

Functional Analysis II – Final test

Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

Name: / Name: _____

Matriculation number / Matrikelnr.: _____

Extra solution sheets submitted:
Zusätzlich abgegebene Lösungsblätter:

NO / NEIN
 YES / JA _____

Marks: / Punkte:

Exercise / Übung:	1	2	3	4	Σ

This booklet is made of ten pages, including the cover, numbered from 1 to 10. The test consists of four exercises. Each exercise is stated in one of the following odd pages. You have one hour to solve as many exercises as you can. Write the solution in the blank space in the page where the exercise is stated and possibly in the following blank page. Should you need more paper, you will be given extra-pages where you have to put your name and the number of the exercise you are referring to. Prove all your statements or refer to the standard material discussed in the class. Work individually. Write with legible handwriting. Good luck!

Die Angabe der Klausur umfasst 10 Seiten, einschliesslich des Deckblatts, nummeriert von 1 bis 10. Die Klausur besteht aus 4 Aufgaben, jede Aufgabe ist auf einem Blatt mit ungerader Seitenzahl gedruckt. Die Bearbeitungszeit beträgt 1 Stunde. Formulieren Sie die Lösung auf dem freien Platz unterhalb der entsprechenden Aufgabe und falls nötig auf der folgenden leeren Seite. Wenn Sie zusätzliche Blätter benötigen, schreiben Sie auf jedes Ihren Namen und die Nummer der bearbeiteten Aufgabe. Beweisen Sie jede Ihrer Aussagen, außer Sie verweisen auf Standardresultate aus der Vorlesung. Arbeiten Sie eigenständig und schreiben Sie bitte leserlich. Viel Glück!

Functional Analysis II – Final test
Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

Functional Analysis II – Final test

Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

EXERCISE 1. (Max. 6 points) – Prove that the Fourier transform \hat{f} of $f \in L^1(\mathbb{R})$ is a uniformly continuous function.

SOLUTION:

Functional Analysis II – Final test
Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

Functional Analysis II – Final test

Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

EXERCISE 2. (Max. 6 points) – Compute the weak derivative (in $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$) of the function f defined by

$$f(x) := |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

SOLUTION:

Functional Analysis II – Final test
Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

Functional Analysis II – Final test

Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

EXERCISE 3. (Max. 7 points) – On the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$ consider the densely defined multiplication operator

$$\begin{aligned} A : C_c(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto Af \end{aligned}$$

where $(Af)(x) := e^x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Here $C_c(\mathbb{R})$ denotes the space of continuous functions on \mathbb{R} with compact support. Prove or disprove the following:

- (a) A is symmetric,
- (b) A is self-adjoint.

SOLUTION:

Functional Analysis II – Final test
Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

Functional Analysis II – Final test

Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009

EXERCISE 4. (Max. 6 points) – Let A be a bounded and self-adjoint operator on a nontrivial Hilbert space \mathcal{H} . Let $z \in \mathbb{C}$ with $\Im z \neq 0$. Use the spectral theorem, resp. the functional calculus, to prove the bound

$$\|(A - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\Im z|}$$

for the operator norm of the resolvent.

SOLUTION:

Functional Analysis II – Final test
Funktionalanalysis II – Klausur

Mathematisches Institut der LMU – SS2009, 24.07.2009