Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 10

Kategorientheorie

37. Sei A ein Objekt in einer Kategorie mit Produkten $\mathcal{C}$. Der eindeutig bestimmte Morphismus $\Delta : A \longrightarrow A \times A$ mit $p_1 \circ \Delta = p_2 \circ \Delta = 1_A$ heißt *Diagonale* in $A \times A$.

    (a) Bestimmen Sie die Diagonale und die Kodiagonale für das Produkt bzw. das Koprodukt eines Objekts mit sich selbst in $\mathcal{C}$ für $\mathcal{C} = \mathbf{Vek}, \mathbf{Top}$.

    (b) Zeigen Sie: In der Kategorie aller Körper gibt es im allgemeinen keine (kategoriellen) Produkte. Es gilt jedoch $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$.

    (c) Bestimmen Sie die Diagonale in $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ in der Kategorie der Körper.

38. Sei $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ die Kategorie der topologischen Räume mit stetigen Abbildungen als Morphismen.

    (a) Sei $(X_i | i \in I)$ eine Familie von topologischen Räumen, sei X eine Menge und seien $f_i : X \longrightarrow X_i$ Abbildungen. Zeigen Sie: es gibt genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, so

      (i) daß die Abbildungen $f_i : X \longrightarrow X_i$ stetig sind und

      (ii) daß für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung $f : Y \longrightarrow X$ diese Abbildung f genau dann stetig ist, wenn alle $f_i \circ f$ stetig sind.

    (b) In **Top** gibt es zu jeder Familie von topologischen Räumen $(X_i | i \in I)$ ein kategorielles Produkt $\prod_{i \in I} X_i$.

39. Sei $\mathbb{K}$ ein kommutativer Ring. Gegeben sei $V \in \mathbb{K}$-Mod. Wir definieren für $A \in \mathbb{K}$-Alg

$$F(A) := \{f : V \longrightarrow A | f \ \mathbb{K}\text{-linear, und } \forall v, w \in V : f(v) \cdot f(w) = 0\}.$$

    Zeigen Sie, dass dieses einen Funktor $F : \mathbb{K}\text{-Alg} \longrightarrow \mathbf{Set}$ definiert.

40. (a) Sei V ein $\mathbb{K}$-Modul. Zeigen Sie, dass $D(V) := \mathbb{K} \times V$ mit der Multiplikation

$$(r_1, v_1)(r_2, v_2) := (r_1 r_2, r_1 v_2 + r_2 v_1)$$

    eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra definiert.

    (b) Zeigen Sie, dass F aus Aufgabe 39. ein darstellbarer Funktor ist mit der Algebra $D(V)$ wie in 40.(a) konstruiert als darstellendem Objekt.

Abgabe: Freitag, 9.7.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.