Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 9

Kategorientheorie

33. (a) Seien $f : A \longrightarrow B$ und $g : C \longrightarrow D$ Morphismen in der Kategorie $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass es einen eindeutig bestimmten Morphismus $f \times g : A \times C \longrightarrow B \times D$ gibt, so dass die Diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & A \times C \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_C"] \arrow[d, "f \times g"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B & B \times D \arrow[l, "p_B"] \arrow[r, "p_D"'] & D \end{tikzcd}$$

kommutieren.

(b) Wir bezeichnen mit $[f, g] : T \longrightarrow A \times B$ den eindeutig bestimmten Morphismus mit $p_A \circ [f, g] = f$ und $p_B \circ [f, g] = g$. Zeigen Sie, dass die folgenden Identitäten gelten:

(i) $[p_A, p_B] = 1_{A \times B}$;
(ii) $[f, g] \circ h = [f \circ h, g \circ h]$;
(iii) $f \times g = [f \circ p_A, g \circ p_B]$;
(iv) $(f \times g) \circ [h, k] = [f \circ h, g \circ k]$;
(v) $(f \times g) \circ (h \times k) = (f \circ h) \times (g \circ k)$.

34. (a) Zeigen Sie, dass das Produkt einer leeren Familie von Objekten ein Endobjekt $1 \in \mathcal{C}$ ist.

(b) Sei 1 ein Endobjekt in $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass es (natürliche) Isomorphismen $1 \times A \cong A$ und $A \times 1 \cong A$ gibt (natürlich in A).

35. Sei $(M_i | i \in I)$ eine Familie von Mengen. Zeigen Sie, dass

$$\prod_{i \in I} M_i := \{\alpha : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} M_i | \forall i \in I : \alpha(i) \in M_i\}$$

zusammen mit den Abbildungen $p_j : \prod_{i \in I} M_i \longrightarrow M_j$ mit $p_j(\alpha) = \alpha(j)$ ein Produkt (gemäß Definition 2.7.8) in der Kategorie der Mengen ist.

36. Seien $K := \mathbb{Q}(i)$ und $L := \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ zwei Körper in der Kategorie der Körper **Fi**. Zeigen Sie, dass es ein Produkt von K und L in **Fi** gibt.

Abgabe: Freitag, 25.6.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.