Mathematisches Institut
der Universität München
Prof. Dr. B. Pareigis

SS 2000
Blatt 6

Übungen zu Einführung in die Kategorientheorie

Aufgabe 21. (1) Ein Monoid M heißt *rechts kürzbar*, wenn für alle $a, b, c \in M$ gilt: aus $ac = bc$ folgt $a = b$. Jede Gruppe kann als rechts und links kürzbares Monoid angesehen werden.
Zeigen Sie, daß es zu jedem kommutativen kürzbaren Monoid M eine abelsche Gruppe $Q(M)$ und einen Monoidhomomorphismus $\iota : M \longrightarrow Q(M)$ so gibt, daß zu jeder abelschen Gruppe A und zu jedem Monoidhomomorphismus $f : M \longrightarrow A$ genau ein Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : Q(M) \longrightarrow A$ so existiert, daß das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & Q(M) \arrow[d, "\bar{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

(Hinweis: Vgl. Konstruktion der rationalen Zahlen aus den ganzen Zahlen.)

(2) Zeigen Sie, daß es zu jedem kommutativen Monoid M eine abelsche Gruppe $Q(M)$ und einen Monoidhomomorphismus $\iota : M \longrightarrow Q(M)$ so gibt, daß zu jeder abelschen Gruppe A und zu jedem Monoidhomomorphismus $f : M \longrightarrow A$ genau ein Gruppenhomomorphismus $\bar{f} : Q(M) \longrightarrow A$ so existiert, daß $f = \bar{f}\iota$ gilt.

Aufgabe 22. Sei $\mathcal{V} : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Me}$ der Vergißfunktor. Für $X \in \mathbf{Me}$ sei $\mathrm{Dis}(X) := (X, \mathcal{P}(X))$ der diskrete topologische Raum auf X. Zeigen Sie:
Ist (Y, T) ein beliebiger topologischer Raum und $f : X \longrightarrow Y$ eine Mengenabbildung, so ist $f : \mathrm{Dis}(X) \longrightarrow (Y, T)$ stetig, d.h. es gibt genau einen Morphismus $\bar{f} : \mathrm{Dis}(X) \longrightarrow (Y, T)$ in $\mathbf{Top}$ mit $f = \mathcal{V}(\bar{f}) = \mathcal{V}(\bar{f})\,\mathrm{id}_X$.

Aufgabe 23. Sei A eine (additive) abelsche Gruppe. Sei

$$\mathrm{Tor}(A) := \{a | a \in A \text{ und es gibt } n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \text{ mit } na = 0\},$$

die *Torsionsuntergruppe* von A. Die Gruppe A heißt *torsionsfrei*, wenn $\mathrm{Tor}(A) = 0$. Sei $\mathrm{Torfr}(A) := A/\mathrm{Tor}(A)$ und $\nu : A \longrightarrow \mathrm{Torfr}(A)$ die kanonische Projektion.
Zeigen Sie: $\mathrm{Torfr}(A)$ ist torsionsfrei, und zu jeder torsionsfreien abelschen Gruppe B und jedem Homomorphismus $f : A \longrightarrow B$ gibt es genau einen Homomorphismus $\bar{f} : \mathrm{Torfr}(A) \longrightarrow B$, so daß $f = \bar{f}\nu$. Welches Paar adjungierter Funktoren wird durch dieses universelle Problem beschrieben?

Aufgabe 24. Sei $V \in k$-$\mathbf{Vek}$. Zeigen Sie, daß der Funktor $\mathrm{Hom}(V, \text{-}) : k\text{-}\mathbf{Vek} \longrightarrow \mathbf{Me}$ einen linksadjungierten Funktor besitzt.

Abgabe: Dienstag, den 13.06.2000 11:15 Uhr in der Vorlesung