

Übungen zu Einführung in die Kategorientheorie

- Aufgabe 5.** (1) Zeigen Sie, daß die Kategorie der abelschen Gruppen **Ab** eine Unterkategorie der Kategorie der Gruppen **Gr** ist. Ist die Unterkategorie voll?
(2) Zeigen Sie, daß die Kategorie der Monoide **Mon** eine Unterkategorie der Kategorie der Halbgruppen **Hgr** ist. Ist die Unterkategorie voll?

- Aufgabe 6.** (1) Bezeichne $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge einer Menge X . Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sei $\mathcal{P}(f)(A) := f(A)$ für jede Teilmenge A von X . Zeigen Sie, daß damit $\mathcal{P} : \mathbf{Me} \rightarrow \mathbf{Me}$ ein kovarianter Funktor ist.
(2) Bezeichne $\mathcal{Q}(X)$ ebenfalls die Potenzmenge einer Menge X . Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ sei $\mathcal{Q}(f)(B) := f^{-1}(B)$ für jede Teilmenge B von Y . Zeigen Sie, daß damit $\mathcal{Q} : \mathbf{Me} \rightarrow \mathbf{Me}$ ein kontravarianter Funktor ist.

Aufgabe 7. Für einen Vektorraum V sei $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ der Dualraum zu V . Für einen Vektorraumhomomorphismus $f : V \rightarrow W$ sei $f^* : W^* \rightarrow V^*$ der Homomorphismus mit $f^*(\omega)(v) := \omega(f(v))$. Zeigen Sie, daß damit $-^* : \mathbf{Vek} \rightarrow \mathbf{Vek}$ ein kontravarianter Funktor wird.

Aufgabe 8. Seien $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ und $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ kovariante Funktoren. Die Komma-Kategorie $(\mathcal{F} \downarrow \mathcal{G})$ ist die Kategorie mit Tripeln (A, f, B) als Objekten, wobei $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$ und $f : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathcal{G}(B)$ in \mathcal{E} sind. Die Morphismen bestehen aus Paaren $(g, h) : (A, f, B) \rightarrow (A', f', B')$ mit $(g : A \rightarrow A', h : B \rightarrow B')$ in $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} & \mathcal{F}(A') \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ \mathcal{G}(B) & \xrightarrow{\mathcal{G}(h)} & \mathcal{G}(B') \end{array}$$

kommutiert. Zeigen Sie, daß dieses eine Kategorie ist.