Mathematisches Institut **SS 2004**
der Universität München **Blatt 5**
Prof. Dr. B. Pareigis

Kategorientheorie

17. (a) Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass f einen Funktor zwischen Schnittkategorien $\mathcal{C}/f : \mathcal{C}/A \longrightarrow \mathcal{C}/B$ mit $\mathcal{C}/f((C,g)) := (C, f \circ g))$ induziert.
    (b) Zeigen Sie $\mathcal{C}/f \circ \mathcal{C}/f' = \mathcal{C}/(f \circ f')$ und $\mathcal{C}/1_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}/A}$.

18. Sei $\mathrm{Id}_{\mathbf{Men}} : \mathbf{Men} \longrightarrow \mathbf{Men}$ der Identitätsfunktor. Zeigen Sie, dass es genau eine natürliche Transformation $\alpha : \mathrm{Id}_{\mathbf{Men}} \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathbf{Men}}$ gibt. (Hinweis: Untersuchen Sie insbesondere die Komponente der natürlichen Transformation $\alpha_{\{*\}}$ auf der Menge $\{*\}$.)

19. Sei $\mathbf{2} := \{0, 1\}$ eine Menge mit zwei Elementen. Zeigen Sie, dass es einen natürlichen Isomorphismus zwischen dem (kontravarianten) Funktor $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Men}}(\text{-}, \mathbf{2}) : \mathbf{Men} \longrightarrow \mathbf{Men}$ und dem kontravarianten Potenzmengenfunktor $\mathcal{P} : \mathbf{Men} \longrightarrow \mathbf{Men}$ gibt.

20. Sei A eine Menge. Sei $F(A) := \mathrm{Abb}(A, \mathbb{Z})$ die Menge der Abbildungen von A in $\mathbb{Z}$. Sei weiterhin $\iota : A \longrightarrow F(A)$ die Abbildung, die definiert ist durch $\iota(a)(b) := \delta_{a,b}$. Dann heißt $F(A)$ zusammen mit ι eine „freie abelsche Gruppe“ über A.

    (a) Zeigen Sie, dass $F(A)$ eine abelsche Gruppe ist.
    (b) Sei M eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:
    Zu jeder Abbildung $f : A \longrightarrow M$ gibt es genau einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $g : F(A) \longrightarrow M$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & F(A) \arrow[d, "g"] \\ & M \end{tikzcd}$$

    (c) Sei F eine abelsche Gruppe und $\lambda : A \longrightarrow F$ eine Abbildung. Zu jeder abelschen Gruppe M und zu jeder Abbildung $f : A \longrightarrow M$ gebe es genau einen Homomorphismus von abelschen Gruppen $g : F \longrightarrow M$, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & M \end{tikzcd}$$

    Zeigen Sie: Es gibt genau einen Isomorphismus $h : F(A) \longrightarrow F$ mit $h \circ \iota = \lambda$.

Abgabe: Freitag, 28.5.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.