Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2004
Blatt 1

Kategorientheorie

1. Zeigen Sie für beliebige gerichtete Graphen $\mathcal{G}$

$$\mathcal{G}(A,B) \cap \mathcal{G}(C,D) \neq \emptyset \iff A = C, B = D \text{ und } \mathcal{G}(A,B) \neq \emptyset.$$

2. In der Definition eines Homomorphismus $\mathcal{F}$ von Monoiden ist die Bedingung über das Erhalten des neutralen Elements notwendig. Finden Sie ein Beispiel von zwei Monoiden $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}'$ und einer Abbildung $\mathcal{F} : M \to M'$, die das erste Axiom für Homomorphismen erfüllt, jedoch nicht das zweite Axiom.

3. Sei X eine Menge und sei $M := X \times X$. Zeigen Sie, daß

$$M \times M \ni ((a,b),(c,d)) \mapsto \begin{cases} (a,d) \in M, \text{ wenn } b = c, \\ \text{nicht definiert, wenn } b \neq c \end{cases}$$

   eine partiell definierte Multiplikation definiert, die assoziativ ist.

   Unter welchen Umständen gibt es ein neutrales Element?

   Können Sie aus X eine Kategorie machen?

4. (i) Zeigen Sie, daß jede partiell geordnete Menge $(M, \leq)$ (Poset) eine Kategorie definiert. Die Klasse der Objekte sei M. Für $x, y \in M$ sei

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\}, \text{ wenn } x \leq y, \\ \emptyset, \text{ sonst.} \end{cases}$$

   Beschreiben Sie alle dadurch erhaltenen Kategorien (notwendige und hinreichende Bedingungen).

   (ii) Beschreiben Sie axiomatisch eine *Präordnung* als eine Menge mit einer Relation (deren Axiome zu bestimmen sind). Dabei soll angenommen werden, daß die Präordnung eine kleine Kategorie mit höchstens einem Pfeil zwischen jeweils zwei Objekten definiert.

   (iii) Lösen Sie dieselbe Aufgabe für total geordnete Mengen.

Abgabe: Freitag, 30.4.2004, 13.00 Uhr, in der Vorlesung.
Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung Ihren Namen an.