

## Übungen zu Einführung in die Kategorientheorie

**Aufgabe 41.** (1) Ein Gruppenhomomorphismus  $f : G \longrightarrow H$  ist eine Abbildung mit  $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$ , ( $\forall g_1, g_2 \in G$ ).

Zeigen Sie:  $f$  erhält das neutrale Element und inverse Elemente.

(2) Finden Sie zwei Monoide  $M$  und  $N$  und eine Abbildung  $f : M \longrightarrow N$ , die  $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$  ( $\forall g_1, g_2 \in M$ ) erfüllt, die aber nicht das neutrale Element erhält.

**Aufgabe 42.** Gruppen in  $\mathbf{Gr}$ , der Kategorie der Gruppen, sind genau die abelschen Gruppen.

**Aufgabe 43.** Bestimmen Sie die Struktur einer Kogruppe auf einer abelschen Gruppe  $A$  aus der Tatsache, daß  $\text{Hom}(A, B)$  für alle abelschen Gruppen  $B$  eine abelsche Gruppe ist.

**Aufgabe 44.** (1) In der Kategorie der kommutativen Algebren ist das Tensorprodukt  $A \otimes B$  von zwei Algebren (mit der üblichen Addition und der Multiplikation  $(\sum a_i \otimes b_i)(\sum c_j \otimes d_j) = \sum a_i c_j \otimes b_i d_j$ ) das Koprodukt.

(2) Für eine kommutative Algebra  $A$  sei  $G_a(A) := \{a \in A\}$ . Zeigen Sie:  $G_a : \mathbf{kommAlg} \longrightarrow \mathbf{Me}$  ist ein darstellbarer kovarianter Funktor.

(3) Sei  $G$  das darstellende Objekt von  $G_a$ . Zeigen Sie:  $G$  ist eine Kogruppe in der Kategorie der kommutativen Algebren mit der Addition auf  $G_a(A)$  als Gruppenoperation.

(4) Bestimmen Sie  $\Delta : G \longrightarrow G \otimes G$ ,  $\varepsilon : G \longrightarrow K$  und  $S : G \longrightarrow G$ . (Bem:  $(G, \Delta, \varepsilon, S)$  ist ein Beispiel für eine kommutative und kokommutative Hopfalgebra.)

Abgabe: Dienstag, 18. Juli 2000 in der Vorlesung