Prof. Dr. Sebastian Hensel Sommersemester 2018

Argumente der GTF

Was ist dieses Dokument? (und was ist es nicht?)

Dieser Text fasst einige der wichtigsten Standardargumente zusammen, die im Studium von Flächen im $\mathbb{R}^3$ (und damit der Vorlesung, den Hausaufgaben und der Klausur) immer wieder vorkommen. Wichtig bei diesem Satz sind insbesondere: *einige*, *wichtigste* und *Standard* – mit anderen Worten: die hier vorgestellten "Tricks" und Methoden sind manchmal notwendig, aber nicht unbedingt hinreichend, um alle Aufgaben zu lösen. Die Argumente hier sind quasi als "Werkzeugkasten" zu verstehen – häufige Handgriffe, die man oft im Laufe von schwierigeren Argumenten benutzt. Umgekehrt: wenn man diese Argumente und Tricks gut versteht, sollte man viele übliche Aufgaben lösen können.

Sortiert sind die Beispiele grob nach der Chronologie der Vorlesung, und damit nach dem Thema bei dem die Methode zum ersten Mal erschienen ist.

Falls etwas falsch, seltsam, oder unverständlich scheint, bitte ich um einen kurzen Kommentar (persönlich oder per email). Dasselbe gilt, falls ein neues Argument gewünscht ist.

1. Homöomorphismus prüfen (Definition von Flächen)

Um zu zeigen, dass etwas eine Fläche ist, muss man häufiger zeigen dass eine Abbildung ein Homöomorphismus ist. Dazu gibt es zwei Ansätze die regelmäßig auftauchen.

1.1. Umkehrabbildung "raten".

Aussage 1.1. *Sei*

$$S^1_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2=1, y>0\}$$

der obere Halbkreis. Dann ist die Abbildung

$$f:(0,\pi) \to S^1_+, \qquad f(t) = (\cos(t), \sin(t))$$

ein Homöomorphismus.

Idee: Um zu zeigen, dass f Homöomorphismus ist, wollen wir aus $(\cos(t), \sin(t))$ stetig die Variable t rekonstruieren. Wenn wir $\cos(t)$ haben, können wir versuchen arccos auf die erste Koordinate anzuwenden.

Beweis. Zunächst überlegen wir uns dass f surjektiv ist. Sei $(x,y) \in S^1_+$. Dann ist $y = \sqrt{1-x^2} > 0$, da sich die Quadrate der Koordinaten auf 1 summieren, und y positiv ist. Insbesondere ist $x \in (-1,1)$, und y ist eindeutig durch x bestimmt. Da $\cos(t)$ für $t \in (0,\pi)$ jeden Wert in $(-1,1)$ genau einmal annimmt, gibt es also $t_x \in (0,\pi)$ sodass $\cos(t_x) = x$. Ferner ist $\sin(t_x) > 0$, und $\cos(t_x)^2 + \sin(t_x)^2 = 1$, also ist $(x,y) = f(t_x)$. Damit ist f also surjektiv.
Wir betrachten den Arcuscosinus

$$\arccos : (-1,1) \to (0,\pi)$$

mit der Eigenschaft, dass $\arccos\cos(t) = t$ für alle $t \in (0,\pi)$. Das es so eine Funktion gibt, und dass sie stetig ist, wissen wir aus Analysis.
Definiere jetzt

$$g : S^1_+ \to (0,\pi), \quad g(x,y) = \arccos(x).$$

Das ist eine stetige Funktion, und

$$g(f(t)) = \arccos\cos(t) = t.$$

Damit ist also f auch injektiv (denn: falls $f(t) = f(s)$ folgt $t = g(f(t)) = g(f(s)) = s$), und g ist die Umkehrfunktion. Diese ist also stetig, und damit ist f ein Homöomorphismus. □

Hinweis: Was man hier benutzt ist: falls $f : X \to Y$ surjektiv ist, und $g : Y \to X$ eine Funktion mit $gf = \mathrm{id}$ (man sagt: g ist Linksinverses zu f), dann ist f bijektiv und g ist die Umkehrfunktion. Da Surjektivität oft recht einfach zu sehen ist für Karten, ist das ein nützliches Kriterium.

1.2. **Abgeschlossener Definitionsbereich.** Oft kann man das folgende Lemma aus der Vorlesung benutzen:

Lemma 1.2. *Sei X eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$ beliebig und $f : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f ein Homöomorphismus.*

Das Lemma kann man manchmal auch nutzen wenn Funktionen auf offenen Mengen definiert sind:

Aussage 1.3. *Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine positive Funktion (also, $g(t) > 0 \forall t$). Betrachte die Rotationsfläche*

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z \in (a, b), x^2 + y^2 = g(z)^2\}$$

Dann definiert die Abbildung

$$\phi : (a, b) \times (0, \pi) \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(r, \theta) = (g(r)\cos(\theta), g(r)\sin(\theta), r)$$

einen Homöomorphismus $\phi : (a, b) \times (0, \pi) \to S \cap \{(x, y, z), y > 0\}$.

Idee: Man kann die Funktion ϕ auf das kompakte Rechteck $[a, b] \times [0, \pi]$ fortsetzen, und sie bleibt injektiv. Dann kann man also das Lemma benutzen.

Beweis. Als erstes überlegt man sich, dass das Bild von ϕ tatsächlich $S \cap \{(x, y, z), y > 0\}$ ist (das geht genau wie in dem vorigen Beispiel), und dass damit ϕ surjektiv ist. Es reicht also, wie oben, zu zeigen dass es eine Links-Umkehrfunktion gibt, die stetig ist.
Betrachte die Funktion

$$\Phi : [a, b] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \theta) = (g(r)\cos(\theta), g(r)\sin(\theta), r)$$

Dann ist Φ injektiv, denn angenommen

$$\Phi(r, \theta) = \Phi(r', \theta'),$$

dann haben wir zunächst $r = r'$ wegen der dritten Koordinate. Damit dann auch $g(r)\cos(\theta) = g(r)\cos(\theta')$ wegen der ersten Koordinate, und da g positiv ist

$$\cos(\theta) = \cos(\theta').$$

Da $\theta, \theta' \in [0, \pi]$ und der Kosinus auf diesem Intervall injektiv ist, folgt also $\theta = \theta'$.
Jetzt ist also Φ stetig, injektiv, und damit ist

$$\Phi : [a, b] \times [0, \pi] \to \Phi([a, b] \times [0, \pi])$$

bijektiv, und damit ein Homöomorphismus wegen dem Lemma. Also gibt es eine Umkehrfunktion $\Phi^{-1} : \Phi([a, b] \times [0, \pi]) \to [a, b] \times [0, \pi]$ die stetig ist. Die Einschränkung von Φ^{-1} auf $\Phi((a, b) \times (0, \pi)) = \phi((a, b) \times (0, \pi))$ ist damit also auch stetig, und eine Links-Umkehrfunktion von ϕ. $\square$

2. Karten

Viele Aussagen kann man auf Karten (lokale Parametrisierungen) zurückführen; vor allem wenn es um die Existenz von Objekten geht.

Aussage 2.1. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, und $p \in S$ ein Punkt. Dann gibt es Kurven $c, d : (-1, 1) \to S$ die differenzierbar sind, sodass $c(0) = p = d(0)$, und so dass $c'(0), d'(0)$ senkrecht aufeinander stehen.*

Idee: Man kann versuchen die Kurven c, d in einer Karte zu konstruieren, und dort mit linearer Algebra die gewünschte Orthogonalität zu produzieren.

Beweis. Nehme $\phi : U \to V$ eine lokale Parametrisierung und nehme an dass $\phi(u) = p$. Nach Definition einer Fläche hat $D_u\phi$ Rang 2 oder, mit anderen Worten, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$ sind linear unabhängig. Z.b. aus dem Gram-Schmidt-Verfahren folgt, dass es damit eine Zahl a gibt sodass

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - a\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

senkrecht auf $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}$ steht. Jetzt können wir die Kurven

$$c_0(t) = u + te_1, \quad d_0(t) = u + t(e_2 - ae_1)$$

definieren. Die Kurven $c = \phi \circ c_0, d = \phi \circ d_0$ haben dann die Ableitungen

$$c'(0) = D_{c_0(0)}\phi(c_0'(0)) = D_u\phi(e_1) = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$

und

$$d'(0) = D_{d_0(0)}\phi(d_0'(0)) = D_u\phi(e_2 - ae_1) = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - a\frac{\partial \phi}{\partial x_1}.$$

Diese haben also die gewünschte Eigenschaft. $\square$

3. Kettenregel und Tangentialräume

Vieles was man mit Tangentialräumen ausrechnen muss, läuft letztendlich auf die Kettenregel hinaus.

Aussage 3.1. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, und $f : \mathbb{R}^n \to S$ eine differenzierbare Abbildung. Dann ist das Bild*

$$\mathrm{im} D_x f \subset T_{f(x)} S$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Idee: Das Differential $D_x f$ bildet Tangentialvektoren von Kurven im $\mathbb{R}^n$ auf die Tangentialvektoren der Bildkurven in $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^3$ ab. Diese müssen dann (nach Definition des Tangentialraums) Tangentialvektoren der Fläche sein.

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor, und betrachte die Kurve

$$c(t) = x + tv$$

definiert auf $t \in (-1, 1)$. Dann ist $c'(0) = v$, und damit

$$D_x f(v) = D_x f(c'(0)) = (f \circ c)'(0)$$

Die Kurve $f \circ c : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ hat die Eigenschaften, dass $(f \circ c)(0) = f(x)$ (da $c(0) = x$), und $(f \circ c)(t) \in S \forall t$ (da das Bild von f in S liegt). Damit ist also $(f \circ c)$ eine der Kurven, die in der Definition des Tangentialraums $T_{f(x)} S$ vorkommen, und wir haben $(f \circ c)'(0) \in T_{f(x)} S$. Damit haben wir also

$$D_x f(v) \in T_{f(x)} S,$$

und da v beliebig war, folgt die Aussage. □

3.1. **Ableiten entlang Wegen.** Die Kettenregel kann auch nützlich sein, um Differenziale von Flächenabbildungen zu verstehen, via Wegen.

Aussage 3.2. *Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche, und nehmen wir an, dass es für je zwei Punkte $p, q \in S$ eine $\mathcal{C}^1$ Kurve $c : [0, 1] \to S$ gibt mit $c(0) = p, c(1) = q$. Sei außerdem $f : S \to \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Funktion. Dann ist f konstant genau dann wenn $d_p f = 0$ für alle $p \in S$.*

Idee: $d_p f = 0$ heißt dass sich f in Richtung von Wegen in S nicht ändert. Da man von jedem Punkt p zu jedem Punkt q entlang eines Wegs kommt, führt das dazu dass f selbst konstant ist.

Beweis. Wenn f konstant ist, dann ist auch $(f \circ c)$ konstant für alle Kurven c, und hat damit Ableitung 0. Eine Richtung ist damit klar.
Sei jetzt $d_x f = 0$ für alle $x \in S$, und seien p, q zwei beliebige Punkte. Nehme eine Kurve c wie in der Voraussetzung. Dann haben wir

$$(f \circ c)'(t) = (d_{c(t)} f)(c'(t)) = 0$$

wobei die erste Gleichung aus der Definition des Differentials folgt, und die zweite aus der Voraussetzung. Also (aus Analysis) ist $f \circ c$ konstant, und damit $f(p) = f(c(0)) = f(c(1)) = f(q)$. Da p, q beliebig, ist also f konstant. $\square$

4. Lokale Berechnungen: Tangentialräume und erste Fundamentalform

4.1. **Aus Karte.** Angenommen, wir haben eine Karte $\phi : U \to V$ einer Fläche. Dann können wir die Tangentialräume und die erste Fundamentalform einfach aus der Karte ausrechnen:

$$T_{\phi(u)}S = \operatorname{span}\left(\left.\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right|_u, \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right|_u \right),$$

$$g_{ij}(u) = \left\langle \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right|_u, \left.\frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right|_u \right\rangle$$

Zum Beispiel: wir können die obere Halbsphäre als Graph parametrisieren:

$$S = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

hat Karte

$$\phi : \{(x, y), x^2 + y^2 < 1\} \to S, \quad (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

Dann berechnen wir:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}, \quad \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{pmatrix}.$$

und wir bekommen daraus:

$$T_{(x,y,z)}S = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{x}{z} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{y}{z} \end{pmatrix} \right)$$

oder

$$T_{(x,y,z)}S = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ -\frac{ux+vy}{z} \end{pmatrix}, u, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für die erste Fundamentalform bekommen wir

$$g_{11}(u) = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2}}, g_{22}(u) = \sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2}}, g_{12}(u) = g_{21}(u) = \frac{xy}{z^2}.$$

4.2. **Aus Gleichung.** Falls $S = f^{-1}(0)$ als Urbild eines regulären Werts gegeben ist, dann können wir die Tangentialräume einfach ausrechnen als

$$T_pS = (\operatorname{grad} f)(p)^\perp$$

Zum Beispiel für die Sphäre S^2 ist $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2-1$, und $\operatorname{grad} f(p) = 2p$. Also ist

$$T_pS^2 = p^\perp = \{q \in \mathbb{R}^3, \langle q, p\rangle = 0\}.$$

(daraus kann man dann auch eine explizite Darstellung wie oben herleiten). In dieser Beschreibung ist es aber nicht ohne weiteres möglich, die erste Fundamentalform zu beschreiben – die Funktionen g_{ij} machen nur in einer Karte Sinn.

5. Lokale Berechnungen: Einheitsnormalenfelder und Weingartenabbildung

5.1. **Aus Karte.** Angenommen, wir haben eine Karte $\phi : U \to V$ einer Fläche. Dann können wir ein *lokales* Einheitsnormalenfeld N ausrechnen mithilfe des Kreuzprodukts:

$$N_\phi(\phi(u)) = \frac{1}{\| \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\Big|_u \times \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\Big|_u \|} \, \frac{\partial\phi}{\partial x_1}\Big|_u \times \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\Big|_u .$$

(alternativ kann man natürlich auch einfach einen Einheitsvektor "raten", der auf beiden Ableitungen der Karte senkrecht steht).
Jetzt können wir die Ableitung der Gauß-Abbildung relativ leicht ausrechnen. Nämlich: zunächst bestimmt man die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial N_\phi(\phi(u))}{\partial u_1}, \frac{\partial N_\phi(\phi(u))}{\partial u_2}$$

(das sind zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$), und dann schreiben wir sie als Linearkombination der $T_{\phi(u)}S$–Basis von oben. Die resultierenden vier Zahlen sind die Einträge der Matrix, die die Weingartenabbildung beschreibt. Siehe die Rechnung zu Rotationsflächen im Miniskript für ein Beispiel.

5.2. **Aus Gleichung.** Falls $S = f^{-1}(0)$ als Urbild eines regulären Werts gegeben ist, dann funktioniert

$$N(p) = \frac{1}{\|\mathrm{grad} f(p)\|} \mathrm{grad} f(p)$$

immer als Einheitsnormalenfeld. Ähnlich wie oben ist es nicht direkt ersichtlich, wie man hieraus die Weingartenabbildung bestimmt.