Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 6

Kategorientheorie

21. Sei M ein Monoid und $\mathcal{C} := \mathcal{C}(M)$ die zugeordnete Kategorie mit genau einem Objekt. Zeigen Sie, dass ein Element $x \in M$ genau dann eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ definiert, wenn $x \circ y = y \circ x$ für alle $y \in M$ gilt. Welche Elemente $x \in M$ definieren einen natürlichen Isomorphismus $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$?

22. Definieren Sie in Anlehnung an 1.7.19 mit Hilfe von Objekten, Morphismen und Diagrammen den Begriff zweier Kategorien $\mathcal{U}$ und $\mathcal{V}$ und eines Funktors $\mathcal{F} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ in einer Kategorie $\mathcal{C}$ als ein Diagramm $\mathcal{D}$ in $\mathcal{C}$. Überprüfen Sie, ob der Begriff einer natürlichen Transformation zwischen Diagrammen $\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ im Falle $\mathcal{C} = \mathbf{Men}$ mit dem Begriff der natürlichen Transformation von Funktoren zwischen (kleinen) Kategorien zusammenfällt.

23. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $\mathbb{K}$-Vek die Kategorie der $\mathbb{K}$- Vektorräume. Sei $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}\text{-Vek}} : \mathbb{K}\text{-Vek} \longrightarrow \mathbb{K}\text{-Vek}$ der Identitätsfunktor.

    (a) Zeigen Sie, dass jedes Element $a \in \mathbb{K}$ eine natürliche Transformation $\alpha^a : \mathrm{Id}_{\mathbb{K}\text{-Vek}} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{K}\text{-Vek}}$ mit $\alpha^a_V(v) := a \cdot v$ definiert.

    (b) Zeigen Sie, dass es zu jeder natürlichen Transformation $\beta : \mathrm{Id}_{\mathbb{K}\text{-Vek}} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathbb{K}\text{-Vek}}$ (genau) ein $a \in \mathbb{K}$ gibt mit $\beta = \alpha^a$. (Hinweis: Untersuchen Sie insbesondere die Komponente der natürlichen Transformation $\beta_{\mathbb{K}}$ auf dem Vektorraum $\mathbb{K}$.)

    (c) Zeigen Sie, dass die Menge der natürlichen Transformationen von $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}\text{-Vek}}$ nach $\mathrm{Id}_{\mathbb{K}\text{-Vek}}$ einen Ring mit 1-Element bildet und dass dieser Ring isomorph zu $\mathbb{K}$ ist.

24. Seien (X, x_0) und (Y, y_0) Objekte in der Kategorie $\mathbf{Top}_*$ der topologischen Räume mit Basispunkt (mit stetigen Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_0$) . Die Bildung der Fundamentalgruppe (Wegegruppe, 1. Homotopiegruppe) $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \longrightarrow \mathbf{Gr}$ ist ein kovarianter Funktor in die Kategorie der Gruppen. Zeigen Sie: wenn $\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$ und $\pi_1(Y, y_0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, dann sind (X, x_0) und (Y, y_0) nicht homöomorph in $\mathbf{Top}_*$.

Abgabe: Freitag, 4.6.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.