Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 3

Kategorientheorie

9. Sei Z eine partiell geordnete Menge (Poset). Betrachten Sie eine indizierte Menge $X := (X_i | i \in Z)$ und geben Sie notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Ordnung auf X an, so dass X mit der Indizierung ein Objekt der Schnittkategorie $\mathbf{Poset}/Z$ wird.

10. Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ Funktoren. Die *Komma-Kategorie* $(\mathcal{F} \downarrow \mathcal{G})$ ist die Kategorie mit Tripeln (A, f, B) als Objekten, wobei $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{G}(B)$ in $\mathcal{E}$ sind. Die Morphismen bestehen aus Paaren $(g, h) : (A, f, B) \longrightarrow (A', f', B')$ mit $(g : A \longrightarrow A', h : B \longrightarrow B')$ in $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A) \arrow[r, "\mathcal{F}(g)"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{F}(A') \arrow[d, "f'"] \\ \mathcal{G}(B) \arrow[r, "\mathcal{G}(h)"] & \mathcal{G}(B') \end{tikzcd}$$

kommutiert. Zeigen Sie, dass dieses eine Kategorie ist. Zeigen Sie weiter, dass eine Schnittkategorie ein Spezialfall einer Komma-Kategorie ist.

11. Sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Sei $f : A \longrightarrow B$ ein Isomorphismus in $\mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \longrightarrow \mathcal{F}(B)$ ein Isomorphismus in $\mathcal{D}$ ist.

12. Sei **Mat** die Kategorie bestehend aus $\mathrm{Ob}(\mathbf{Mat}) = \mathbb{N}_0$, der Menge der natürlichen Zahlen ≥ 0, und $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Mat}}(m, n) := \mathbb{R}^{(m,n)}$, der Menge der reellen Matrizen mit m Zeilen und n Spalten.
   (a) Zeige Sie, dass **Mat** mit der Matrizenmultiplikation eine Kategorie bildet. (Beachten Sie besonders das Objekt $0 \in \mathbb{N}_0$.)
   (b) Konstruieren Sie einen Funktor von **Mat** in die Kategorie der endlichdimensionalen reellen Vektorräume $\mathbf{Vek}_{ed}$ unter Verwendung der durch Matrizen dargestellten linearen Abbildungen.
   (c) * Konstruieren Sie einen Funktor von $\mathbf{Vek}_{ed}$ nach **Mat**.

Abgabe: Freitag, 14.5.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.