \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \rangle =: \langle u^E, h^{(2)} \rangle$$

$$(18c) \quad u^* = \langle u^E, S(\xi_1, \xi_2) \rangle =: \langle u^E, h^{(0)} \rangle$$

Die im Integral (16) auftretenden Quadrate sind also alle von der Form

$$(19a) \quad \langle u^E, h \rangle^2 = ((u^E)^T h)^2 = ((u^E)^T h)((u^E)^T h) = ((u^E)^T h)((u^E)^T h)^T$$

$$= ((u^E)^T h)(h^T (u^E)) = (u^E)^T (h h^T) u^E$$

mit $u^E, h \in \mathbf{R}^{k_E}$, $k_E =$ Zahl der Knoten im Element

Hier ist $h h^T \in \mathbf{R}^{k_E, k_E}$ das Produkt eines Spaltenvektors mit einem Zeilenvektor, (dyadisches Produkt), eine **Matrix**, die man auch als

Dyade bezeichnet. Z.B. für $k_E = 3$ gilt

$$(19b) \quad h h^T = \begin{pmatrix} h_1 * h_1, & h_1 * h_2, & h_1 * h_3 \\ h_2 * h_1, & h_2 * h_2, & h_2 * h_3 \\ h_3 * h_1, & h_3 * h_2, & h_3 * h_3 \end{pmatrix}$$

Dyaden sind Matrizen vom Maximalrang 1, da sich Zeilen (Spalten) nur um einen konstanten Faktor unterscheiden.

Damit können wir das Variationsintegral (16) mit (18a-c) schreiben als

$$(20) \quad J_k^*(u^*) := \int_{E_k^0} (\langle u^E, h^{(1)} \rangle^2 + \langle u^E, h^{(2)} \rangle^2 + \langle u^E, h^{(0)} \rangle^2) dx_1 dx_2 \stackrel{(19a)}{=} \\ = \int_{E_k^0} [(u^E)^T (h^{(1)} h^{(1)T}) u^E + (u^E)^T (h^{(2)} h^{(2)T}) u^E + c * (u^E)^T (h^{(0)} h^{(0)T}) u^E] dx_1 dx_2 \\ = \int_{E_k^0} (u^E)^T [(h^{(1)} h^{(1)T}) + (h^{(2)} h^{(2)T}) + c * (h^{(0)} h^{(0)T})] u^E dx_1 dx_2 \\ = (u^E)^T \left[\int_{E_k^0} (h^{(1)} h^{(1)T}) + (h^{(2)} h^{(2)T}) + c * (h^{(0)} h^{(0)T}) dx_1 dx_2 \right] u^E \\ = (u^E)^T \left[M_S + c * M_M \right] u^E$$

Hier bezeichnet man (mechanische Interpretation) M_S als **Steifigkeitsmatrix** (stiffness matrix) und M_M als **Massenelementmatrix** (mass matrix).

Bei der Berechnung der inversen Matrix $(\frac{\partial \xi}{\partial x})$ in (13c),(13e) tritt die Funktionaldeterminante $J = \det(\frac{\partial x}{\partial \xi})$ im **Nenner** auf. Aus (18a),(18b) entnimmt man, daß J auch im Nenner der Hilfsvektoren $h^{(1)}, h^{(2)}$ erscheint. Diese werden nun aber bei der Bildung der dyadischen Produkte $h^T h$ "quadriert", womit also J im Integranden der Steifigkeitsmatrix M_S quadratisch im Nenner steht. Aus dem Transformationssatz für Gebietsintegrale kommt noch ein Faktor J im Zähler hinzu, so daß letztendlich ein Gebietsintegral über eine gebrochen rationale Funktion $\frac{f(\xi)}{J(\xi)}$ entsteht, wenn die Funktionaldeterminante $J = J(\xi)$ nicht konstant ist. (Bei linearen Dreieckselementen ist $J(\xi) = const.$; hier kann man mit den Formeln von Übungsblatt 7 analytisch integrieren=.

Im allgemeinen Fall (z.B. krummlinige Elemente) ist man jedoch auf numerische Integrationsformeln (numerische Quadratur) angewiesen; diese Formeln haben die Gestalt

| Näherungsquadratur für Volumenintegrale | |
|---|-------|
| $(1a) \int_{E^0} f(\xi) d\xi = \sum_{q=1}^{q_E} w_q f(\xi^{(q)}) + \text{Fehlerterm}$ | (9.3) |
| wobei | |
| (1b) $\xi^{(q)} =$: Integrationsstützstellenvektor | |
| (1c) $w_q =$: Integrationsgewichte | |
| Speziell für die Funktion $f(\xi) = 1, \forall \xi \in E^0$ erhält man | |
| $(1d) \sum_{q=1}^{q_E} w_q = E^0 := \text{Volumen}(E^0)$ | |

Quadratur über das Einheitsdreieck T^0

- $q_E := 7$
- $r_1 := 6 + \sqrt{15}/21 = 0.470142064$
- $r_2 := 6 - \sqrt{15}/21 = 0.101286507$
- $r_3 := 9 + 2\sqrt{15}/21 = 0.797426985$
- $r_4 := 9 - 2\sqrt{15}/21 = 0.059715872$
- $r_5 := (155 + \sqrt{15})/2400 = 0.0661970764$
- $r_6 := (155 - \sqrt{15})/2400 = 0.0629695903$

| q | $\xi_1^{(q)}$ | $\xi_2^{(q)}$ | w_q |
|-----|---------------|---------------|--------|
| 1 | 1/3 | 1/3 | 0.1125 |
| 2 | r_1 | r_1 | r_5 |
| 3 | r_4 | r_1 | r_5 |
| 4 | r_1 | r_4 | r_5 |
| 5 | r_2 | r_2 | r_6 |
| 6 | r_3 | r_2 | r_6 |
| 7 | r_2 | r_3 | r_6 |

Hier gilt nach (10.3)(1d): $\sum_{q=1}^{q_E} w_q = \frac{1}{2}$ = Fläche des Einheitsdreiecks.

Diese Formel ist exakt bis zum Polynomgrad 5.

$P(\xi) := \xi_1^r * \xi_2^s : r + s \leq 5??$

Quadratur über das Einheitsquadrat

Eindimensionale GAUSS-Quadratur

$$\int_{-1}^1 f(\xi_1) d\xi = \sum_{q=1}^{q_E} w_q f(\xi_1^{(q)})$$

 $\xi^{(q)}$ Nullstellen der LEGENDRE-Polynome im Intervall $[-1, +1]$ Umrechnen auf Intervall $[0, 1]$: $\eta := (\xi + 1)/2$, $d\xi = 2 * d\eta$

$$\xi^{(q)} \mapsto (\xi^{(q)} + 1)/2$$

$$w_q \mapsto 2 * w_q$$

$$f \in C^{2 * q_E + 1}[-1, 1] \implies$$

GAUSS-Quadratur exakt für Polynome vom Maximalgrad $2 * q_E - 1$ **Eindimensionale GAUSS-Quadratur der Ordnung 3**

$$q_E = 3$$

| q | $\xi_1^{(q)}$ | w_q |
|-----|---------------|-------|
| 1 | 0.1127016654 | 5/18 |
| 2 | 0.5000000000 | 8/18 |
| 3 | 0.8872983346 | 5/18 |

GAUSS-Quadratur über das Einheitsquadrat

$$\int_{Q^0} f(\xi) d\xi = \int_0^1 \int_0^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{j=1}^{q_E} \sum_{k=1}^{q_E} w_j w_k f(\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(k)})$$

Algorithmus zur Berechnung von Steifigkeits- und Massenmatrix für *isoparametrische* Elemente (d.h.für geometrische Transformation und Interpolation werden dieselben Formfunktionen benutzt).

- (1a) $dim :=$ Raumdimension ($=1,2,3$)
 (1b) $\mathbf{R}^{dim} \ni \xi$ Raumvariable
 (2a) $k_E :=$ Zahl der Knoten des Elements E
 (2b) $X_E := (x^{(1)}, \dots, x^{(k_E)})$
 Matrix der (Orts-)Spaltenvektoren $x^{(j)}$
 der Knoten des Elements E
 (3a) $q_E :=$ Zahl der Quadraturpunkte des Einheits-Elements E^0
 (3b) $\Xi_E^Q := (\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(q_E)})$
 Matrix der (Orts-)Spaltenvektoren der
 Quadraturpunkte des Einheits-Elements E^0
 (3c) $W_E := (w_1, \dots, w_{q_E})$ Vektor der Quadraturgewichte
 (4) $S(\xi) := (S_1(\xi), \dots, S_{k_E}(\xi))^T$
 Vektor der Formfunktionen des Elements E
 (5) $x := x(\xi) = X_E S(\xi)$
 bijektive Abbildung $E_0 \rightarrow E$

$M_S := 0 \in \mathbf{R}^{k_E}$, $M_E := 0 \in \mathbf{R}^{k_E}$
Loop $q = 1, \dots, q_E$ (Zahl der Quadraturpunkte)

- (6a) Berechne $S_j(\xi^{(q)})$, $\forall j = 1, \dots, k_E$
 (6b) Berechne $\frac{\partial S_j}{\partial \xi_n}(\xi^{(q)})$
 $\forall (j = 1, \dots, k_E, n = 1, \dots, dim)$
 (7a) Berechne $(\frac{\partial x}{\partial \xi})(\xi^{(q)}) \stackrel{(5)}{=} (\frac{\partial (X_E S(\xi^{(q)}))}{\partial \xi})$
 (7b) Berechne $J(\xi^{(q)}) := \det(\frac{\partial x}{\partial \xi})(\xi^{(q)})$
 (8) Berechne $(\frac{\partial \xi^{(q)}}{\partial x}) = (\frac{\partial x}{\partial \xi})^{-1}(\xi^{(q)})$ (für $dim = 2$ explizit möglich)
 (9a) Berechne die Hilfsvektoren

$$h^{(j)}(\xi^{(q)}) := \sum_{k=1}^{dim} S_{\xi_k} \frac{\partial \xi^{(q)}}{\partial x_j}, j = 1, \dots, dim$$

 (9b) $h^{(0)}(\xi^{(q)}) := S(\xi^{(q)})$
 (10a) $M_S := M_S + w_q * \sum_{j=1}^{dim} h^{(j)} h^{(j)T}$
 (10b) $M_M := M_S + w_q * \sum_{j=1}^{dim} h^{(0)} h^{(0)T}$

(9.4)

Bemerkung: Da M_S und M_M symmetrische Matrizen sind, wird man in (10a),(10b) aus ökonomischen Gründen z.B. nur die Matrixelemente in und unter der Diagonalen aufaddieren.

Kapitel 10

Literatur

AIGNER,M.: Diskrete Mathematik.
Vieweg , 1993 (10.1)

BRAUN,R.,MEISE,R.: Analysis mit MAPLE .
Vieweg 1995 (10.2)

FAHRMEIR,L.,KÜNSTLER,R.,PIGEOT,I.,TUTZ,G.: Statistik. Springer,2003
FORSTER,O.:Analysis 1 . Vieweg 1976

FORSTER,O.:Analysis 2 .Differentialrechnung im \mathbf{R}^n Vieweg 1977 (10.3)

FORSTER,O.:Analysis 3 .Integralrechnung im \mathbf{R}^n Vieweg 1981

GEORGII,H.O.:Stochastik. de Gruyter , 2002 (10.4)

IRLE,A.: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Teubner 2001

KÖNIGSBERGER,K.: Analysis 1 . Springer, 1990

KOPKA,H.: LATEX Einführung. Addison-Wesley (2. Aufl.) 1996

KRENGEL,U.:Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
Vieweg ,1998

LEIS,R.:Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung. BI , 1967

PRUSCHA,H.:Vorlesungen über Mathematische Statistik. Teubner, 2000

RENYI,A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mit einem Anhang über Informations-
theorie. VEB 1979

SHANNON,C.E.: A mathematical theory of information.

Bell System Tech. J. 27 (1948) , 379-423 (Teil 1) , 623-656 (Teil II)

TEUBNER-Taschenbuch der Mathematik. Teubner, 1996

SCHWARZ,H.R.: Methode der Finiten Elemente.

Teubner Studienbcher 47 , 1980

TOPSOE,F.: Informationstheorie. Eine Einführung. Teubner , 1974

TOUTENBURG,H.: Deskriptive Statistik. Springer,2000

TOUTENBURG,H.: Induktive Statistik. Springer,2000

Kapitel 11

ÜBUNG 1

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Sachs / A. Balser

- BLATT 1 -

Übungen zur Vorlesung :
Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Abgabe: bis MO , 27.10.2003 , 14.00 im Übungskasten

Aufgabe 1.1 (2 P)

Man zeige : Die komplexen Zahlen bilden einen Körper

Aufgabe 1.2 (4 P)

Man berechne die allgemeine reelle Lösung der Schwingungsgleichung

$$P(D)f(t) = f''(t) + 2 * f'(t) + 5f(t) = 0$$

Aufgabe 1.3 (2+2 P)

(1) Man löse das Anfangswertproblem

$$P(D)f(t) = 2 , f(0) = 1 , f'(0) = 0$$

(2) Man löse das Randwertproblem

$$P(D)f(t) = 2 , f(0) = 1 , f(1) = 0$$

Aufgabe 1.4 (6P)

Man schreibe ein MAPLE-Programm zur Berechnung der (reellen) Lösung der linearen Schwingungsgleichung

$$f''(t) + a * f'(t) + b * f(t) = \gamma = const. , f(0) = c_0 , f'(0) = c_1$$

mit graphischer Darstellung der Ergebnisse.

(Abgabetermin wird noch festgelegt)

Kapitel 12

ÜBUNG 2

MATHEMATISCHES INSTITUT
 DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
 A. Sachs / A. Balsler

- BLAT

Übungen zur Vorlesung :
 Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Abgabe: bis MO , 03.11.2003 , 14.00 im Übungskasten

Aufgabe 2.1 (2+2+2) P

Sei X ein metrischer Raum , $X_T \subset X$ und ∂X_T der Rand von X_T .

Man zeige :

- (1) $X_T \setminus \partial X_T$ ist offen
- (2) $X_T \cup \partial X_T$ ist abgeschlossen
- (3) ∂X_T ist abgeschlossen

Aufgabe 2.2 (2P)

Man skizziere den "Einheitskreis" in $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

$$B(0, 1)_\infty := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$$

Aufgabe 2.3 (2P)

Man zeige :

Für alle Matrizen $A = (a_{ik}) \in \mathbf{R}^{m,n}$ gilt :

$$\max_{i,k} |a_{ik}| \leq \|A\|_{g(2)} \leq \sqrt{m * n} \max_{i,k} |a_{ik}|$$

Aufgabe 2.4 (6P)

Man schreibe (in Verallgemeinerung von Aufgabe 1.4) ein MAPLE-Programm zur Berechnung der (reellen) Lösung des Anfangswertproblems der inhomogenen linearen Schwingungsgleichung

$$f''(t) + a * f'(t) + b * f(t) = a_E * \cos(\omega_E * t)$$

$$f(0) = c_0, f'(0) = c_1$$

mit vollständiger Fallunterscheidung und graphischer Darstellung der Ergebnisse.

Abgabetermin wird noch festgelegt

Kapitel 13

ÜBUNG 3

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Sachs / A. Balsler

- BLAT

Übungen zur Vorlesung :
Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Bitte möglichst **zwei** Namen auf ein Blatt

Abgabe: bis MO , 10.11.2003 , 14.00 im Übungskasten

Aufgabe 3.1 (3) P

Man zeige, daß die Funktion

$$f_2(x) := \frac{x_1 * x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ für } x \neq (0, 0)$$

$$f_2((0, 0)) := 0$$

in $x = (0, 0)$ stetig ist.

Aufgabe 3.2 (3+3) P

Gegeben sei die Funktion:

$$r : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$$

$$r(x) := \|x\|_2 := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

- (a) Man berechne den Gradienten $grad(r(x))$
(b) Man berechne den Gradienten $grad(1/r(x))$

(NEWTONsches Potential eines rotationssymmetrischen Kraftfeldes)

Aufgabe 3.3 (6) P

Fehlerrechnung: Es ist die Geschwindigkeit eines gleichförmig bewegten Massepunktes zu ermitteln. Dazu mißt man die Länge s einer Strecke und die Zeit t , die der Massepunkt braucht, um diese Strecke zurückzulegen. Seine Geschwindigkeit ist dann

$$(1) \quad v = \frac{s}{t} =: f(s, t)$$

Die wirklich gemessenen Werte seien

$$(2a) \quad \hat{s} = 27.1 \overset{+}{-} \Delta s, \text{ Meßgenauigkeit } \Delta s = 0.03$$

$$(2b) \quad \hat{t} = 11.3 \overset{+}{-} \Delta t, \text{ Meßgenauigkeit } \Delta t = 0.05$$

Man berechne (mit dem Mittelwertsatz) Schranken v_1 und v_2
für die wahre Geschwindigkeit \bar{v} :

$$(3) \quad v_1 \leq \bar{v} \leq v_2$$

Aufgabe 3.4 (6P)

Man stelle folgende Funktionen mit MAPLE graphisch dar:

[(1),(2) : 3d-Plot und Höhenlinien], [(3) Richtungsfeld]:

$$(1) \quad f_1(x_1, x_2) := x_1^2 - x_2^2 \text{ (Sattelfläche)}$$

$$(2) \quad f_2(x) \text{ von Aufgabe (3.1)}$$

$$(3) \quad f_3(x) := grad(\|x\|_2)$$

$$(4) \quad f_4(x) := grad(1.0/\|x\|_2)$$

(Abgabetermin wird noch festgelegt)

Kapitel 14

ÜBUNG 4

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

- BLATT 4 -

A. Sachs / A. Balsler

Übungen zur Vorlesung :
Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Bitte möglichst **zwei** Namen auf ein Blatt

Abgabe: bis MO , 17.11.2003 , 14.00 im Übungskasten

Aufgabe 4.1 (1+3 P)

An welchen Punkten x ist die Funktion

$$f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_2 \sqrt{2x_1^2 + x_2^2}$$

stetig partiell differenzierbar ?

Man berechne die partiellen Ableitungen f_{x_1} , f_{x_2}

Aufgabe 4.2 (1+2+3 P)

Gegeben ist das das Polynom $P(x) := 1 + x_1 * x_2 + x_2^2$.

(1) Man berechne den Gradienten $\nabla P(x)$

(2) Man berechne die HESSE-Matrix $H(x) = (P_{x_j x_k}) \in \mathbf{R}^{2,2}$

(3) Man entwickle das Polynom $P(x)$ in seine (endliche) TAYLOR-Reihe um $x = (0, 0)$ und verifiziere das Ergebnis durch Rechnung.

Aufgabe 4.3 (4 P)

Sei $\mathbf{R}^3 \supset U$ offen, $v : U \longrightarrow \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld. Man zeige :

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$$

Aufgabe 4.4 (4 P)

Man zeige : die Funktion

(1) $h(x) := 4x_1^2 - 3x_1x_2$

hat im Inneren des Kreises

(2) $K := \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

kein lokales Extremum.

Kapitel 15

ÜBUNG 5

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

A. Sachs / A. Balsler

Übungen zur Vorlesung :
Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Bitte möglichst **zwei** Namen auf ein Blatt

Abgabe: bis MO , 24.11.2003 , 14.00 im Übungskasten

- BLAT

Aufgabe 5.1 (6 P)

Man bestimme die Extrema der Funktion

(1) $h(x) := 4x_1^2 - 3x_1x_2$

auf der Kreisscheibe

(2) $K := \{x \in \mathbf{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

Aufgabe 5.2 (3+2+2 P)

Methode der kleinsten Quadrate:

(1a) $A \in \mathbf{R}^{m,n}$ (m Zeilen, n Spalten)

(1b) $m \geq n$, $\text{Rang}(A)=n$

(2a) $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^m$

(2b) $f(x) := \|Ax - y\|_2^2$

Man zeige:

(3) $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbf{R}^n \implies$

$A^t Ax^* = A^t y$ ("Normalgleichungen")

(4) $G := A^t A \in \mathbf{R}^{n,n}$ (GAUSSsche Matrix) ist positiv definit

(5) x^* Lösung der Normalgleichungen $\implies f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathbf{R}^n$

Aufgabe 5.3 (6 P)

Man zeige durch Nachrechnen für n=1 :

(1) $\mathbf{R} \ni c > 0$ (Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle)

(2) $v \in \mathbf{R}^n$, $\|v\|_2 = 1$

(Ausbreitungsrichtungsvektor der Welle)

(3) $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ zweimal stetig differenzierbar

Dann gilt

(4) $F : \mathbf{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{R}$

$F(x, t) := f(\langle v, x \rangle - ct) =: f(\phi(x, t))$

ist eine Lösung der Wellengleichung

(5) $F_{tt} = c^2 \Delta F$

Aufgabe 5.4 (3+3 P)

(a) Man löse das (nichtlineare) Gleichungssystem für x_1, x_2, λ der notwendigen LAGRANGE-Bedingung von Aufgabe (5.1) mit MAPLE (Funktion solve) .

(b) Man stelle die Funktion $h(x)$ von Aufgabe (5.1) für $x \in [0, 1] \times [0, 1]$ graphisch dar (MAPLE plot3d)

Kapitel 16

ÜBUNG 6

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

A. Sachs / A. Balser

//// Übungen zur Vorlesung :
Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Bitte möglichst zwei Namen auf ein Blatt

Abgabe: bis MO , 01.12.2003 , 14.00 im Übungskasten

Aufgabe 6.1 (6 P)

Man zeige:

Die Funktion

$$(1) \quad F(x, t) := t^{-n/2} \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2}{4t}\right)$$

ist eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \Delta F(x, t) \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad , \quad t > 0$$

Aufgabe 6.2 (2+2+2 P)

Für zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder $v=v(x, t)$ sei

$$\Delta v(x, t) := \Delta_x v(x, t) := (\Delta_x v_1(x, t), \Delta_x v_2(x, t), \Delta_x v_3(x, t))^t$$

Man zeige:

$$(1) \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} v = -\Delta v + \operatorname{grad} \operatorname{div} v$$

Für die Lösungen E und H der MAXWELL-Gleichungen gilt

(falls diese zweimal stetig nach x und t differenzierbar sind):

$$(2) \quad \Delta E - \mu\left(\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E}{\partial t}\right) = 0$$

$$(3) \quad \Delta H - \mu\left(\epsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial H}{\partial t}\right) = 0$$

Die Komponenten von E und H genügen also der *Telegraphengleichung* und im Falle $\sigma = 0$ der *Wellengleichung*.

Aufgabe 6.3 (2+2 P)

Methode der kleinsten Quadrate : Ausgleichsgerade

Gegeben seien Meßpunkte

$$(1a) \quad (\xi_1, \eta_1), \dots, (\xi_n, \eta_n) \in \mathbb{R}^2, \quad n > 2$$

Gesucht ist eine Ausgleichsgerade

$$(1b) \quad x_2 = a_1 * x_1 + a_0$$

d.h. Koeffizienten $a_0^*, a_1^* \in \mathbb{R}$ derart, daß die Funktion

$$(1c) \quad \phi(a_0, a_1) := \sum_{k=1}^n (a_1 \xi_k + a_0 - \eta_k)^2$$

für $(a_0, a_1) = (a_0^*, a_1^*)$ ihr Minimum annimmt.

(2a) Man berechne $\nabla \phi$

(2b) Man berechne die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{2,2}$ und die rechte Seite $b \in \mathbb{R}^2$ des linearen Gleichungssystems, das a_0^* und a_1^* zu erfüllen haben

Aufgabe 6.4 (4+4+4 P)

(1) Man stelle die Kurven (7.1) der Vorlesung graphisch dar

> plot (für ebene Kurven)

> with(plots)

> spacecurve (für Raumkurven)

(2a) Man berechne die Ausgleichsgerade von Aufgabe (6.3) numerisch mit den Daten

| | | | | | | |
|----------|---|---|---|---|----|----|
| n | 6 | | | | | |
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| ξ_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| η_k | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 10 |

Resultat: $a_0 = \frac{74}{21}, \quad a_1 = \frac{51}{35}$

(2b) Man stelle die Punkte (ξ_k, η_k) zusammen mit der Ausgleichsgerade graphisch dar.

Kapitel 17

ÜBUNG 7

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

- BLATT 7 -

A. Sachs / A. Balser

Übungen zur Vorlesung :
Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Bitte möglichst zwei Namen auf ein Blatt

Abgabe: bis MO , 08.12.2003 , 14.00 im Übungskasten

Aufgabe 7.1 (3+3 P)

Gegeben seien die Dreiecke

$$(1a) \quad T^0 := \text{Con}((0,0), (1,0), (0,1))$$

$$(1b) \quad T := \text{Con}((1,1), (3,2), (2,4)).$$

Man gebe eine bijektive Abbildung

$$(2a) \quad L : T^0 \longrightarrow T$$

$$\xi \mapsto L(\xi) =: x$$

an.

$$(2b) \quad \text{Man berechne } \det\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)$$

Aufgabe 7.2 (3+3 P)

Für $p, q \in \mathbb{N}_0$, $q > 0$ sei

$$(1) \quad I_{p,q} := \int_{T_0} \xi_1^p \xi_2^q \, d\xi$$

Man zeige:

$$(2a) \quad I_{pq} = \frac{q}{p+1} I_{p+1, q-1}$$

$$(2b) \quad I_{pq} = \frac{p!q!}{(p+q+2)!}$$

Aufgabe 7.3 (4+4+2 P)

Gegeben seien die Vierecke

$$(1a) \quad Q^0 := \text{Con}((0,0), (1,0), (1,1), (0,1))$$

$$(1b) \quad Q := \text{Con}((1,1), (3,2), (2,4), (0,2)).$$

Man gebe eine bijektive Abbildung

$$(2a) \quad L : Q^0 \longrightarrow Q$$

$$\xi \mapsto L(\xi) =: x$$

an.

$$(2b) \quad \text{Man berechne } \det\left(\frac{\partial L}{\partial \xi}\right)$$

und

$$(2c) \quad \int_{Q_0} \xi_1^p \xi_2^q \, d\xi$$

Aufgabe 7.4 (20+10 P)

- (a) Man schreibe ein MAPLE-Programm zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix M in

$$\int_E \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right)^2 dx = (u^E)^T M u^E$$

für $E \in \{T, Q\}$

- (b) Man zeige numerisch

- 1) M ist positiv semidefinit
- 2) M hat genau einen Eigenwert $\lambda = 0$

Abgabetermin wird noch festgelegt

Kapitel 18

ÜBUNG 8

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN

- BLATT 8 -

A. Sachs / A. Balser

Übungen zur Vorlesung :
Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Bitte möglichst zwei Namen auf ein Blatt

Abgabe: bis MO , 15.12.2003 , 14.00 im Übungskasten

KLAUSUR : MO , 2. Februar 2004 , 14.00 c.t.

Aufgabe 8.1 (2+6 P)

Gegeben sei das Dreieck (von Aufgabe (7.1))

$$(1a) \quad T := \text{Con}((1, 1), (3, 2), (2, 4)).$$

und

$$(1b) \quad x := L(\xi)$$

sei die lineare bijektive Abbildung von Aufgabe (7.1).

(A) Man berechne $\frac{\partial \xi}{\partial x}$

Gegeben sei das Variationsintegral

$$(2a) \quad \int_T \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_2} \right)^2 + c * u^{*2}(x_1, x_2) \right] dx \\ = (u_E)^T M_S u^E + c * (u_E)^T M_m u^E$$

Dabei ist $c \in \mathbb{R}$,

$$(2b) \quad u^*(\xi) = u^*(\xi(x)) = \langle u^E, S(\xi) \rangle$$

und (mechanische Interpretation)

(2c) $M_S \in \mathbb{R}^{3,3}$ die sog. Steifigkeitsmatrix , $M_m \in \mathbb{R}^{3,3}$ die sog. Massenelementmatrix.

(B) Man berechne (für das Dreieck (1a)) die Matrizen M_S und M_m . (MAPLE darf verwendet werden)

Aufgabe 8.2 (4+2 P)

Gegeben sei das Randwertproblem

$$(1) \quad f''(t) + f(t) = 1 \quad , \quad 0 < t < 1$$

$$(2a) \quad f(0) = 0$$

$$(2b) \quad f'(1) = 0$$

Man gebe eine Funktion $L(t, p, q)$ an, so daß gilt

(3) (1) ist EULERSche Differentialgleichung zu

$$(4a) \quad F(f) = \int_0^1 L(t, f(t), f'(t)) dt$$

$$(4b) \quad F(f^*) \leq F(f)$$

$$\forall f \in K := C^2(0, 1) \cap \{f \in C^0[0, 1] : f(0) = 0\}$$

Welche der Randbedingungen (2a), (2b) ist wesentlich, welche natürlich?

Aufgabe 8.3 (2+8) P)

Gegeben sei das Randwertproblem von Aufgabe (8.2).

(1) Man berechne die Lösung f^* dieses Randwertproblems.

Mit den Ansatzfunktionen

(2) $\phi_1(t) := t$, $\phi_2(t) := t^2$

berechne man über das Variationsprinzip durch Minimierung der Funktion

(3) $\Phi(\alpha_1, \alpha_2) := F(\alpha_1 * \phi_1 + \alpha_2 * \phi_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

eine Näherung $f(\alpha; t)$ an $f^*(t)$

(MAPLE darf verwendet werden)

Aufgabe 8.4 (4+4 P)

(a) Man stelle die zu minimierende Funktion $\Phi(\alpha_1, \alpha_2)$
von Aufgabe 8.3 graphisch dar

(b) Man stelle die Näherung $f(\alpha; t)$ und die exakte Lösung $f^*(t)$
graphisch dar

Kapitel 19

ÜBUNG 9

MATHEMATISCHES INSTITUT
 DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
 A. Sachs / A. Balser

- BLATT 9 -

Übungen zur Vorlesung :
 Analysis II (Angewandte Analysis) für Informatiker

Bitte möglichst zwei Namen auf ein Blatt

Abgabe: bis MO , 22.12.2003 , 14.00 im Übungskasten

KLAUSUR : MO , 2. Februar 2004 , 14.00 c.t.

Aufgabe 9.1 (3+3 P)

Gegeben sei das Einheitssimplex (Dreieckspyramide)

$$(1a) \mathbb{R}^3 \ni T_0^3 := \text{Con}(\xi^{(k)} , k = 1, \dots, 4) \\
 := \text{Con}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)).$$

sowie ein allgemeines Simplex

$$(1b) \mathbb{R}^3 \ni T^3 := \text{Con}(x^{(k)} , k = 1, \dots, 4).$$

Man bestimme Abbildungen (Formfunktionen) S^k mit

$$(2a) S^{(k)}(\xi) := a_0^{(k)} + a_1^{(k)} * \xi_1 + a_2^{(k)} * \xi_2 + a_3^{(k)} * \xi_3$$

$$(2b) S^{(k)}(\xi^{(k)}) = x^{(k)} , k = 1, \dots, 4$$

Man bestimme eine Abbildung $x = x(\xi)$ der Form

$$(3a) x(\xi) = b_0 + b_1 * \xi_1 + b_2 * \xi_2 + b_3 * \xi_3$$

mit

$$(3b) x : T_0^3 \longrightarrow T^3$$

$$(3c) x(\xi^{(k)}) = x^{(k)} , k = 1, \dots, 4.$$

(MAPLE darf verwendet werden)

Aufgabe 9.2 (3+3 P)

Gegeben sei das Einheitsprisma (Dreiecksprisma)

$$(1a) \mathbb{R}^3 \ni P_0^3 := \text{Con}(\xi^{(k)}, k = 1, \dots, 6) \\ := \text{Con}((0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)).$$

sowie ein allgemeines Prisma

$$(1b) \mathbb{R}^3 \ni P^3 := \text{Con}(x^{(k)}, k = 1, \dots, 6).$$

Man bestimme Abbildungen (Formfunktionen) S^k mit

$$(2a) S^{(k)}(\xi) := a_0^{(k)} + a_1^{(k)} * \xi_1 + a_2^{(k)} * \xi_2 + a_3^{(k)} * \xi_3 \\ + a_4^{(k)} * \xi_1 * \xi_3 + a_5^{(k)} * \xi_2 * \xi_3$$

$$(2b) S^{(k)}(\xi^k) = x^{(k)}, k = 1, \dots, 4$$

Man bestimme eine Abbildung $x = x(\xi)$ der Form

$$(3a) x(\xi) = b_0 + b_1 * \xi_1 + b_2 * \xi_2 + b_3 * \xi_3 + b_4 * \xi_1 \xi_3 + b_5 * \xi_2 \xi_3$$

mit

$$(3b) x : P_0^3 \longrightarrow P^3$$

$$(3c) x(\xi^{(k)}) = x^{(k)}, k = 1, \dots, 4.$$

(MAPLE darf verwendet werden)

Aufgabe 9.3 (6 P)

(1.1) Ω := endlicher Ergebnisraum

(1.2) $p: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ Wahrscheinlichkeitsverteilung

(1.3) p genügt den KOLMOGOROW-Axiomen

Dann gilt:

(2.1) $0 \leq p(\{\omega\}) \leq 1$, $\forall \omega \in \Omega$

(2.2) $\sum_{\omega \in \Omega} p(\{\omega\}) = 1$

(2.3) $p(\emptyset) = 0$

(2.4) $E \neq \emptyset \implies p(E) = \sum_{\omega \in E} p(\{\omega\})$

Aufgabe 9.4 (6 P)

Zwei Spieler (A und B) spielen eine Folge von Spielen, wobei jedesmal jeder der beiden mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gewinnt, unabhängig davon, wie die anderen Spiele ausgehen. Beide bringen in jedem Spiel den gleichen Einsatz ein und vereinbaren, daß derjenige die Gesamtsumme erhält, der als erster 10 Spiele gewonnen hat. Nach 15 Spielen habe Spieler A bereits 8 Spiele gewonnen, Spieler B nur 7 Spiele. Man mache einen Vorschlag, wie der bereits geleistete Einsatz an A und B auszuzahlen wäre, wenn das Spiel jetzt abgebrochen werden müßte.