Prof. Dr. Sebastian Hensel Sommersemester 2018

Geometrie und Topologie von Flächen

KURZSKRIPT

EINIGE KLEINE HINWEISE

Dieses Kurzskript ist eine *Auswahl* der wichtigsten Resulate der Vorlesung. Er ersetzt insofern nicht Ihre Mitschriften, oder ein Lehrbuch. Ziel hiervon ist, dass Sie überprüfen können ob sie die Kernpunkte der Vorlesung verstanden haben – die hier vorgestellten Definitionen und Sätze sollten Sie definitiv verstehen und reproduzieren können. Andererseits sind hier die von uns verwendeten Definitionen in derselben Version wie in der Vorlesung gesammelt, damit Sie diese im Zweifelsfall nachsehen können.

1. MITTWOCH, 11. APRIL

Definition 1.1 (parametrisierte Kurven)**.** Eine *parametrisierte Kurve* ist eine stetige Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall oder ganz $\mathbb{R}$ ist. Sie heißt $\mathcal{C}^1$ bzw. *glatt* falls sie einmal stetig differenzierbar bzw. unendlich oft differenzierbar ist.

Warnung: Das ist anders als im Buch von Bär (wo alle Kurven als glatt vorausgesetzt werden). Wir machen das anders, da es sehr interessante Beispiele nicht-glatter Kurven gibt...

Definition 1.2 (regulär)**.** Eine parametrisierte Kurve c heißt *regulär*, falls sie $\mathcal{C}^1$ ist und ihre Ableitung nirgends verschwindet.

Parametrisierte $\mathcal{C}^1$-Kurven haben überall Tangentialgeraden (d.h. Geraden die sie besser als linear approximieren)

Definition 1.3 (Umparametrisierungen)**.** Eine *Umparametrisierungsfunktion* ist eine stetige bijektive Abbildung $\varphi : J \to I$ wobei I, J jeweils Intervalle oder ganz $\mathbb{R}$ sind. Wir nennen Umparametrisierungsfunktionen glatt oder $\mathcal{C}^1$ wenn sowohl sie wie auch ihre Umkehrung φ^{-1} diese Eigenschaft haben.

Definition 1.4 ((glatte) Kurven)**.** Eine *Kurve* ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven bis auf Umparametrisierung. Eine *glatte Kurve* ist eine Äquivalenzklasse glatter parametrisierter Kurven bis auf glatte Umparametrisierung.

2. Freitag, 13. April

Definition 2.1 (Rektifizierbarkeit, Länge)**.** Eine parametrisierte Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar* falls

$$\sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b} \sum_{i=1}^{n} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| < \infty.$$

Das Supremum wird über alle Unterteilungen (mit beliebig vielen Unterteilungspunkten!) genommen. Wenn es endlich ist, nennt man den Wert die *Länge* $l(c)$ der parametrisierten Kurve c.

Satz 2.2 (Integralformel für Länge)**.** *Wenn $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^1$ parametrisierte Kurve ist, dann ist sie rektifizierbar, und*

$$l(c) = \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt.$$

Beweis. Bär, Proposition 2.1.18. □

Warnung: Stetigkeit reicht nicht aus, um Rektifizierbarkeit zu garantieren (z.B. Koch-Schneeflocke).

Lemma 2.3 (Geraden sind optimal)**.**
(1) *Das Geradensegment $g(t) = x + t(y-x)$, das die Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ verbindet, hat Länge $l(g) = \|y-x\|$.*
(2) *Jede andere rektifizierbare Kurve $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $c(a) = x, c(b) = y$ hat $l(c) \geq \|y-x\|$.*
(3) *Wenn in ii) Gleichheit gilt, dann ist* $\mathrm{im}(c) = \mathrm{im}(g)$.

Beweis.
(1) Das folgt direkt aus der Integralformel:

$$l(g) = \int_0^1 \|y-x\| = \|y-x\|.$$

(2) Das folgt mit der Längendefinition über rektifizierbare Kurven und der Dreiecksungleichung. Sei nämlich $t_0 < \ldots < t_n$ eine Unterteilung. Dann folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\|y-x\| = \|c(t_n) - c(t_0)\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} c(t_i) - c(t_{i-1}) \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\|.$$

Damit ist dann auch

$$\|y-x\| \leq \sup_{a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b} \sum_{i=1}^{n} \|c(t_i) - c(t_{i-1}) = l(c).$$

(3) Damit in (2) Gleichheit gilt, muss in der Abschätzung aus dem letzten Teil bei der Dreiecksungleichung immer gleichheit gelten. Das ist nur dann der Fall, wenn die $c(t_i)$ alle auf einer Gerade liegen. Da das für alle Unterteilungen gelten muss, ist das Bild von c also Geradensegment.

□

3. Mittwoch, 18. April

Definition 3.1 (Parametrisierung nach Bogenlänge)**.** Eine $\mathcal{C}^1$ parametrisierte Kurve c ist *nach Bogenlänge parametrisiert*, falls für jedes t (im Definitionsbereich von c) für die Ableitung $\|c'(t)\| = 1$ gilt.

Proposition 3.2. *Jede $\mathcal{C}^1$ parametrisierte Kurve hat eine Umparametrisierung, die nach Bogenlänge parametrisiert ist.*

Beweis. Bär, Proposition 2.1.13. □

Definition 3.3 (Normalen- und Tangentialvektor)**.** Sei $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^2$ Kurve. Dann definieren wir für jeden Zeitpunkt t den *Tangentialvektor* $T(t) = c'(t)$ und den *Normalenvektor*

$$N(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T(t).$$

Definition 3.4 (Krümmung)**.** Für eine ebene nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^2$ Kurve $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$, definieren wir die *Krümmung* als die (eindeutige) Funktion $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$ sodass

$$c''(t) = \kappa(t)N(t)$$

Dass eine solche Funktion existiert, folgt aus der Produktregel (und der Tatsache dass c nach Bogenlägne parametrisiert ist).

Proposition 3.5 (Frenet-Gleichungen)**.** *Sei c eine $\mathcal{C}^2$ parametrisierte Kurve die nach Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gilt für ihre Tangential- und Normalenvektoren T, N und ihre Krümmung κ die folgende Gleichung*

$$(T'(t), N'(t)) = (T(t), N(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Bär, Proposition 2.2.4. □

Satz 3.6 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie, ebene Version)**.** *Sei $\kappa : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Funktion. Dann gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^2$ Kurve $c : (a, b) \to \mathbb{R}^2$, deren Krümmung genau κ ist. Zwei solche Kurven unterscheiden sich durch Komposition mit einer Euklidischen Isometrie.*

Beweis. Diesen Satz zeigt man wie die dreidimensionale Version; siehe Bär, Proposition 2.3.9. □

4. Freitag, 20. April

Lemma 4.1 (Liftungslemma, Spezialfall)**.** *Angenommen, $e : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ ist eine stetige Abbildungs sodass $\|e(x)\| = 1$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es eine stetige Funktion $\theta : X \to \mathbb{R}$ sodass*

$$e(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x)).$$

Beweis. Bär, Lemma 2.2.5. □

Definition 4.2. Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene nach Bogenlänge parametrisierte Kurve. Dann definieren wir die *Windungszahl von c* als

$$w_c = \frac{1}{2\pi}\left(\theta(b) - \theta(a)\right),$$

wobei $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion ist, sodass für die Tangentialvektoren $T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ gilt.

Lemma 4.3 (Windungszahl und Krümmung)**.** *Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene parametrisierte $\mathcal{C}^2$ Kurve für Krümmung $\kappa : [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$w_c = \frac{1}{2\pi}\left(\int_a^b \kappa(t)dt\right).$$

Beweis. Bär, Lemma 2.2.9. □

Satz 4.4 (Umlaufsatz)**.** *Eine einfach geschlossene ebene Kurve hat Windungszahl $+1$ oder -1.*

Beweis. Bär, Satz 2.2.10. □

Dazu braucht man eine verallgemeinerte Version des oben beschriebenen Liftungslemmas:

Lemma 4.5 (Liftungslemma, allgemeine Version)**.** *Angenommen, $X \subset \mathbb{R}^n$ ist eine sternförmige Menge, und $e : X \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildungs sodass $\|e(x)\| = 1$ für alle $x \in X$. Dann gibt es eine stetige Funktion $\theta : X \to \mathbb{R}$ sodass*

$$e(x) = (\cos\theta(x), \sin\theta(x)).$$

Beweis. Bär, Lemma 2.2.12. □

5. Mittwoch, 25. April

Definition 5.1 (Flächeninhalt)**.** Der *Flächeninhalt* eines (messbaren) Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ist definiert als das Integral

$$A(\Omega) = \int_\Omega 1.$$

Satz 5.2 (Isoperimetrische Ungleichung)**.** *Sei c eine ebene $\mathcal{C}^1$-Kurve mit Windungszahl 1, die ein Gebiet Ω berandet. Dann gilt*

$$A(\Omega) \leq \frac{l(c)^2}{4\pi},$$

mit Gleichheit genau dann wenn c einen Kreis parametrisiert.

Beweis. Der in der Vorlesung gegebene Beweis stammt aus: do Carmo, “Differentialgeometrie von Kurven und Flächen”, Kapitel 1.7.A. □

6. Freitag, 27. April

Definition 6.1 (Krümmung von Raumkurven)**.** Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^1$-Raumkurve. Dann definieren wir die Krümmung als

$$\kappa(t) = \|c''(t)\|.$$

Definition 6.2 (begleitendes Dreibein)**.** Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^2$-Raumkurve, und t ein Punkt sodass $\kappa(t) \neq 0$. Dann definiere

$$N(t) = \frac{c''(t)}{\|c''(t)\|}, \quad B(t) = T(t) \times N(t).$$

We nennen $(T(t), N(t), B(t))$ das *begleitende Dreibein* der Raumkurve c.

Definition 6.3 (Torsion)**.** Sei $c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^3$-Raumkurve, und t so dass $\kappa(t) \neq 0$. Dann definieren wir die Torsion als

$$\tau(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle.$$

Proposition 6.4 (Frenet-Gleichungen)**.** *Sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^3$ Kurve mit $\kappa(t) > 0$ für alle t. Dann gilt für ihr begleitendes Dreibein, Torsion und Krümmung die folgende Gleichung*

$$(T'(t), N'(t), B'(t)) = (T(t), N(t), B(t)) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(t) & 0 \\ \kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Bär, Proposition 2.3.7. □

Satz 6.5 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie)**.** *Seien $\kappa, \tau : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, und $\kappa(t) > 0$ für alle $t \in (a,b)$. Dann gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte $\mathcal{C}^3$ Kurve $c : (a,b) \to \mathbb{R}^3$, deren Krümmung κ und deren Torsion τ ist. Zwei solche Kurven unterscheiden sich durch Komposition mit einer Euklidischen Isometrie.*

Beweis. Bär, Proposition 2.3.9. □

7. Mittwoch, 2. Mai und Freitag, 4. Mai

Proposition 7.1 (Induzierte Pfadmetriken)**.** *Angenommen $X \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Menge, sodass für alle $p, q \in X$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve mit Bild in X und Endpunkten p, q existiert. Dann definiert*

$$d(p,q) = \inf\{l(c) \mid c : [0,1] \to X \text{ stückweise } \mathcal{C}^1, c(0) = p, c(1) = q\}$$

eine Metrik auf X.

Beweis. Da jede Kurve, die p mit q verbindet, Länge mindestens $\|p - q\|$ hat, folgt $d(p,q) \geq \|p - q\|$. Insbesondere ist $d(p,q)$ nicht-negativ, und nur dann Null, falls $p = q$.

Wenn c eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve mit $c(0) = p, c(1) = q$ ist, dann ist $\hat{c}(t) = c(1-t)$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve mit $\hat{c}(0) = q, \hat{c}(1) = p$. Außerdem ist $l(\hat{c}) = l(c)$, und damit $d(p,q) = d(q,p)$.
Seien nun p, q, r drei Punkte, und $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen der Definition von d gibt es Kurven $c, \hat{c}$ mit:

(1) $c(0) = p, c(1) = q$,
(2) $\hat{c}(0) = q, \hat{c}(1) = r$,
(3) $l(c) \leq d(p,q) + \epsilon$,
(4) $l(\hat{c}) \leq d(q,r) + \epsilon$.

Dann ist $c * \hat{c}$ eine Kurve mit

(1) $(c * \hat{c})(0) = p, (c * \hat{c})(2) = r$,
(2) $l(c * \hat{c}) \leq d(p,q) + d(q,r) + 2\epsilon$,

und damit

$$d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r) + 2\epsilon.$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gilt, folgt $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$, und damit die Dreiecksungleichung. $\square$

Wir betrachten jetzt die Sphäre $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, mit ihrer induzierten Pfadmetrik.

Definition 7.2. Ein *Großkreis* ist der Schnitt einer Ebene (durch den Ursprung) mit S^2. Ein *Großkreisbogen* ist eine injektive Kurve, die ganz in einem Großkreis enthalten ist.

Satz 7.3. *Für je zwei Punkte $p, q \in S^2$ gibt es eine Kurve $c : [0,1] \to S^2$ sodass*

$$d(p,q) = l(c) = \angle(p,q).$$

Diese Kurve c ist ein Großkreisbogen. Falls $p \neq -q$, so ist c eindeutig.

Wesentliches Hilfsmittel ist hier die Abbildung

$$\hat{E}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos \|(x,y)\| \\ \frac{x}{\|(x,y)\|} \sin \|(x,y)\| \\ \frac{y}{\|(x,y)\|} \sin \|(x,y)\| \end{pmatrix}, \quad \hat{E}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen

Proposition 7.4. *Die Abbildung $\hat{E} : \{(x,y), x^2+y^2 < \pi\} \to S^2 \setminus \{(-1,0,0)\}$ hat die folgenden Eigenschaften:*

i) *$\hat{E}$ ist bijektiv.*
ii) *$\hat{E}$ ist stetig differenzierbar.*
iii) *Für alle stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurven c mit Bild in $S^2 \setminus \{(-1,0,0)\}$ ist die Kurve $\hat{E}^{-1} \circ c$ auch stückweise $\mathcal{C}^1$.*
iv) *Wenn $c : [0,L] \to \{(x,y), x^2 + y^2 < \pi\}$ eine stückweise $\mathcal{C}^1$–Kurve ist, sodass $\hat{E} \circ c : [0,L] \to S^2$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, und $c(0) = 0$, dann ist $\|c(L)\| \leq L$.*

v) Wenn im vorigen Punkt Gleichheit gilt, dann ist c ein Geradensegment durch den Nullpunkt.

Beweis. i) Sei $p \in S^2, p = (x,y,z) \neq (-1,0,0)$ ein Punkt. Da $\cos : [0,\pi) \to [1,-1)$ bijektiv ist (das wissen wir aus Analysis), gibt es eine eindeutige Zahl $r \in [0,\pi)$ sodass $\cos(r) = x$. Wir nehmen zunächst an, dass $x \neq 1$. Da $p \in S^2$ gilt ferner

$$1 = x^2 + y^2 + z^2,$$

also

$$y^2 + z^2 = 1 - x^2 = 1 - \cos(r)^2 = \sin(r)^2.$$

Mit anderen Worten, der Punkt (y,z) liegt auf einem Kreis mit Radius $\sin(r)$, und wir finden deswegen eine Zahl φ sodass $y = \sin(r)\cos(\varphi)$, $z = \sin(r)\sin(\varphi)$. Die Zahlen $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ sind eindeutig bestimmt durch y, z. Betrachte jetzt

$$\hat{E}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) = \begin{pmatrix} \cos r \\ \frac{r\cos(\varphi)}{r}\sin r \\ \frac{r\cos(\varphi)}{r}\sin r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos r \\ \cos(\varphi)\sin r \\ \cos(\varphi)\sin r \end{pmatrix} = p.$$

Also liegt p im Bild von $\hat{E}$, und hat eindeutiges Urbild. Bijektivität folgt jetzt, da $\hat{E}(0,0) = (1,0,0)$.

ii) An allen Stellen $(x,y) \neq (0,0)$ folgt Differenzierbarkeit direkt aus der Formel. An der Stelle $(0,0)$ muss man Differenzierbarkeit aus der Definition nachrechnen. Definiere dazu die (lineare) Abbildung

$$L(a,b) = (0,a,b).$$

Dann ist für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\hat{E}(x,y) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - L(x,y) = \begin{pmatrix} \cos\|(x,y)\| - 1 \\ \frac{x}{\|(x,y)\|}\sin\|(x,y)\| - x \\ \frac{y}{\|(x,y)\|}\sin\|(x,y)\| - y \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aus Analysis, dass

$$\cos(r) = 1 + o(|r|)$$
$$\frac{\sin(r)}{r} = 1 + o(|r|)$$

(z.B. indem man sich Taylor-Entwicklungen ansieht) Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\left\| \begin{pmatrix} \cos\|(x,y)\| - 1 \\ \frac{x}{\|(x,y)\|}\sin\|(x,y)\| - x \\ \frac{y}{\|(x,y)\|}\sin\|(x,y)\| - y \end{pmatrix} \right\| \leq |\cos\|(x,y)\| - 1| + \left| x\left(\frac{\sin\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|} - 1\right)\right| + \left| y\left(\frac{\sin\|(x,y)\|}{\|(x,y)\|} - 1\right)\right|.$$

und mit den Abschätzungen oben ist die rechte Seite $o(\|(x,y)\|)$. Damit erfüllt L also die Definition einer Ableitung bei $(0,0)$, und $\hat{E}$ ist differenzierbar bei $(0,0)$.

Um zu zeigen, dass $\hat{E}$ stetig differenzierbar ist,

iii) Betrachte die Umkehrabbildung $F = (\hat{E})^{-1}$, die es wegen (1) gibt. Wie wir in (1) argumentiert haben, gilt für diese

$$F(x,y,z) = \arccos(x) \begin{pmatrix} \frac{y}{\sin(\arccos(x))} \\ \frac{z}{\sin(\arccos(x))} \end{pmatrix}$$

für $(x,y,z) \neq (1,0,0)$, $F(1,0,0) = (0,0)$. Diese ist differenzierbar, und damit folgt (3) für alle Punkt $\neq (1,0,0)$. An dem Punkt muss man (ähnlich wie in Punkt ii)) die Definition nutzen.

iv) Als erste Reduktion überlegt man sich, dass es reicht die Behauptung für Kurven zu zeigen, die nur für $t = 0$ den Wert 0 annehmen (sonst: betrachte eine echte Teilkurve die bei 0 beginnt). Für solche Kurven ist jetzt für alle $t \neq 0$ eine Orthonormalbasis vom $\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$R_t = \frac{c(t)}{\|c(t)\|}, \quad A_t = I(R_t)$$

wobei $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation um den Ursprung mit Winkel $\pi/2$ gegen den Uhrzeigersinn beschreibt. Wir können also Funktionen μ, ν finden, sodass

$$c'(t) = \mu(t)R_t + \nu(t)A_t.$$

Jetzt überlegt man sich, dass das folgende gilt:

$$\frac{d}{dt}\|c(t)\| = \frac{\langle c(t), c'(t)\rangle}{\|c(t)\|},$$

für Zeiten t an denen $c(t) \neq 0$. Ferner ist

$$\langle c(t), c'(t)\rangle = \langle c(t), \mu(t)R_t + \nu(t)A_t\rangle = \langle c(t), \mu(t)R_t\rangle = \left\langle c(t), \mu(t)\frac{c(t)}{\|c(t)\|}\right\rangle = \mu(t)\|c(t)\|.$$

Damit folgt dann

$$\|c(L)\| = \int_0^l \frac{d}{dt}\|c(t)\| = \int_0^l \mu(t)$$

Wir haben ferner nach Voraussetzung:

$$1 = \|(\hat{E} \circ c)'(t)\| = \|D_{c(t)}\hat{E}(c'(t))\| = \|D_{c(t)}\hat{E}\left(\mu(t)R_t + \nu(t)A_t\right)\|$$
$$= \|\mu(t)D_{c(t)}\hat{E}(R_t) + \nu(t)D_{c(t)}\hat{E}(A_t)\|$$

Jetzt rechnet man aus, dass
(a) $D_{c(t)}\hat{E}(R_t), D_{c(t)}\hat{E}(A_t)$ senkrecht aufeinander stehen, und
(b) $\|D_{c(t)}\hat{E}(R_t)\| = 1$.

Wenn man das hat, folgt dass

$$1 = \|\mu(t)D_{c(t)}\hat{E}(R_t) + \nu(t)D_{c(t)}\hat{E}(A_t)\| = |\mu(t)| + |\nu(t)|\|D_{c(t)}\hat{E}(A_t)\|$$

also $|\mu(t)| \leq 1$, und damit $\|c(L)\| \leq L$.

v) Falls Gleichheit gilt, muss in allen obigen Abschätzungen Gleichheit gelten, also $\nu(t) = 0$ für alle t, und damit ist c Geradensegment.

□

und daraus folgt der obige Satz.

Satz 7.5. *Sei* Δ *ein sphärisches Dreieck (dessen Seiten Großkreisbögen sind) mit Innenwinkeln* α, β, γ. *Dann gilt*

$$\mathrm{Area}(\Delta) = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Der Beweis beinhaltete sehr viele Bilder, und wird hier ausgelassen. Eine Google-Suche nach "Girard's Theorem" liefert aber viele Bilder, Beschreibungen, und interaktive Applets, um den Beweis zu visualisieren.

8. Mittwoch, 9. Mai

Definition 8.1 (Kurven, lokale Definition)**.** Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *reguläre einfache Kurve* falls für jeden Punkt $p \in K$ das folgende gilt. Es gibt eine reguläre glatte parametrisierte Kurve

$$\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^n$$

mit $\phi(0) = p$ und ein $\delta > 0$ sodass

$$\phi : (-\epsilon, \epsilon) \to K \cap B_\delta(p)$$

eine bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrfunktion ist.

Warnung: Diese lokale Definition von Kurven setzt keinen Zusammenhang voraus! D.h. zwei nebeneinanderliegende Kreise, die sich nicht berühren, sind eine "Kurve" im obigen Sinne. Diese (auf den ersten Blick ungewöhliche) Terminologie ist recht üblich, ganz besonders für Flächen (s.u.).

Proposition 8.2.
i) Falls $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *einfach reguläre parametrisierte Kurve ist, dann ist* $c\,((a, b))$ *reguläre einfache Kurve im Sinne der obigen Definition.*
ii) Falls $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *eine einfache, periodische, glatte parametrisierte Kurve ist, dann ist* $\mathrm{im}(c)$ *reguläre einfache Kurve im Sinne der obigen Definition.*

Beweis.
i) Das folgt direkt aus dem Lemma unten, da $c : [a, b] \to \mathrm{im}(c)$ dann bijektiv ist, und damit eine stetige Umkehrfunktion hat.
ii) Das folgt auch aus dem Lemma. Sei dazu $L > 0$ so gewählt, dass $c : [0, L) \to \mathrm{im}(c)$ bijektiv ist (das geht wegen Periodizität). Interpretiere jetzt c als eine Abbildung $c : S^1 \to \mathbb{R}^n$ via $(\cos\theta, \sin\theta) \mapsto c(L\theta/2\pi)$. Diese ist dann bijektiv, und hat da S^1 kompakt ist, eine stetige Umkehrabbildung. Teil ii) folgt jetzt, indem man diese Abbildung auf kleine Kreisbögen einschränkt.

□

Ein nützlicher Zwischenschritt ist das folgende Lemma.

Lemma 8.3. *Sei* K *kompakt und* $\phi : K \to \mathbb{R}^n$ *injektiv und stetig. Dann ist die Umkehrfunktion*

$$\phi^{-1} : \phi(K) \to K$$

auch stetig.

Beweis. Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann gäbe es also eine Folge $\phi(x_i)$ von Bildpunkten die gegen einen Grenzwert $y = \phi(z)$ konvergiert, aber sodass x_i nicht gegen z konvergiert. Da aber K kompakt ist, können wir zu einer Teilfolge übergehen, sodass $x_i \to x \in K$. Wegen Stetigkeit konvergiert dann $\phi(x_i)$ gegen $\phi(x)$. Da Grenzwerte eindeutig sind, folgt $\phi(x) = y = \phi(z)$. Wegen Injektivität folgt $x = z$. Also konvergiert x_i doch gegen z. □

Wichtig ist, dass das nur für *abgeschlossene* Intervalle als Definitionsbereiche stimmt (allgemeiner: für kompakte Mengen).
Warnung: Nicht jede Kurve (im Sinne der lokalen Definition oben) ist Bild einer einzigen parametrisierten Kurve, z.B. wenn sie unzusammenhängend sind. Die Umkehrung von Proposition 8.2 ist also falsch.

9. Freitag, 11. Mai

Ein paar topologische Grundbegriffe:

- Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, falls es für jeden Punkt $x \in X$ ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass der Ball mit Radius ϵ ganz in X enthalten ist:
$$B_\epsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n, \|x - y\| < \epsilon\} \subset X$$
- Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus X$ offen ist.

Warnung: Beliebige Mengen sind im Allgemeinen weder abgeschlossen noch offen!

- Für eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt $U \subset M$ *offen (bzw. abgeschlossen) in M*, falls es eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge X gibt, sodass
$$U = M \cap X.$$

Warnung: Im Allgemeinen ist eine Menge U die offen in M ist, nicht selber offen.

- Eine Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:
  (1) Falls $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ für eine beliebige Menge $U_i, i \in I$ offener Mengen, dann ist $X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$ für endlich viele $i_1, \ldots, i_k$.
  (2) X ist abgeschlossen und beschränkt.
  (3) Jede Folge $x_i \in X$ hat eine Teilfolge, die gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert.
- Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist stetig genau dann wenn das Urbild offener Mengen wieder offen ist, d.h. für jede offene Menge $X \subset \mathbb{R}^m$ ist das Urbild $f^{-1}(X) \subset \mathbb{R}^n$ offen.
- Eine Funktion $f : M \to N$, für $M \subset \mathbb{R}^n, N \subset \mathbb{R}^m$ ist stetig genau dann, falls für jede Menge U die offen in N ist, das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in M ist.

- Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *Homöomorphismus*, falls f stetig und bijektiv ist, und zusätzlich die Umkehrfunktion $f^{-1} : N \to M$ auch stetig ist.

Definition 9.1 (Flächen)**.** Eine Menge $S \subset \mathbb{R}^3$ heißt *(glatte, reguläre) Fläche*, falls es für jeden Punkt $p \in S$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^3$, eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $\phi : U \to V$ gibt, sodass

(1) $p \in V$ (d.h. V ist Umgebung von p)
(2) $\phi : U \to V$ ist glatt,
(3) $\phi(U) = S \cap V$,
(4) $\phi : U \to S \cap V$ ist Homöomorphismus.
(5) Die totale Ableitung $D_u\phi$ hat Rang 2 für alle $u \in U$.

Wir nennen ein ϕ mit diesen Eigenschaften *lokale Parametrisierung um p*, oder *Karte*.

Hier ist die totale Ableitung (oder: Differential) $D_u\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die (eindeutige) lineare Abbildung mit der Eigenschaft, dass sie ϕ besser als linear approximiert, d.h.: für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass für $h \in \mathbb{R}^2$, $\|h\| < \delta$,

$$\|f(u + h) - f(u) - D_u\phi(h)\| < \epsilon\|h\|.$$

Die *Existenz* einer solchen Abbildung ist die Definition von Differenzierbarkeit an der Stelle u.
Die Ableitung $D_u\phi$ wird durch die Matrix beschrieben, deren Spalten die partiellen Ableitungen von ϕ an der Stelle u sind. Diese Matrix heißt *Jacobimatrix (an der Stelle u)* Die Abbildung ϕ ist *stetig differenzierbar* (oder $\mathcal{C}^1$), falls sie überall differenzierbar ist, und die Abbildung $D_u\phi$ stetig von u abhängt. Alternativ: falls partielle Ableitungen überall existieren, und stetig vom Punkt abhängen.
Warnung: Existenz der partiellen Ableitungen an u reicht nicht aus, um Differenzierbarkeit von ϕ zu garantieren. Was ausreicht (aber nicht notwendig ist), ist die Existenz und Stetigkeit partieller Ableitungen in einer kleinen Umgebung von u.

Beispiele für Flächen sind: Ebenen, Graphen von Funktionen, die Sphäre, Drehflächen...

10. Mittwoch, 16. Mai

(Die Zuordnung von Themen zu Tagen stimmt hier und im nächsten Abschnitt nicht ganz, sondern ist so gewählt damit zusammenhängende Themen zusammen erscheinen)
Als nächstes brauchen wir zwei Hilfsmittel aus der Analysis mehrerer Veränderlicher (und einen Begriff):

- Eine Abbildung $F : U \to V$ zwischen offenen Mengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Diffeomorphismus*, falls F differenzierbar und bijektiv ist, und die Umkehrabbildung F^{-1} auch differenzierbar ist.

Satz 10.1 (Umkehrsatz)**.** *Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $F : U \to V$ stetig differenzierbar. Sei $u \in U$ ein Punkt, sodass D_uF invertierbar ist (äquivalent: die Jacobimatrix an der Stelle u hat Determinante $\neq 0$). Dann gibt es eine offene Menge U_0 die u enthält, sodass $V_0 = F(U_0)$ offen ist, und die eingeschränkte Abbildung $F : U_0 \to V_0$ ein Diffeomorphismus ist.*
Wenn F zusätzlich glatt ist, dann ist Umkehrfunktion F^{-1} auch glatt auf U_0.

Eine Konsequenz ist

Satz 10.2 (über die implizit definierten Funktionen)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und sei $z = (z_1, \ldots, z_{n+1})$ ein Punkt sodass $f(z) = 0$. Weiterhin sei $\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(z) \neq 0$.*
Dann gibt es eine offene Menge U_0, die den Punkt z enthält, eine offene Menge $V_0 \subset \mathbb{R}^n$, und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V_0 \to \mathbb{R}$, sodass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(1) $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in U_0$ *und* $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 0$.
(2) $(x_1, \ldots, x_n) \in V_0$, *und* $x_{n+1} = g(x_1, \ldots, x_n)$.

Wenn f glatt ist, dann ist g auch glatt.

Mit anderen Worten: Nullstellenmengen stetig differenzierbarer Funktionen sind lokal Graphen von Funktionen, sofern eine der partiellen Ableitungen nicht verschwindet.
Das kann man verwenden, um Flächen zu konstruieren:

Satz 10.3 (Flächenkriterium)**.** *Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ glatt. Sei $S = f^{-1}(0)$, und angenommen dass $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$ für alle $p \in S$. Dann ist S eine Fläche.*

Beweis. Bär, Proposition 3.1.6. □

Um den Satz griffiger zu formulieren, benutzt man oft den folgenden Begriff:

Definition 10.4. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ heißt *regulärer Wert von f*, falls $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$ für alle $p \in U$ mit $f(p) = x$.

Dann kann man das Flächenkriterium so formulieren: Urbilder regulärer Werte von glatten Funktionen von offenen Mengen im $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}$ sind Flächen.
Warnung: Das Flächenkriterium ist nicht notwendig: Das Urbild eines nicht-regulären Werts kann auch eine Fläche sein.

11. Freitag, 18. Mai

Als nächstes betrachten wir Differenzierbarkeit von Abbildungen in oder aus Flächen. Zunächst eine Konsequenz aus dem Umkehrsatz:

Lemma 11.1 (Fortsetzungslemma)**.** *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, und $\phi : U \to V$ eine lokale Parametrisierung von S. Dann gibt es eine offene Menge $U_0 \subset U$, $\epsilon > 0$, und eine Abbildung $\Phi : U_0 \times (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) Das Bild $W = \Phi\left(U_0 \times (-\epsilon, \epsilon)\right)$ von Φ ist offen, und $\Phi : U_0 \to W$ ist ein (glatter) Diffeomorphismus.
(2) Die Einschränkung von Φ auf $U_0 \times \{0\}$ ist die Parametrisierung ϕ:

$$\Phi(a, b, 0) = \phi(a, b) \qquad \forall (a, b) \in U_0.$$

Beweis. Dieses Lemma wird im Beweis von Bär, Proposition 3.1.9, gezeigt. Die gesuchte Fortsetzung Φ ist die dort konstruierte Abbildung G. □

Als Konsequenzen bekommen wir die folgenden Charakterisierungen von differenzierbaren Abbildungen.

Proposition 11.2. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, und sei $F : W \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung mit $F(W) \subset S$. Sei $w \in W$ beliebig, und $\phi : U \to V$ lokale Parametrisierung von S, sodass $F(w) \in V$. Dann sind äquivalent:*

(1) F ist differenzierbar in w.
(2) $\phi^{-1} \circ F$ ist differenzierbar in w.

Beweis. Bär, Proposition 3.1.9. □

Mit anderen Worten: man kann prüfen ob eine Abbildung F *in eine Fläche hinein* differenzierbar ist, indem man sie in der Parametrisierung ansieht.

Proposition 11.3. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche, sei $f : S \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in S$ ein Punkt. Dann sind äquivalent:*

(1) Es gibt eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^3, p \in V$, und eine Funktion $\hat{f} : V \to \mathbb{R}$ die differenzierbar in p ist, sodass $\hat{f}|_{S \cap V} = f|_{S \cap V}$.
(2) Es gibt eine lokale Parametrisierung $\phi : U \to V$ von S mit $p \in V$, sodass die Abbildung $f \circ \phi$ differenzierbar in $\phi^{-1}(p)$ ist.
(3) Für alle lokalen Parametrisierungen $\phi : U \to V$ von S mit $p \in V$, ist die Abbildung $f \circ \phi$ differenzierbar in $\phi^{-1}(p)$.

Beweis. Bär, Proposition 3.1.11. □

Mit anderen Worten: man kann prüfen ob eine Abbildung F *aus einer Fläche hinaus* differenzierbar ist, indem man sie sich in der Parametrisierung ansieht.

Definition 11.4. Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche. Eine Funktion $f : S \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar, falls die Bedingungen aus Proposition 11.3 an jedem Punkt $p \in S$ erfüllt sind.

12. Mittwoch, 23. Mai

Definition 12.1. Sei S Fläche, und $p \in S$ beliebig. Wir definieren die *Tangentialebene* als

$T_pS = \{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \text{es gibt } \epsilon > 0, c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3 \text{ glatt mit } c(0) = p, c'(0) = v.\}.$

Satz 12.2. *Sei S Fläche, $p \in S$, und $\phi : U \to V$ lokale Parametrisierung mit $p = \phi(q) \in V$. Dann ist*

$$T_pS = \mathrm{im} D_q\phi.$$

Beweis. Bär, Proposition 3.2.2. □

Korollar 12.3. *Sei S Fläche, $p \in S$. Dann ist T_pS eine Ebene, d.h. ein zweidimensionaler, linearer Unterraum des $\mathbb{R}^3$.*

Wenn $v \in \mathbb{R}^3, v \neq 0$, dann definieren wir den *Senkrechtraum*

$$v^\perp = \{w \in \mathbb{R}^3, \langle v, w\rangle = 0\}.$$

Satz 12.4. *Set $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, und x regulärer Wert von f (siehe Definition 10.4). Betrachte die Fläche $S = f^{-1}(x)$. Dann gilt für alle $p \in S$:*

$$T_pS = (\mathrm{grad} f(p))^\perp.$$

Beweis. Bär, Proposition 3.2.4. □

13. Freitag, 25. Mai

Zunächst: Wenn S eine Fläche ist, und $v \in T_pS$ ein Tangentialvektor, dann sagen wir dass eine Kurve c *den Tangentialvektor v definiert*, falls $c : (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}^3$ glatte Kurve ist, mit $c(t) \in S \forall t, c(0) = p, c'(0) = v$.

Definition 13.1. Sei S Fläche, $f : \mathbb{R}^n \to S$ glatte Abbildung, und $p \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt. Dann definieren wir das Differential

$$d_pf : \mathbb{R}^n \to T_{f(p)}S, \quad d_pf(v) = D_pf(v).$$

(man muss zeigen dass das Bild von D_pf wirklich im Tangentialraum liegt)

Definition 13.2. Sei S Fläche, $f : S \to \mathbb{R}^n$ glatt, $p \in S$. Dann definieren wir das Differential als die (eindeutige) lineare Abbildung

$$d_pf : T_pS \to \mathbb{R}^n$$

sodass für alle Kurven c die einen Tangentialvektor $v \in T_pS$ definieren gilt, dass

$$(f \circ c)'(0) = d_pf(v).$$

Hier muss man zeigen dass es ein solches d_pf gibt (und dass es linear und eindeutig ist).

Definition 13.3. Seien S_1, S_2 Flächen, $f : S_1 \to S_2$ glatt, $p \in S_1$. Dann definieren wir das Differential als die (eindeutige) lineare Abbildung

$$d_p f : T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2$$

sodass für alle Kurven c die den Tangentialvektor $v \in T_p S_1$ definieren gilt, dass

$$(f \circ c)'(0) = d_p f(v).$$

(auch hier muss man Existenz und Linearität zeigen; das ist Bär, Proposition 3.2.7.)

Definition 13.4. Sei S Fläche. Die *erste Fundamentalform* ist die Abbildung die jedem $p \in S$ das Skalarprodukt

$$g_p : T_p S \times T_p S \to \mathbb{R}, \quad g_p(v, w) = \langle v, w \rangle$$

zuordnet.

14. Mittwoch, 30. Mai

Drei Sichtweisen auf die erste Fundamentalform:

i) g_p ordnet jeder Tangentialebene (im Raum) ein Skalarprodukt zu.
ii) Für jede Karte $\phi : U \to V$ ordnet g_u jedem Punkt $u \in U$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ zu.
iii) Für jede Karte $\phi : U \to V$ ordnet g_u jedem Punkt $u \in U$ eine Matrix zu.

Bei i) ändert sich der *Raum* auf dem das Skalarprodukt definiert ist für verschiedene p. Bei ii) bleibt der Raum gleich, aber das Skalarprodukt ändert sich.
Um von i) zu ii) zu wechseln, definiert man

$$g_u(v, w) = g_{\phi(u)}(D_u\phi(v), D_u\phi(w)) = \langle D_u\phi(v), D_u\phi(w) \rangle$$

Zwischen ii) und iii) wechselt man wie in linearer Algebra mit der Bijektion zwischen Skalarprodukten und positiv definiten, symmetrischen Matrizen:

Lemma 14.1. *Sei $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Dann ist B eindeutig bestimmt durch die positiv definite symmetrische Matrix*

$$(M_B)_{ij} = B(e_i, e_j)$$

wobei e_i die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ ist. Umgekehrt definiert jede positiv definite symmetrische Matrix M ein Skalarprodukt

$$B_M(v, w) = v^t M w.$$

Warnung: Für verschiedene Karten ϕ sind die Skalarprodukte oder Matrizen in ii), iii) im Allgemeinen verschieden. Man kann mithilfe der Karten beschreiben, wie sie sich ändern (siehe nächster Übungszettel).

Definition 14.2. Sei S Fläche. Ein *Einheitsnormalenfeld* ist eine Abbildung

$$N : S \to \mathbb{R}^3$$

sodass für alle $p \in S$ die folgenden beiden Bedingungen gelten:

$$\|N(p)\| = 1, \qquad N(p) \perp T_pS$$

15. Freitag, 1. Juni

Warnung: Nicht jede Fläche hat ein (stetiges) Einheitsnormalenfeld, z.B. das Möbiusband.
Die Obstruktion ist aber *global* wie das folgende Lemma zeigt:

Lemma 15.1. *Sei S eine Fläche, und $\phi : U \to V$ eine lokale Parametrisierung.*

i) Es gibt ein $\mathcal{C}^1$–Einheitsnormalenfeld $N_\phi : S \cap V \to \mathbb{R}^3$ auf der Fläche $S \cap V$.

ii) Falls $p \in V \cap S$ und $N : S \cap V \to \mathbb{R}^3$ irgend ein stetiges Einheitsnormalenfeld ist, dann gibt es eine Zahl $\delta > 0$ und $\epsilon = \pm 1$, sodass

$$N(q) = \epsilon N_\phi(q)$$

für alle $q \in S \cap B_\delta(p)$.

iii) Seien $p, q \in V$, und sei $c : [0,1] \to S \cap V$ stetige Kurve mit $c(0) = p, c(1) = q$. Sei weiter $N : S \cap V \to \mathbb{R}^3$ irgend ein Einheitsnormalenfeld. Dann gibt es ein $\epsilon = \pm 1$, sodass

$$N(c(t)) = \epsilon N_\phi(c(t))$$

für alle $t \in [0,1]$.

Beweis. i) Wir können N_ϕ in zwei Schritten definieren. Zunächst:

$$N_\phi^0(\phi(u)) = \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_u \times \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_u$$

Da die partiellen Ableitungen von ϕ den Tangentialraum aufspannen, steht dieser Vektor dann senkrecht auf $T_{\phi(u)}S$. Also ist dann

$$N_\phi(\phi(u)) = \frac{1}{\|N_\phi^0(\phi(u))\|} N_\phi^0(\phi(u))$$

das gesuchte Einheitsnormalenfeld.

ii) Der Tangentialraum $T_{\phi(u)}S$ hat für jedes $u \in U$ genau zwei Einheitsnormalenvektoren, nämlich $N_\phi(\phi(u))$ und $-N_\phi(\phi(u))$. Also gibt es eine Funktion $\epsilon : U \to \mathbb{R}$ die nur die Werte ± 1 annimmt, sodass

$$N(\phi(u)) = \epsilon(u) N_\phi(\phi(u))$$

gilt. Sei also $p = \phi(u)$ und $\epsilon(p) = 1$ (der andere Fall geht genauso). Angenommen die Behauptung wäre falsch. Dann gäbe es Punkte $\phi(u_i) \in B_{1/i}(p)$ mit $\epsilon(\phi(u_i)) = -1$. Dann ist aber $\lim u_i = u$ und

$$N(p) = N(\phi(u)) = N_\phi(\phi(u)) \neq -N_\phi(\phi(u)) = \lim -N_\phi(\phi(u_i)) = \lim N(\phi(u_i))$$

was der Stetigkeit von N widerspricht.

iii) Sei $\epsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion sodass
$$N(c(t)) = \epsilon(t) N_\phi(c(t))$$
und nehme an dass ϵ nicht konstant wäre. Seien I^+, I^- die Mengen auf denen ϵ den Wert $+1$ oder -1 annimmt. Diese sind offenbar disjunkt, und ihre Vereinigung ist das ganze Intervall. Wegen ii) sind sie auch beide offen. Das ist unmöglich, wenn sie beide nicht leer sind (betrachte das Supremum oder Infimum einer Intervalls – das müsste dann in beiden liegen).

□

Definition 15.2. Eine Fläche S heißt *orientierbar*, falls es auf S ein (stetiges) Einheitsnormalenfeld gibt.

Proposition 15.3. *Sei S eine Fläche. Dann ist S orientierbar, genau dann wenn es eine Menge*
$$\mathcal{A} = \{\phi_i : U_i \to V_i\}$$
von lokalen Parametrisierungen von S gibt, sodass

i) Jeder Punkt $p \in S$ liegt im Bild V_i mindestens einer Karte $\phi_i \in \mathcal{A}$.
ii) Für je zwei Karten $\phi_i, \phi_j \in \mathcal{A}$ und jeden Punkt $p \in V_i \cap V_j$ gilt
$$\det\left(d_p \phi_j^{-1} d_{\phi_i^{-1}(p)} \phi_i\right) > 0.$$

Eine solche Menge $\mathcal{A}$ heißt orientierter Atlas.

Beweis. Bär, Satz 3.4.7. □

16. Mittwoch, 6. Juni

Wenn S eine orientierbare Fläche ist, und N ein (stetiges) Einheitsnormalenfeld, dann kann man N interpretieren als Abbildung
$$N : S \to S^2,$$
und diese *Gaußabbildung* ist dann automatisch differenzierbar (Blatt 9). Wir haben also ein Differenzial
$$d_p N : T_p S \to T_{N(p)} S^2 = (N(p))^\perp = T_p S$$
und wir nennen
$$W_p = -d_p N$$
die *Weingartenabbildung.*

Die Weingartenabbildung kann man allgemein ausrechnen für Rotationsflächen, d.h. Flächen
$$S = \{(x,y,z) | x^2 + y^2 = g(z)^2\}$$
für glatte Funktionen $g : I \to \mathbb{R}$ (wobei I eine offene Menge in $\mathbb{R}$ ist). Nützliches Hilfsmittel ist die Abbildung
$$F : \mathbb{R} \times I \to S, \quad F(\theta, r) = \begin{pmatrix} g(r)\cos\theta \\ g(r)\sin\theta \\ r \end{pmatrix}$$

Diese Abbildung ist surjektiv, und

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -g(r)\sin\theta \\ g(r)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \begin{pmatrix} g'(r)\cos\theta \\ g'(r)\sin\theta \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basis des Tangentialraums $T_{F(\theta,r)}S$.
Ein Einheitsnormalenfeld ist gegeben durch

$$N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+(g'(z))^2}} \begin{pmatrix} x/g(z) \\ y/g(z) \\ -g'(z) \end{pmatrix}.$$

Was oft nützlich ist, ist auch die Formel

$$N \circ F(\theta, r) = \frac{1}{\sqrt{1+(g'(r))^2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -g'(r) \end{pmatrix}.$$

Damit bekommt man

$$d_{F(\theta,r)}N\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial N \circ F}{\partial \theta} = \frac{1}{g(r)\sqrt{1+(g'(r))^2}} \frac{\partial F}{\partial \theta}$$

und

$$d_{F(\theta,r)}N\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) = \frac{\partial N \circ F}{\partial r} = -\frac{1}{\sqrt{1+(g'(r))^2}^3} g''(r) \frac{\partial F}{\partial r}$$

Mit anderen Worten, die Weingartenabbildung ist (bezüglich unserer oben gewählten Basis des Tangentialraums)

$$W_p = -\frac{1}{\sqrt{1+(g'(z))^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{g(z)} & 0 \\ 0 & -\frac{g''(z)}{1+g'(z)^2} \end{pmatrix}.$$

17. Freitag, 8. Juni

Satz 17.1. *Sei S eine orientierbare Fläche, $p \in S$ ein Punkt und W_p die Weingartenabbildung. Dann ist W_p selbstadjungiert bezüglich der ersten Fundamentalform g_p:*

$$\forall v, w \in T_pS : g_p(W_p v, w) = g_p(v, W_p w).$$

Beweis. Bär, Proposition 3.5.5. □

Hier ist ein Wort angebracht was den Begriff "orientierte Fläche" angeht. Wenn wir sagen, dass S orientierbar ist, meinen wir dass es ein stetiges Einheitsnormalenfeld gibt. Es gibt aber immer mindestens zwei – mit N ist auch $-N$ ein stetiges Einheitsnormalenfeld. Insofern ist auch die Weingartenabbildung einer orientier*baren* Fläche nicht wohldefiniert. Wenn wir sagen: "Sei S orientierbare Fläche mit Weingartenabbildung W_p" meinen mir damit also, dass wir ein Einheitsnormalenfeld gewählt haben, und W_p die davon definierte Weingartenabbildung ist.

Definition 17.2. Sei S orientierbare Fläche, mit erster Fundamentalform g_p und Weingartenabbildung W_p. Dann definieren wir die *zweite Fundamentalform*

$$\mathrm{II}_p(v,w) = g_p(W_p v, w).$$

Der Satz bedeutet dann: Die zweite Fundamentalform ist symmetrisch:

$$\mathrm{II}_p(v,w) = \mathrm{II}_p(w,v).$$

Ähnlich wie bei der ersten Fundamentalform können wir bezüglich einer Karte $\phi : U \to V$ von S die zweite Fundamentalform als eine Matrix darstellen. Sei $p = \phi(u)$ ein Punkt. Dann wissen wir, dass

$$b_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(u), \quad b_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(u)$$

eine Basis von T_pS ist. Dann ist die zweite Fundamentalform beschrieben durch die Matrix

$$\mathrm{II}_{ij}(u) = \mathrm{II}_p(b_i, b_j).$$

Da II symmetrische Bilinearform ist, ist II_{ij} eine symmetrische Matrix.

Wie immer, rechnen wir das für Rotationsflächen aus, bezüglich der vorher auch benutzten Matrix:

$$\mathrm{II}(\theta, r) = -\frac{1}{\sqrt{1+(g'(r))^2}} \begin{pmatrix} g(r) & 0 \\ 0 & g''(r) \end{pmatrix}.$$

18. Mittwoch, 13. Juni

Definition 18.1. Sei S eine orientierte Fläche mit Einheitsnormalenfeld N, und $c : (a,b) \to S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Raumkurve. Dann ist die *Normalkrümmung*

$$\kappa_{\mathrm{nor}}(t) = \langle c''(t), N(c(t)) \rangle.$$

Damit können wir geometrisch beschreiben, was die zweite Fundamentalform misst:

Satz 18.2. *Sei S orientierte Fläche, mit zweiter Fundamentalform* II. *Sei $c : (a,b) \to S$ nach Bogenlänge parametrisierte, glatte Raumkurve. Dann gilt*

$$\kappa_{\mathrm{nor}}(t) = \mathrm{II}_{c(t)}(c'(t), c'(t)).$$

Beweis. Bär, Satz 3.6.1. □

Insbesondere hängt die Normalkrümmung einer Raumkurve c, die durch eine Fläche verläuft, an jedem Punkt $c(t)$ nur von der Richtung $c'(t)$ ab.
Da W_p selbstadjungiert ist, folgt aus dem Spektralsatz (aus linearer Algebra), dass es eine orthonormale Basis von T_pS gibt, die aus Eigenvektoren von W_p besteht.

Definition 18.3. Ein Eigenvektor v von W_p heißt *Hauptkrümmungsrichtung* der Fläche S am Punkt p. Der zugehörige Eigenwert heißt *Hauptkrümmung*.

Die Beobachtung oben zeigt, dass es immer zwei orthogonale Hauptkrümmungsrichtungen gibt.
Das können wir jetzt auf unseren Beispielen ausrechnen: In der Ebene sind alle Richtungen Hauptkrümmungsrichtungen, und alle Hauptkrümmungen sind 0. Auf der Sphäre ist auch jede Richtung Hauptkrümmungsrichtung, und alle Hauptkrümmungen sind -1. Auf dem Zylinder gibt es zwei Hauptkrümmungsrichtungen, und die Hauptkrümmungen sind $0, -1$.

Definition 18.4. Sei S orientierte Fläche, und b_1, b_2 eine Basis von T_pS aus Hauptkrümmungsrichtungen, mit zugehörigen Hauptkrümmungen κ_1, κ_2.
Die *Gaußkrümmung* $K(p) = \kappa_1\kappa_2$ der orientierten Fläche S am Punkt p ist das Produkt der Hauptkrümmungen. Alternativ,

$$K(p) = \det(W_p).$$

Die *mittlere Krümmung* ist der Mittelwert der Hauptkrümmungen

$$H(p) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(W_p).$$

Die Gaußkrümmung ändert sich nicht, wenn man das Einheitsnormalenfeld N durch $-N$ ersetzt, und hängt nur von N in einer Umgebung von p ab. Also kann man $K(p)$ auch für nicht-orientierbare Flächen definieren.

Definition 18.5. Sei S orientierte Fläche, und $p \in S$ ein Punkt.

i) Der Punkt p heißt *elliptisch*, falls $K(p) > 0$.
ii) Der Punkt p heißt *hyperbolisch*, falls $K(p) < 0$.
iii) Der Punkt p heißt *parabolisch*, falls $K(p) = 0$, aber eine der Hauptkrümmungen nicht 0 ist.
iv)
v) Der Punkt p heißt *Flachpunkt*, falls beide Hauptkrümmungen bei p Null sind.

19. Freitag, 15. Juni

Satz 19.1. *Sei S Fläche und N ein Einheitsnormalenfeld auf S. Sei $p \in S$, $b_1, b_2 \in T_pS$ eine Orthonormalbasis, und nehme an dass $(b_1, b_2, N(p))$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Dann gibt es eine lokale Parametrisierung $\phi : U \to V$, wobei U Umgebung von 0 und V Umgebung von p ist, so dass*

(1) $\phi(0,0) = p$,
(2) $g_{ij}(0,0) = \delta_{ij}$ *für die erste Fundamentalform bezüglich* ϕ,
(3)

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(0,0) = 0,$$

(4)

$$\phi(u) = p + u_1 b_1 + u_2 b_2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j} h_{ij}(0,0) u_i u_j N(p) + \mathcal{O}(\|u\|^3),$$

wobei h_{ij} die zweite Fundamentalform bezüglich ϕ ist.

Beweis. Bär, Satz 3.6.15 □

20. Mittwoch, 20. Juni

Korollar 20.1. *Sei S Fläche, und $p \in S$ ein Punkt. Dann gibt es eine Umgebung V von p, sodass $S \cap V$ ein Graph über der affinen Tangentialebene $p + T_pS$ ist.*

Beweis. Bär, Korollar 3.6.16 □

Mit diesem Korollar, und vor allem dem Satz vom letzten Mal kann man Krümmungsinformationen an einem Punkt übersetzen in die geometrische Lage der Fläche bezüglich ihrer Tangentialebene.

Definition 20.2. Sei S eine Fläche, und $c : (a,b) \to S$ eine Kurve. Ein *Vektorfeld entlang* c ist eine Abbildung

$$V : (a,b) \to \mathbb{R}^3$$

sodass

$$V(t) \in T_{c(t)}S, \quad \forall t \in (a,b).$$

Mit anderen Worten, ein Vektorfeld wählt für jeden Zeitpunkt t einen Tangentialvektor $V(t)$ am Punkt $c(t)$ aus.

Definition 20.3. Sei S eine Fläche, $c : (a,b) \to S$ eine Kurve, und V ein differenzierbares Vektorfeld entlang c. Die *kovariante Ableitung von* V ist

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V = \Pi_{c(t)}(V'(t)).$$

Hier ist V' die übliche Ableitung von V als Abbildung $(a,b) \to \mathbb{R}^3$, und $\Pi_{c(t)}$ ist die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $T_{c(t)}S$.

Die kovariante Ableitung $\frac{\nabla}{dt}V$ ist damit wieder ein Vektorfeld entlang c.

21. Freitag, 22. Juni

Rechenregeln für die kovariante Ableitung (es ist immer eine Kurve $c : (a,b) \to S$ gewählt):

(1) Wenn V, W differenzierbare Vektorfelder sind:

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t (V + W) = \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V + \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t W$$

(2) Wenn V differenzierbares Vektorfeld, und f differenzierbare Funktion ist:

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t (fV) = f'(t)V(t) + f(t)\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V$$

(3) Wenn V, W differenzierbare Vektorfelder sind:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t g_{c(t)}(V(t), W(t)) = g_{c(t)}\left(\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V, W(t)\right) + g_{c(t)}\left(V(t), \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t W\right)$$

(4) Wenn V Vektorfeld, und $\varphi : (a', b') \to (a, b)$ differenzierbare Umparametrisierung, dann ist $V \circ \varphi$ Vektorfeld entlang $c \circ \varphi$. Dann gilt für die (zwei verschiedenen!) kovarianten Ableitungen:

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t (V \circ \varphi) = \varphi'(t) \left.\frac{\nabla}{dt}\right|_{\varphi(t)} V$$

Definition 21.1. Sei S Fläche, $p \in S$ Punkt, und $\phi : U \to V$ lokale Parametrisierung um p. Dann definieren wir die *Christoffel-Symbole* (bezüglich der Karte ϕ) als die Zahlen $\Gamma_{ij}^k(u)$ mit der Eigenschaft

$$\Pi_{\phi(u)}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}\right) = \Gamma_{ij}^1(u) \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right|_u + \Gamma_{ij}^2(u) \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right|_u$$

Mithilfe der Christoffel-Symbole können wir die kovariante Ableitung in lokalen Koordinaten beschreiben. Nämlich: sei $\phi : U \to V$ eine lokale Parametrierung, und $c : (a, b) \to V \cap S$ eine differenzierbare Kurve. Sei dann $\widetilde{c}(t) = \phi^{-1}(c(t))$ (d.h. die Kurve in der Karte, die c beschreibt), und schreibe

$$\widetilde{c}(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

Wir können dann ein Vektorfeld V entlang c lokal beschreiben als

$$V(t) = \sum_{i=1}^{2} \nu_i(t) \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_{\widetilde{c}(t)}.$$

Dann rechnet man aus (Bär, Gleichung (4.2) in Abschnitt 4.2)

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V = \sum_{k=1}^{2} \left(\nu_k'(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \nu_i(t) \gamma_j'(t)\right) \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right|_{\widetilde{c}(t)}.$$

Was man hieraus mitnehmen sollte ist:

(1) Die Christoffel-Symbole kontrollieren in lokalen Koordinaten den Unterschied zwischen der "naiven" Ableitung $\begin{pmatrix} \nu_1'(t) \\ \nu_2'(t) \end{pmatrix}$, bei der man einfach die beschreibende Funktion ableitet[1], und der kovarianten Ableitung $\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V$.

(2) Die kovariante Ableitung $\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V$ hängt an einem Zeitpunkt $t = t_0$ von $c(t_0), c'(t_0), \nu(t_0), \nu'(t_0)$ und V in einer Umgebung von $c(t_0)$ ab – nicht aber von höheren Ableitungen der ν_i, oder dem Verhalten der ν_i nahe t_0, oder dem Verhalten von $c(t)$!

Der zweite Punkt ist so wichtig, dass wir ihn festhalten:

[1] Diese "naive" Ableitung ist ganz problematisch, da das resultierende Objekt üblicherweise von der Wahl der Karte abhängt

Lemma 21.2. *Sei S Fläche, $c : (a,b) \to S$ Kurve, und V ein Vektorfeld entlang c. Dann hängt*

$$\left.\frac{\nabla}{dt}\right|_t V$$

an einem Zeitpunkt $t = t_0$ nur von $c(t_0), c'(t_0)$ und V in einer Umgebung von $c(t_0)$ ab.

22. Mittwoch, 27. Juni

Sei S Fläche und $\phi : U \to V$ eine Karte. Die erste Fundamentalform ist dargestellt durch Funktionen

$$g_{ij}(u) = \left\langle \left.\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right|_u, \left.\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right|_u \right\rangle.$$

Da die erste Fundamentalform nichtausgeartet ist, folgt:

Lemma 22.1. *Es gibt Funktionen $g^{ij} : U \to \mathbb{R}$ sodass*

$$\sum_j g_{ij}(u)g^{jk}(u) = \delta_{ik}$$

für alle $u \in U$.

Beweis. Die Matrix

$$G(u) = \begin{pmatrix} g_{11}(u) & g_{12}(u) \\ g_{21}(u) & g_{22}(u) \end{pmatrix}.$$

hat keinen Kern. Denn:

$$v^t G(u) w = \langle D_u\phi(v), D_u\phi(w)\rangle,$$

und wäre $G(u)w = 0$ für irgend ein $w \neq 0$, dann wäre

$$0 = \langle D_u\phi(v), D_u\phi(w)\rangle,$$

für alle v. Da $D_u\phi$ Rang 2 hat, und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nichtausgeartet ist, kann das nicht sein. □

Mithilfe dieser Funktionen kann man die Christoffel-Symbole ausrechnen, ohne zu wissen wie die Karte genau aussieht:

Lemma 22.2.

$$\Gamma_{ij}^k(u) = \frac{1}{2}\sum_m \left(\left.\frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i}\right|_u + \left.\frac{\partial g_{im}}{\partial x_j}\right|_u - \left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\right|_u \right) g^{mk}(u)$$

Beweis. Bär, Lemma 4.2.14 □

Definition 22.3. Ein Vektorfeld V auf einer Fläche ist eine Funktion $V : S \to \mathbb{R}^3$, sodass $V(p) \in T_pS$ für alle $p \in S$ ist.

Definition 22.4. Wenn V Vektorfeld auf S ist, und $w_p \in T_pS$ Tangentialvektor, dann definieren wir die *kovariante Ableitung* als

$$\nabla_{w_p} V = \frac{\nabla}{dt}(V \circ c)(0)$$

wobei $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ eine Kurve mit $c(0) = p, c'(0) = w_p$ ist.

Man prüft nach, dass diese Definition Sinn ergibt, d.h. dass das Ergebnis unabhängig von der Wahl von c ist (das ist direkt aus Lemma 21.2).
Mit der Rechnung vom letzten Mal (siehe auch vorige Vorlesung hier im Miniskript) kann man dann die folgende lokale Form herleiten:
Angenommen $\phi : U \to V$ ist Karte, V ein Vektorfeld. Dann gibt es Funktionen $\nu_i : U \to \mathbb{R}$, sodass:

$$V(\phi(u)) = \sum_i \nu_i(u) \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_u .$$

Schreibe außerdem

$$w_p = \sum_i \omega_i \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right|_u$$

Dann haben wir

$$(\nabla_{w_p} V) = \sum_k \left(\sum_l \left.\frac{\partial \nu_i}{\partial x_l}\right|_u \omega_l + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k(u) \nu_i(u) \omega_j \right) \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right|_u$$

Wenn V, W beides Vektorfelder sind, dann ist

$$\nabla_W V$$

wieder ein Vektorfeld, das p den Vektor $\nabla_{W(p)} V$ zuordnet.
Wir haben Rechenregeln für die kovariante Ableitung, die man z.B. aus der lokalen Form herleiten kann:

- $\nabla_W(\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2) = \lambda_1 \nabla_W V_1 + \lambda_2 \nabla_W V_2$,
- $\nabla_{\lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2} V = \lambda_1 \nabla_{W_1} V + \lambda_2 \nabla_{W_2} V$,
- $\nabla_W (fV)\big|_p = d_p f(W(p)) V(p) + f(p)\, \nabla_W V\big|_p$,
- $\nabla_{fW} V\big|_p = f(p)\, \nabla_W V\big|_p$.

Als nächstes wollen wir zweite Ableitungen definieren. Hierbei gibt es eine kleine Schwierigkeit. Falls nämlich V, W, Z Vektorfelder sind, dann ist zwar

$$\nabla_V \nabla_W Z$$

ein wohldefiniertes Vektorfeld, aber (wie man z.B. an der lokalen Form sehen kann) das Ergebnis wird Ableitungen von W in Richtung von V enthalten. Als Konsequenz wird $\nabla_V \nabla_W Z\big|_p$ nicht nur von $V(p), W(p)$ abhängen, sondern auch von Ableitungen von W – und das möchten wir nicht. Um dieses Problem zu umgehen, machen wir stattdessen die folgende Definition:

Definition 22.5. Die *zweite kovariante Ableitung* ist

$$\nabla^2_{V,W} Z = \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_{\nabla_V W} Z$$

In der Tat kann man dann nachrechnen, dass $\nabla^2_{V,W} Z\Big|_p$ nur durch $V(p), W(p)$ von V und W abhängt (Bär, Korollar 4.3.3), und man kann eine sehr lange, und minder erhellende lokale Formel herleiten (Bär, Lemma 4.3.2). Wir brauchen nur die folgende Konsequenz

Korollar 22.6. *Der Wert des Vektorfelds*
$$\nabla^2_{V,W} Z - \nabla^2_{W,V} Z$$
hängt am Punkt p nur von $V(p), W(p), Z(p)$ ab (und keinen Ableitungen der V, W, Z!).

23. Freitag, 29. Juni

Ein wichtiges Beispiel für Vektorfelder: das *Gradientenfeld* einer Funktion. Sei nämlich $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. An jedem Punkt $p \in S$ gibt es dann einen eindeutigen Tangentialvektor $w \in T_pS$ sodass
$$d_pf(v) = g_p(v, w)$$
für alle v, da g_p nicht-ausgeartet ist. Das Gradientenfeld ist dann das Vektorfeld $\mathrm{grad} f : S \to \mathbb{R}^3$ sodass
$$d_pf(v) = g_p(v, \mathrm{grad} f(p))$$
für alle p.
Ist $X : S \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, und $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, dann definieren wir die Richtungsableitung
$$Xf(p) = d_pf(X(p)).$$
Dies ist wieder eine Funktion (ähnlich wie übliche partielle Ableitungen).

Lemma 23.1. *Seien X, Y $\mathcal{C}^{k+1}$-Vektorfelder auf S. Dann gibt es ein eindeutiges $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld $[X, Y]$ mit der Eigenschaft dass*
$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$$
für alle $\mathcal{C}^2$-Funktionen $f : S \to \mathbb{R}$.

Beweis. Bär, Aufgabe 4.9 (der Hinweis darunter erklärt wie man vorgehen soll) □

Lemma 23.2. *Sei S Fläche, X $\mathcal{C}^k$-Vektorfeld auf S und $p \in S$. Dann gibt es eine offene Umgebung V von p und eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $\hat{X} : V \to \mathbb{R}^3$, sodass*
$$\hat{X}(p) = X(p) \quad \forall p \in V \cap S.$$
Mit anderen Worten: man kann Vektorfelder lokal in eine offene Umgebung der Fläche fortsetzen.

Mit so einer Fortsetzung ist dann die kovariante Ableitung eines Vektorfelds einfach der tangentiale Anteil der üblichen Ableitung:
$$\nabla_Y X(p) = \Pi_p(D_p\hat{X}(Y(p))).$$

Satz 23.3 (Gauß-Gleichung)**.** *Sei S Fläche und $X, Y, Z, W \in T_pS$. Dann gilt*
$$g_p(R(X,Y)Z,W) = \mathrm{II}(Y,Z)\mathrm{II}(X,W) - \mathrm{II}(X,Z)\mathrm{II}(Y,W).$$

Beweis. Bär, Satz 4.3.7 □

Satz 23.4 (Theorema Egregium)**.** *Sei S Fläche und e_1, e_2 eine Orthonormalbasis von T_pS. Dann gilt*
$$K(p) = g_p(R(e_1,e_2)e_2,e_1).$$

Beweis. Bär, Satz 4.3.8 □

24. Mittwoch, 4. Juli

Eine Konsequenz aus dem Theorema Egregium:

Satz 24.1. *Seien $S, \hat{S}$ zwei Flächen, und $f : S \to \hat{S}$ eine lokale Isometrie, d.h. d_pf ist (lineare) Isometrie für alle p bezüglich der ersten Fundamentalformen. Dann gilt für alle $p \in S$:*
$$K(f(p)) = K(p)$$
wobei links die Gauß-Krümmung von $\hat{S}$ und rechts die von S gemeint ist.

Beweis. Wähle eine Karte $\phi : U \to V$ von S um p. Zunächst überlegen wir uns, dass $\hat{\phi} = f \circ \phi : U \to f(V)$ eine Karte von $\hat{S}$ um $f(p)$ ist (nachdem wir möglicherweise U verkleinern). Das folgt aus dem Umkehrsatz: $d_u\hat{phi}$ ist invertierbar als Komposition der Rang-2 Ableitung $D\phi$ unserer ursprünglichen Karte und der Isometrie df. Also sagt der Umkehrsatz, dass (nach Verkleinern von U) $\hat{\phi}$ Diffeomorphismus ist, also Karte.

Jetzt berechnen wir die ersten Fundamentalformen $g_{ij}, \hat{g}_{ij}$ von $S, \hat{S}$ bezüglich dieser beiden Karten und stellen fest:
$$\hat{g}_{ij}(u) = g_{\hat{\phi}(u)}\left(\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_i}(u), \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x_j}(u)\right) = g_{\hat{\phi}(u)}\left(d_{\phi(u)}f\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(u), d_{\phi(u)}f\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(u)\right)$$
$$= g_{\phi(u)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(u), f\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(u)\right) = g_{ij}(u)$$

Mit anderen Worten, die (lokalen) ersten Fundamentalformen von $S, \hat{S}$ sind *identisch* bezüglich der beiden gewählten Karten.

Damit sind dann (Lemma 2.22) auch die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k und $\hat{\Gamma}_{ij}^k$ identisch, und damit kovariante Ableitungen (siehe Formel auf Seite 23). Das führt dazu dass zweite kovariante Ableitungen identisch sind, also auch die Krümmungstensoren. Wegen dem Theorema Egregium impliziert das Gleichheit der Krümmung. □

Korollar 24.2. *Es gibt keine lokale Isometrie $f : U \to V$ für $U \subset \mathbb{R}^2$ und $V \subset S^2$ offen. Mit anderen Worten: jede Landkarte* muss *irgendwo Abstände verzerren.*

Beweis. Die Sphäre S^2 hat überall $K = 1$, die Ebene hat überall $K = 0$. □

Korollar 24.3. *Eine Fläche, die lokal isometrisch zu $U \subset \mathbb{R}^2$ offen ist, hat nirgends einen Sattelpunkt.*

Beweis. Ein Sattelpunkt hat $K < 0$. □

Als nächstes wollen wir Kurven kleinster Länge finden. Dazu zunächst ein etwas anderer Begriff:

Definition 24.4. Sei S Fläche und $c : (a, b) \to S$ differenzierbare Kurve. Die *Energie* von c ist definiert als

$$E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{c(t)}(c'(t), c'(t))dt.$$

Wir haben

Lemma 24.5. *Für jede differenzierbare Kurve gilt*

$$l(c)^2 \leq 2(b - a)E(c),$$

mit Gleichheit genau dann wenn c konstante Geschwindigkeit hat (d.h. $\|c'(t)\|$ konstant).

Beweis. Bär, Lemma 4.5.3 □

Korollar 24.6. *Eine Kurve minimiert Länge zwischen zwei Punkten genau dann wenn sie Energie minimiert und konstante Geschwindigkeit hat.*

Definition 24.7. Sei $c : [a, b] \to S$ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve. Eine *Variation von c* (oder Familie von Kurven um c) ist eine $\mathcal{C}^1$-Funktion $f : (-\epsilon, \epsilon) \times [a, b] \to S$, sodass $f(0, t) = c(t)$ für alle t. Wir nennen

$$c_s(t) = f(s, t)$$

die Kurven in der Variation (oder Familie), und

$$V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$$

das Variationsvektorfeld. Die Variation hat *feste Endpunkte* falls

$$f(s, a) = c(a), \quad f(s, b) = c(b) \qquad \forall s$$

Für die zweiten Ableitungen einer Variation gibt es die folgende Symmetrie:

Lemma 24.8. *Sei f eine $\mathcal{C}^2$-Variation von c. Dann gilt*

$$\frac{\nabla}{ds}\frac{\partial f}{\partial t}(s, t) = \frac{\nabla}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(s, t).$$

Beweis. Bär, Lemma 4.5.4. □

Satz 24.9 (Variation der Energie)**.** *Sei f eine $\mathcal{C}^2$-Variation einer Kurve c mit festen Endpunkten, und V das Variationsvektorfeld. Dann gilt*

$$\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} E(f_s) = -\int_a^b g_{c(t)}\left(V(t), \frac{\nabla}{dt}c'(t)\right).$$

Beweis. Bär, Satz 4.5.5. □

25. Freitag, 6. Juli

Die Variationsformel der Energie vom letzten Mal impliziert das folgende:

Korollar 25.1. *Seien p, q zwei Punkte auf einer Fläche S. Falls c eine Kurve minimaler Energie ist, die p mit q verbindet, dann gilt*

$$\frac{\nabla}{dt}c' = 0$$

Kurven mit der Eigenschaft des vorherigen Korollars sind sehr wichtig:

Definition 25.2. Sei S eine Fläche. Eine Kurve $c : (a, b) \to S$ heißt *Geodätische*[2], falls sie $\mathcal{C}^2$ ist und

$$\frac{\nabla}{dt}c' = 0$$

Da Geodätische über eine Differentialgleichung definiert sind, hat man die folgende lokale Existenz und Eindeutigkeit:

Satz 25.3. *Sei S Fläche, $p \in S$ Punkt und $v \in T_pS$ Tangentialvektor. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine eindeutige Geodätische $c : (-\epsilon, \epsilon) \to S$ mit $c(0) = p, c'(0) = v$.*

Wir können damit die *Exponentialabbildung* definieren:

$$\exp_p(v) = c(1)$$

falls $c : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \to S$ eine Geodätische ist, die $c(0) = p, c'(0) = v$ erfüllt. Eine solche muss es nicht für jedes v geben, aber:

Lemma 25.4. *Es gibt eine offene Menge $U \subset T_pS$, die 0 enthält, und sodass $\exp_p$ auf U definiert, und differenzierbar ist.*

Wir können die Ableitung der Exponentialabbildung am Ursprung leicht ausrechnen:

Lemma 25.5.

$$d\exp_p(v) = v.$$

Insbesondere kann man den Umkehrsatz anwenden, um zu sehen, dass die Exponentialabbildung in einer Umgebung von 0 ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Das kann man jetzt verwenden, um besonders gute Koordinaten zu konstruieren.

Satz 25.6. *Sei S Fläche und $p \in S$ ein Punkt. Dann gibt es $r_0 > 0$, sodass die Abbildung $F : (0, r) \times (0, 2\pi) \to S$ definiert durch*

$$(r_0, \theta) \mapsto \exp_p\left(\begin{pmatrix} r\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}\right)$$

[2] Eine *Geodäte* ist jemand, die Geodäsie studiert hat...

eine lokale Parametrisierung von S ist. Die erste Fundamentalform hat bezüglich dieser Karte die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(r,\theta) \end{pmatrix}$$

für eine Funktion f.

Ganz genau wie im Fall der Sphäre zeigt man daraus:

Korollar 25.7. *Geodätische sind* lokal *die kürzeste Wege.*