Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 2

Kategorientheorie

5. (a) Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein bijektiver Homomorphismus von Gruppen. Ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ ebenfalls ein Homomorphismus?
   (b) Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine bijektive stetige Abbildung von topologischen Räumen. Ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ ebenfalls eine stetige Abbildung?

6. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Ein Morphismus $f : X \longrightarrow Y$ heißt ein *Isomorphismus*, wenn es einen Morphismus $g : Y \longrightarrow X$ gibt mit $g \circ f = 1_X$ und $f \circ g = 1_Y$.
   (a) Zeigen Sie für die Kategorien der Monoide, der Gruppen und der topologischen Räume, daß Isomorphismen insbesondere bijektive Abbildungen sind.
   (b) Zeigen Sie weiter: wenn $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Isomorphismen in $\mathcal{C}$ sind, dann ist auch $g \circ f : X \longrightarrow Z$ ein Isomorphismus ist.

7. Sei $\mathcal{M}$ ein Objekt in der Kategorie **Mon** der Monoide. Die Schnittkategorie $\mathbf{Mon}/\mathcal{M}$ „ist genau“ die Kategorie der $\mathcal{M}$-graduierten Monoide. Zeigen Sie dazu:
   (a) Es gibt eine Bijektion zwischen den Schnittobjekten $p : U \longrightarrow \mathcal{M}$ in $\mathbf{Mon}/\mathcal{M}$ und den $\mathcal{M}$-graduierten Monoiden $\mathcal{U}$.
   (b) Die Kategorien der $\mathcal{M}$-graduierten Monoide und $\mathbf{Mon}/\mathcal{M}$ sind isomorph.

8. Sei A eine Menge mit Kleene Closure A^*, und sei $\mathcal{M} = (M, \mu, 1)$ ein Monoid. Zeigen Sie:
   (a) Zu jeder Abbildung $f : A \longrightarrow M$ gibt es genau einen Homomorphismus von Monoiden $g : A^* \longrightarrow M$, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{incl}"] \arrow[dr, "f"'] & A^* \arrow[d, "g"] \\ & M \end{tikzcd}$$

   (b) Sei F ein Monoid und $\iota : A \longrightarrow F$ eine Abbildung. Zu jeder Abbildung $f : A \longrightarrow M$ gebe es genau einen Homomorphismus von Monoiden $g : F \longrightarrow M$, so daß das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "g"] \\ & M \end{tikzcd}$$

   Dann gibt es einen Isomorphismus $h : A^* \longrightarrow F$ mit $h \circ \mathrm{incl} = \iota$. (Insbesondere können wir dann F als Kleene Closure von A auffassen.)

Abgabe: Freitag, 7.5.2004, 15 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.