Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 7

Kategorientheorie

25. Sei G eine Gruppe und $\mathcal{C} := \mathcal{C}(G)$ die zugeordnete Kategorie (mit genau einem Objekt).
    (a) Zeigen Sie, dass es eine Bijektion zwischen den Funktoren $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ und den Endomorphismen $f : G \longrightarrow G$ gibt.
    (b) Zeigen Sie, dass ein Funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ genau dann natürlich isomorph zum Identitätsfunktor $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ ist, wenn der zugehörige Endomorphismus $f : G \longrightarrow G$ ein innerer Automorphismus ist (d.h. es gibt ein $g \in G$ mit $f(x) = gxg^{-1}$ für alle $x \in G$).
26. Wenn $f : A \longrightarrow B$ ein Isomorphismus ist, dann ist f ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.
27. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie mit unterliegenden Mengen. Sei der unterliegende Funktor $U : \mathcal{C} \longrightarrow$ **Men** ein treuer Funktor, d.h. ein Funktor, der auf den Morphismenmengen injektiv ist.
    (a) Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so dass $U(f)$ injektiv ist (die „unterliegende Abbildung" ist injektiv). Zeigen Sie, dass f ein Monomorphismus ist.
    (b) Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so dass $U(f)$ surjektiv ist (die „unterliegende Abbildung" ist surjektiv). Zeigen Sie, dass f ein Epimorphismus ist.
28. Sei **Ri** die Kategorie der Ringe (assoziativ mit 1-Element und Homomorphismen erhalten das 1-Element). Zeigen Sie, dass die Einbettung $i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epimorphismus in **Ri** ist.

Abgabe: Freitag, 11.6.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.