Mathematik für Naturwissenschaftler I

LMU München – Wintersemester 2014/2015

HAUSAUFGABENBLATT – WOCHE 12 (22.12.2014)

Die Hausaufgaben sind nicht teil der Endnote.
Die Lösungen werden in dem Tutorium der nächsten Woche besprochen.

Aufgabe 45. Gegeben eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine stelle $x_0 \in [a, b]$. Als Taylorpolynom vom Grad n (and der Entwicklungsstelle x_0) bezeichnet man das Polynom

$$T_n f(x, x_0) \;=\; f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Unter der Taylorreihe von f (an der Entwicklungsstelle x_0) verstehen wir die Potenzreihe

$$Tf(x, x_0) \;=\; f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \;\equiv \sum_{k=0}^{\infty} + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k .$$

Gilt für $x \in [a, b]$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_n f(x, x_0)$, dann sagt man, dass $f(x)$ durch die Taylorreihe $Tf(x, x_0)$ dargestellt wird.

Man bestimme die Taylorreihe Tf mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 46. Man bestimme die Taylorreihe Tf mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ der Funktion

$$f(x) \;=\; \frac{1}{1 - x}, \qquad x \in (-1, 1) .$$

Aufgabe 47. Sei $(\mathcal{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Zerlegungen $\mathcal{Z}_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{2^n}^{(n)}\}$ von $[0, 1]$ mit

$$x_k^{(n)} = \frac{k}{2^n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2^n .$$

(i) Man bestimme die Feinheit $\Delta\mathcal{Z}_n$ der Zerlegung $\mathcal{Z}_n$.

(ii) Zeige, dass $\mathcal{Z}_n \subset \mathcal{Z}_{n+1}$ und $\Delta\mathcal{Z}_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ gilt.

(iii) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion (z.B. $f(x) = x^{2014}$) und seien

$$S_n^- \;=\; \sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_k^{(n)})(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}) \qquad \text{und} \qquad S_n^+ \;=\; \sum_{k=0}^{2^n-1} f(x_{k+1}^{(n)})(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}) .$$

Zeige, dass die Folge $S_2^-, S_3^-, S_4^-, S_5^-, \ldots$ monoton wachsend und die Folge $S_2^+, S_3^+, S_4^+, S_5^+, \ldots$ monoton fallend ist.

Aufgabe 48. Zeige, dass die Funktion

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

nicht Riemann-integrierbar ist.