Sind Wahlen undemokratisch?

Bodo Pareigis

Einleitung

Etwa ein Jahr, nachdem George W. Bush zum amerikanischen Präsidenten gewählt worden war, fiel mir in einem mathematischen Buchladen zufällig das Buch *Chaotic Elections!* mit dem Untertitel *A Mathematician Looks at Voting* von Donald G. Saari [S2001] (Chief Editor des *Bulletin of the AMS*) in die Hand. Noch stand man mit ungläubigem Staunen vor der Tatsache, dass juristische Intervention die Wahl entschieden hatte und dass, was ich eigentlich für interessanter hielt, George W. mit 540.000 Stimmen Rückstand die Wahlen gewonnen hatte.

Und da lag plötzlich eine wunderschöne mathematische Auseinandersetzung mit den verschiedenen Paradoxien des Wahlrechts vor mir. Nach einigen Studien, Wahlrecht ist ja eigentlich nicht mein Fachgebiet, erfuhr ich dann, dass wir in Deutschland im Wahlrecht auch eine Menge von Knallern haben und dass sich die Verfassungsgerichte immer wieder mit Anfechtungen des Wahlrechts und der Wahlvorschriften auseinandersetzen müssen. Und das nicht etwa, weil die Politiker, wie man leicht vermuten könnte, Streithähne sind, sondern weil etwas fundamental Mathematisches beim Wahlrecht im Argen liegt.

Ich kann an dieser Stelle leider nur wenige Hinweise zu den mathematischen Resultaten geben und möchte auch die juristischen Ansichten und methodischen Verfahren zu Wahlen nicht ganz zu kurz kommen lassen. All das rankt sich um eine Vielzahl von schönen Paradoxien, die man mit ein wenig Geduld leicht nachvollziehen kann.

One man, one vote

Beginnen wir mit den Grundanforderungen an ein gerechtes Wahlsystem. Wir wissen doch eigentlich alle, dass verschiedene Parteien durch allgemeine, unmittelbare, freie, gleiche und geheime Wahlen von den Wählern gewählt werden sollen. Dabei heißt die Wahl
–*allgemein*, wenn grundsätzlich jeder Staatsbürger an ihr teilnehmen kann,
–*unmittelbar*, wenn der Wählerwille direkt das Wahlergebnis bestimmt,
–*frei*, wenn der Staat den Bürger nicht zu einer bestimmten inhaltlichen Wahlentscheidung verpflichtet,
–*gleich*, wenn jeder Wähler grundsätzlich das gleiche Stimmgewicht besitzt,
–*geheim*, wenn die Entscheidung eines Wählers keinem anderen bekannt ist.
Die Bedingung der Gleichheit ist die mathematisch relevanteste Bedingung. Wir werden zunächst annehmen, dass jeder Wähler nur eine Stimme hat.

Die Probleme mathematischer, politischer und juristischer Art beginnen mit der Frage, was man denn eigentlich mit einem Wahlergebnis anfängt, das den einzelnen Parteien gewisse Zahlen von Wahlstimmen beschert hat. Eine Möglichkeit ist sicherlich, dass das amtierende Parlament sich garnicht um das Ergebnis kümmert und einfach im Amt bleibt.

Wir müssen also deutlich ausdrücken, was nach der Auszählung der Stimmzettel geschehen soll. Das machen wir hier auf knappe mathematische Weise.

Angenommen wir haben
  p Parteien $1, \ldots, p$ und
  S gültige abgegebene Stimmen.
Für die einzelnen p Parteien seien
  $s_1, \ldots, s_p$ Stimmen abgegeben worden.
Wir bezeichnen mit

M die Gesamtzahl der Mandate (Sitze) und mit

$m_1, \ldots, m_p$ die Anzahl der Mandate, die auf die einzelnen Parteien entfallen. Dann gilt zunächst (*)

$\boxed{s_1 + \ldots + s_p = S}$ und $\boxed{m_1 + \cdots + m_p = M}$

Man bestimme die Mandatssitze m_i für die einzelnen Parteien. Dabei ist zu beachten, dass die s_i und vor allem die m_i nur ganzzahlig sein können.

Man strebt zudem an, dass die Prozentsätze der auf die einzelnen Parteien entfallenden Stimmen s_i/S und Mandate m_i/M möglichst gleich sind, was die Grundlage des Verhältniswahlrechts ist. Man nennt die ungerundete Mandatszahl $\frac{s_i}{S} \cdot M = \frac{s_i}{S/M}$ die *Idealquote*.
Wir möchten jedoch ganze Zahlen haben:

$$\boxed{m_i = \{\tfrac{s_i}{S} \cdot M\} = \{\tfrac{s_i}{S/M}\},}$$

und fragen, wie die Rundung { } vorzunehmen ist?

Bevor wir diese Frage beantworten, fragen wir, ob die Wahl zum deutschen Bundestag am 19. September 1965 zu einer gerechten Verteilung der Sitze geführt hat.

Partei	s_i	Ideal-quote	m_i Endergebnis
SPD	12 813 186	202, 18	202
CDU	12 387 562	**195,46**	**196**
CSU	3 136 506	**49,49**	**49**
FDP	3 096 739	48, 86	49

mit $S = 31\ 433\ 993$ und $M = 496$. Man wird vielleicht sagen, dass die unterschiedliche Rundung und die endgültige Sitzzuweisung an CDU und CSU nicht so wichtig ist, jedoch gibt die unterschiedliche Rundung zu denken. Wie ist hier eigentlich gerundet worden?

Bei der Berechnung von $\frac{s_i}{S/M}$ dividiert man die Stimmen s_i, die auf eine Partei entfallen, durch eine Zahl, die die Anzahl der für ein Mandat benötigten Stimmen angibt. Rundet man dann die Idealquote nach unten ab, so werden im allgemeinen zu wenige Mandate verteilt.

Das Zählverfahren nach *d'Hondt* fordert nun, den Divisor, der hier S/M war, solange zu Werten d zu verkleinern, bis $\sum \lfloor \frac{s_i}{d} \rfloor$ (Gaußklammer) die Anzahl der Mandate ergibt. Bei der obigen Bundestagswahl liegt dann d zwischen 63120 und 63198.

Das Verfahren nach d'Hondt (auch Jefferson-Verfahren)

Man bestimme einen Divisor d und

$$\boxed{m_i = \lfloor \tfrac{s_i}{d} \rfloor = \mathrm{Int}(\tfrac{s_i}{d})}$$

(größte ganze Zahl $\leq \frac{s_i}{d}$) so, dass die Gleichungen (*) erfüllt sind.

Das Verfahren kann in Form fünf mathematisch äquivalenter Algorithmen, die stets dieselbe Mandatszuteilung ergeben, verwendet werden: als Zweischrittverfahren, als Höchstzahlverfahren, als Rangmaßzahlverfahren, als Paarweiser-Vergleich-Verfahren oder als Quasi-Quotenverfahren (Hagenbach-Bischoff-Verfahren).

Das Höchstzahlverfahren ist ein hübsches Auszählverfahren, das in der juristischen Literatur (z.B. Gesetzestexte) beschrieben wird als:
„(1) Die Mandate werden auf die Parteien in der Weise verteilt, dass die Gesamtstimmenzahlen, die für die Parteien festgestellt worden sind, nacheinander durch 1, 2, 3, 4 usw. so lange geteilt werden, bis so viele Höchstzahlen ermittelt sind, als Mandate zu vergeben sind.

(2) Jeder Partei wird dabei der Reihe nach so oft ein Sitz zugeteilt, als sie jeweils die höchste Teilungszahl aufzuweisen hat. Die Teilung muss so lange fortgesetzt werden, bis nach Verteilung aller Mandate bei jeder

Partei noch eine nicht berücksichtigte Teilungszahl übrigbleibt, damit feststeht, dass keine Partei eine höhere Teilungszahl aufzuweisen hat, als bei Vergebung des letzten Mandates berücksichtigt worden ist."
oder kürzer
„Man teilt die Zahl der erhaltenen Stimmen jeder Partei nacheinander durch die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... n. Die dabei erhaltenen Bruchzahlen werden als Höchstzahlen bezeichnet.
Die Höchstzahlen werden absteigend nach ihrer Größe geordnet. Die so ermittelte Reihenfolge gibt die Vergabereihenfolge der Mandate an. Es finden so viele Höchstzahlen Berücksichtigung, wie Mandate im Gremium zu vergeben sind."

Das Hagenbach-Bischoff-Verfahren ermittelt zunächst die Sitzverteilung als

$$\boxed{m_i = \left\lfloor \frac{s_i}{\left\lfloor \frac{S}{M+1} + 1 \right\rfloor} \right\rfloor.}$$

Verbleibende Mandate werden nach den Höchstzahlen vergeben, die berechnet werden als $s_i/\mathrm{Int}(m_i + 1)$.

An einem Beispiel (nächste Spalte) sieht man, wie bei der Suche nach einem geeigneten Divisor die starken Parteien bevorzugt werden. In diesem Falle überspringt die Partei A ausgehend von dem Divisor $S/M = 5137$ zweimal die Hürde zur nächsten ganzen Zahl für die geplante Abrundung und erhält damit zwei Mandate, von denen eines besser der Partei C zugesprochen worden wäre. Die großen Parteien werden vom d'hondtschen Verfahren grundsätzlich bevorzugt. Die Partei A erhält bei einer Idealquote von 37.64 ($= s_A/q$ mit $q = S/M$) tatsächlich 39 Sitze.

Man sucht daher ein Verfahren, bei dem die Anzahl der Mandate für jede Partei nicht kleiner als ihre nach unten gerundete Idealquote und nicht größer als ihre nach oben gerundete Idealquote ist (*Quotenkriterium*), eine in der juristischen Literatur oft aufzufindende Forderung.

Entwicklung einer Mandatsverteilung nach d'Hondt bei Anpassung des Divisors:

	A	B	C	D	Mandate
s_i:	193357	87740	29640	23168	
Ideal:	37.64	17.08	5.77	4.51	65
d					
5137	37.64	17.08	5.77	4.51	63
5090	37.99	17.24	5.82	4.55	63
5080	**38.06**	17.27	5.83	4.56	64
4960	38.98	17.69	5.98	4.67	64
4950	**39.06**	17.73	5.99	4.68	65
Ergeb.	39	17	5	4	65

In den ersten zehn Wahlen zum Deutschen Bundestag bis einschließlich 1983 wurden die Mandate mit der Methode von d'Hondt zugeteilt, seither mit der Methode von Hare-Niemeyer. Der bayerische Verfassungsgerichtshof hat die Anwendung des d'hondtschen Verfahrens unter dem geltenden Landeswahlrecht (getrennte Sitzverteilung in den sieben Regierungsbezirken) 1992 für verfassungswidrig erklärt.

Das Verfahren nach Hare-Niemeyer
(auch Hamilton-Verfahren)

Man wähle als Divisor $q = S/M$ und bilde $\widetilde{m_i} = \lfloor s_i/q \rfloor$. Es bleiben Mandate übrig. Diese werden auf die größten verbleibenden Reste verteilt. Es ergibt sich

$$\boxed{m_i = \begin{cases} \lfloor s_i/q \rfloor & \text{für kleine Reste,} \\ \lfloor s_i/q \rfloor + 1 & \text{für große Reste.} \end{cases}}$$

Ganz offensichtlich erfüllt dieses Verfahren das Quotenkriterium. Jedoch treten jetzt andere Ungereimtheiten oder Paradoxien auf.

Das Parteienzuwachs-Paradox: (12. Bundestag – Haushaltsausschuss) Im 12. Bundestage besaß die Partei D zunächst keinen Fraktionsstatus und wurde bei der Besetzung des Haushaltsausschusses nicht berücksichtigt. Als man ihr jedoch den Fraktionsstatus zubilligte und die Anzahl der Sitze im Haushaltsausschuss um 1 vergrößerte (auf jeden Sitz im Ausschuss entfallen ca. 17 Bundestagssitze), verlor die Partei C im einen Ausschusssitz an die Partei A.

	A	B	C	D
Fraktionsstärken:	**320**	**238**	79	17
Ausschusssitze ohne Partei D				
	18	14	5	–
Ausschusssitze mit Partei D				
	19	14	**4**	1

Schließlich erhielt A aber nur 319 Bundestagssitze und gab einen Bundestagssitz an die Partei B ab. Daraufhin musste A auch einen Haushaltsausschusssitz wieder abgeben, jedoch an die Partei C.

	A	B	C	D
Fraktionsstärken:	**319**	**239**	79	17
Ausschuss	**18**	14	**5**	1

Das <u>Stimmenzuwachs-Paradox</u>: Die Mandate der Parteien wurden nach dem vorläufigen Wahlergebnis und dann nach der endgültigen Auszählung bestimmt:

	vorl. Ergeb.	vorl. Mand.	Änderung	Endergeb.	endg. Mand.
A	17140354	**260**	+26000	17166354	**259**
B	16082960	243	+24000	16106960	243
C	3427196	52	+25000	3452196	52
D	3424315	52	+30000	3452196	52
E	3265407	**49**	-5000	3260407	**50**

eine bemerkenswerte Verschiebung eines Mandats von A nach E trotz gegenteiligen Trends bei der Stimmenauszählung!

Das <u>Mandatszuwachs-Paradox</u> (fehlende Hausmonotonie): Bei einem Zensus im Jahre 1870 in den USA stellte sich heraus, dass bei einer Größe des Repräsentantenhauses von 270 der Staat Rhode Island 2 Sitze erhalten würde, in einem Haus mit 280 Sitzen würde Rhode Island jedoch nur einen Sitz erhalten. Zehn Jahre später 1880 berechnete man die Zuweisung von Mandaten im amerikanischen Repräsentatenhaus neu unter der Annahme, dass eine gesamte Mandatsanzahl zwischen 275 und 350 festgelegt würde. Es stellte sich heraus, dass der Staat Alabama bei insgesamt 299 Sitzen 8 Sitze, bei 300 Sitzen jedoch nur 7 Sitze erhalten würde (das <u>Alabama-Paradoxon</u>). 1882 wurde das Repräsentantenhaus auf 325 Sitze festgelegt und Alabama behielt seine 8 Sitze. Das wiederholte sich nach dem Zensus 1900 in verstärktem Maße für die Vertreter des Staates Maine und führte zur folgenden Aufstellung

Sitzzahl	Maine
350-382	3
383-385	4
386	3
387-388	4
389-390	3
391-400	4

und zu folgendem Ausspruch:
„It does seem as though mathematics and science have combined to make a shuttlecock and battledore (Federballspiel) of the State of Maine. God help Maine when mathematics reach for her!“
Schockiert unterließ man dann die per Verfassung festgelegte Neuverteilung des Repräsentantenhauses im Jahre 1920 und ging danach zum Webster-Verfahren über.

Wir geben noch zwei weitere Paradoxien zum Hare-Niemeyer-Verfahren an.

Ein Bauer vererbt seinen Söhnen A und B seine Kühe zu je 42.5%, die restlichen Kühe gehen an den Sohn C. Bei seinem Tode besitzt der Bauer 10 Kühe. Die Aufteilung geschieht wie folgt

Erben	A	B	C	ges.
Erbanteil	42.5	42.5	15	100
Kühe	4.25	4.25	1.5	10
ganz	4	4	1	9
Bruch	0.25	0.25	0.5	1
Zuweisung	4	4	2	10

Die beiden Söhne A und B spendieren nun

eine weitere Kuh in das zu verteilende Erbe. Dann ergibt sich

Erben	A	B	C	ges.
Erbanteil	42.5	42.5	15	100
Kühe	4.675	4.675	1.65	10
ganz	4	4	1	9
Bruch	0.675	0.675	0.65	2
Zuweisung	5	5	1	11

Nach der Kreistagswahl im Wetteraukreis am 12. März 1989 war der Kreisausschuss mit 9 Sitzen vom Kreistag neu zu besetzen.

Partei	SPD	CDU	Grüne	Rep.	ges.
Mandate	38	29	7	5	79
Sitze	4,33	3,30	0,80	0,57	9
ganz	4	3	0	0	7
Bruch	0,33	0,30	0,80	0,57	2
Zuweisung	4	3	1	**1**	9

Der Kreistag beschloss, den Kreisausschuss um einen Sitz auf 10 zu vergrößern.

Partei	SPD	CDU	Grüne	Rep.	ges.
Mandate	38	29	7	5	79
Sitze	4,81	3,67	0,89	0,63	10
ganz	4	3	0	0	7
Bruch	0,81	0,67	0,89	0,63	3
Zuweisung	5	4	1	**0**	10

Das Verfahren nach Sainte-Laguë (auch Webster-Verfahren)

Man bestimme einen Divisor d und die

$$\boxed{m_i = \langle \frac{s_i}{d} \rangle}$$

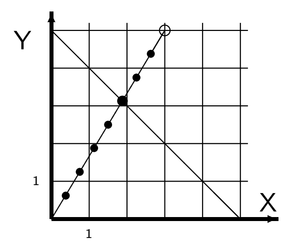
(= standard-gerundete Zahl) so, dass die Gleichungen (*) erfüllt sind.

Diese Methode ist weitgehend resistent gegen Paradoxien, kann aber das Quotenkriterium ebenfalls verletzen. Weitere Methoden gehen auf Hill-Huntingtom, Dean oder Adams zurück.

Bei all diesen Methoden stoßen wir auf das Problem der Rundung. Betrachten wir den einfachsten Fall mit zwei Parteien X und Y. Ihr Stimmenverhältnis sei $(p_X; p_Y)$ mit $p_X + p_Y = 1$ und $p_X \geq 0$, $p_Y \geq 0$. Die Sitzzuweisung ist $z = t \cdot (p_X; p_Y)$. Dabei ist t die Gesamtzahl der Sitze.

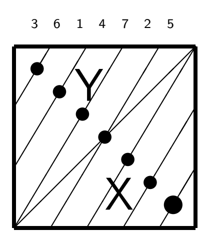
Ein Beispiel: $p_X = 0,375$, $p_Y = 0,625$ und $t = 5$ ergeben eine Zuweisung $z = 5 \cdot (0,375; 0,625) = (1,875; 3,125)$, also 1,875 Sitze für die Partei X und 3,125 Sitze für die Partei Y. Hier ist die Standardrundung einfach. Die 0,875 Sitze werden auf einen Sitz für X aufgerundet, Y bekommt keinen weiteren Sitz.

Diese Aufteilung für verschiedene t führt zu Punkten auf einer Geraden wie in der Abbildung.



Für $t = 5$, den Beispielfall, erhält man einen Schnittpunkt der Geraden $z = t \cdot (p_X; p_Y)$, die gezeichneten Punkte, mit der Geraden $x + y = 5$. Die Rundung führt auf $(2, 3)$.

Eigentlich interessiert für die Rundung der Bruchteile nur das 1x1 Quadrat, in dem der Schnittpunkt liegt. Wir legen alle diese Quadrate aufeinander und erhalten das folgende Einheitsquadrat.



Die Abschnitte der Geraden in diesem Einheitsquadrat und die entsprechenden Schittpunkte für verschiedene t sind hier dargestellt. Die Rundung erfolgt nach links oben für Y und nach rechts unten für X. Die Gerade verläuft jetzt auf einem Torus der Dimension 2.

Das ergibt ein endliches dynamisches System längs der punktierten Menge. Das Verhalten ist chaotisch. Bei mehr als zwei Parteien wird das System höher dimensional und befindet sich auf einem höherdimensionalen Torus.

Wer hat die Macht?

Um allen Zweifeln zu begegnen, ob es denn wirklich auf die eine Stimme ankommt, um die wir bei der Rundung gerungen haben, sei hier ein Beispiel gegeben mit drei Parteien und mit der Frage, wer bei dieser Stimmenverteilung die Macht hat. Wir nehmen an, dass die absolute Mehrheit bei Abstimmungen erreicht werden muss.

Partei	Sitze	Machtindex
CSU	10	100%
SPD	5	0%
Grüne	4	0%

Bei der gegeben Konstellation können die SPD und die Grünen gleich zuhause bleiben, weil die CSU die absolute Mehrheit hat. Daher auch der Machtindex.

Verliert die CSU jetzt aber einen Sitz an die SPD, dann hat jede Partei die gleiche Macht, denn für jede Entscheidung müssen zwei oder mehr Parteien zustimmen.

Partei	Sitze	Machtindex
CSU	9	33,3%
SPD	6	33,3%
Grüne	4	33,3%

Die Verzerrung durch das d'hondtsche Verfahren und die ungewöhnliche Koalitionsbildung wird auch deutlich an der Hochrechnung der Landtagswahlen in Schleswig-Holstein am 20.2.2005 gegen 21:00 (unter Berücksichtigung der 5% Sperrklausel:

Partei	% Partei	Koal.	Sitze Partei	Koal.
SPD	38,5	48,3	28	34
Grüne	6,2		4	
SSW	3,6		2	
CDU	40,2	46,9	30	35
FDP	6,7		5	
andere	4,8	–	–	–

Ein lesenswerter Artikel über die Berechnung des Machtindex unter Berücksichtigung von Koalitionen [K2001] stellt den verlorenen Kampf der deutschen Delegation beim EU-Gipfel in Nizza dar. Deutschland erhielt dort nach langem Kampf wegen seines durch die Wiedervereinigung höchsten Bevölkerungsanteils in der EU insgesamt 0,0000084% mehr Macht zugebilligt – 7,71453637% gegenüber 7,71452797% für Frankreich, Großbritannien und Italien.

Polyphonie

Bei der Wahl für nur ein Mandat, z.B. zum Staatspräsidenten von Frankreich, werden zum Erreichen der absoluten Mehrheit mehrere Wahlgänge, z.T. unter nur zwei Kandidaten, ausgetragen. Bei Wettkämpfen werden Ausscheidungskämpfe zwischen jeweils zwei Kandidaten ausgetragen, alles Methoden, die voller Paradoxien sind und tiefe mathematische Untersuchungen erfordern. Zur Erläuterung ein Beispiel einer Lehrbuchauswahl, bei der Lehrbücher nacheinander gegenübergestellt werden und so das von den meisten im Kollegium bevorzugte Buch ($\succ$) bestimmt wird:

$B \succ A$	$C \succ B$	$D \succ C$	$E \succ D$	$F \succ E$
100%	100%	66%	66%	66%

Damit war das Lehrbuch F ausgewählt. Tatsächlich war die Meinung der Lehrer im Kollegium ganz anders:

Stimmen	Präferenz
10	$E \succ D \succ C \succ B \succ A \succ \boxed{F}$
10	$D \succ C \succ B \succ A \succ \boxed{F} \succ E$
10	$C \succ B \succ A \succ \boxed{F} \succ E \succ D$

Es läge näher, hier die Wahl C zu treffen.

Bei der Wahl des Vorsitzenden des Kaninchenzüchtervereins, seines Stellvertreters und des 2. Stellvertreters stehen nur drei Kandidaten zur Verfügung. Jedes der 11 Vereinsmitglieder gibt eine Stimme ab. Das Ergebnis ist

Einfache Mehrheit	
Müller	5
Wagner	4
Schmidt	2

Weil ja aber auch der Stellvertreter gewählt wird, meint man, eine Wahl mit jeweils 2 Stimmen (ohne Häufelung) abhalten zu müssen und erhält

Je zwei Stimmen	
Schmidt	9
Wagner	8
Müller	5

Um zwischen dem Vorsitzenden und dem Stellvertreter unterscheiden zu können, erhält nun jeder 3 Stimmen, 2 für den Vorsitzenden und 1 für den Stellvertreter:

Stimmen 2 – 1 – 0	
Wagner	12
Schmidt	11
Müller	10

Hier sind die Präferenzen der einzelnen Vereinsmitglieder zum Nachrechnen:

Stimmen	Präferenz
3	Müller $\succ$ Schmidt $\succ$ Wagner
2	Müller $\succ$ Wagner $\succ$ Schmidt
2	Schmidt $\succ$ Wagner $\succ$ Müller
4	Wagner $\succ$ Schmidt $\succ$ Müller

Ähnliches passiert laufend bei der Erstellung von Berufungslisten. Auch dazu ein Beispiel. Es gibt 4 Kandidaten für eine Dreierliste. Die Abstimmung ergibt

Appel 9	Bauer 8	Clemens 7	(Dehm) 6

Der 4. Kandidat hat abgesagt, und es wird neu abgestimmt:

Clemens	11	Bauer	10	Appel	9

Alternativ: die Verhandlungen mit dem 1. Kandidaten sind nicht erfolgreich, und es wird neu abgestimmt:

Dehm	12	Clemens	10	Bauer	8

Hier sind wieder die Präferenzen der Mitglieder der Berufungskommission (Profil):

St.	Präferenz
3	Appel $\succ$ Clemens $\succ$ Dehm $\succ$ Bauer
6	Appel $\succ$ Dehm $\succ$ Clemens $\succ$ Bauer
3	Bauer $\succ$ Clemens $\succ$ Dehm $\succ$ Appel
5	Bauer $\succ$ Dehm $\succ$ Clemens $\succ$ Appel
2	Clemens $\succ$ Bauer $\succ$ Dehm $\succ$ Appel
5	Clemens $\succ$ Dehm $\succ$ Bauer $\succ$ Appel
2	Dehm $\succ$ Bauer $\succ$ Clemens $\succ$ Appel
4	Dehm $\succ$ Clemens $\succ$ Bauer $\succ$ Appel

Wie wäre die Wahl ausgegangen, wenn man das Profil gewichtet hätte mit der Stimmenzahl 3 - 2 - 1 - 0?

Dehm 58	Clemens 48	Bauer 41	Appel 33

Werden Wahlen gerechter, wenn man dem Wähler gestattet, seine Präferenzen vollständig anzugeben? Welches Gewicht sollten die Stimmen für die einzelnen Plätze haben?

Ein mögliches mathematisches Modell hierfür ist das folgende:
1. Es sollen N Kandidaten in eine transitive *Gesellschafts-Reihung* $R = (K_1 \succ K_2 \succ \ldots \succ K_n)$ gebracht werden. (Gleichstände sind zulässig.) Das ist der *Wahlausgang*.
2. Die Menge aller möglichen Gesellschafts-Reihungen sei $\mathcal{R}$. Es soll also ein $R \in \mathcal{R}$ gefunden werden.
3. Jeder Wähler soll bei der Wahl eine Reihung der Kandidaten (totale Ordnung) abgeben.
4. Ein *Profil* ist eine Liste der Reihungen der Kandidaten durch alle Wähler. Das ist das *Wahlergebnis*.
5. Die Menge aller Profile (aller möglichen Wahlergebnisse) sei $\mathcal{P}$. Durch eine Wahl wird ein $P \in \mathcal{P}$ festgelegt.
6. Ein *Wahlverfahren* ist eine Abbildung

$w : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$, die die folgende Bedingung erfüllt:
wenn in einem Profil P alle Wähler zwei Kandidaten A und B in dieselbe Reihenfolge gestellt haben (z.B. $A \succ B$), dann stehen die beiden Kandidaten auch in der Gesellschafts-Reihung $w(P)$ in derselben Reihenfolge.

Um Diskrepanzen wie im Parteienzuwachs-Paradox oder bei der Berufungsliste zu vermeiden, könnte man noch fordern:
(A) Die Reihenfolge zweier Kandidaten A und B in der Gesellschafts-Reihung hängt nicht von dem Votum für einen anderen Kandidaten C ab.

Dann gilt jedoch der Satz von Arrow (Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1972):

Satz (Arrow [A1963]): Sei ein Wahlverfahren $w : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ gegeben, das die Bedingung (A) erfüllt. Dann gibt es einen Wähler (Diktator), dessen Reihung in allen Profilen P mit der Gesellschaft-Reihung $w(P)$ übereinstimmt.

„*Die einzig gerechte Demokratie ist eine Diktatur.*“

Wir wollen die Hoffnung noch nicht ganz aufgeben. Wir definieren ein *Positionswahlverfahren* als ein Wahlverfahren $(w_1 - w_2 - \ldots - w_n)$ mit ganzen Zahlen w_i und $w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$ und $w_1 > w_n$. Damit sollen jedem Kandidaten w_i Punkte gutschrieben werden für jeden Wähler, bei dem der Kandidat an der i-ten Stelle steht.

Die schon oben verwendeten Positionswahlverfahren $(2-1-0)$ und $(3-2-1-0)$ sind Spezialfälle des Positionswahlverfahrens $((n-1)-(n-2)-\ldots-1-0)$, genannt *Borda-Zählung*. Unser übliches Mehrheits-Wahlverfahren für ein Mandat ist ein $(1-0-\ldots-0)$-Verfahren. Eine *Ausscheidungswahl* ist ein $(1-1-\ldots-1-0)$-Verfahren. Bei ihr wird jeweils ein Kandidat ausgeschieden.

Satz (Saari [S2000]): Sei ein Positions-Wahlverfahren $w : \mathcal{P} \to \mathcal{R}$ gegeben, das folgende Bedingung erfüllt.
(S) Die Reihenfolge zweier Kandidaten A, B in der Gesellschafts-Reihung hängt allein von den Voten für A und B und der Anzahl der Kandidaten zwischen A und B bei jedem Wähler ab.
Dann ist w die Borda-Zählung.

Es bliebe jetzt nachzuweisen, dass die Borda-Zählung tatsächlich eine Reihe von wünschenswerten Eigenschaften hat. Wir sind jedoch wieder weit von einer Diktatur entfernt.

Literatur

[A1963] Arrow, K.J.: *Social Choice and Individual Values.* 2nd ed., Wiley, New York **1963**.

[K2001] Kirsch, W.: *Die Formeln der Macht.* Die Zeit 12 S. 45, **2001**

[S2000] Saari, D.G.: *Mathematical structure of voting paradoxes I.* Economic Theory 15 **2000** 1–53.

[S2001] Saari, D.G.: *Chaotic Elections!* AMS **2001** ISBN 0-8218-2847-9

[VE2002] *Special Issue on Voting and Electyions.* Statistical Science 17 (4) **2002**.

[Wi] Wikipedia: *Sitzzuteilungsverfahren.* http://de.wikipedia.org/wiki/Sitzzuteilungsverfahren.

[ZF] Zicht, W., Fehndrich, M., Cantow, M.: *Wahlen, Wahlrecht und Wahlsysteme.* http://www.wahlrecht.de.

pareigis@lmu.de