Was ist eine “typische” Zahl?

Prof. Sebastian Hensel

31. Mai 2019

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Was heißt: “zufällig auswählen”?

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Was heißt: "zufällig auswählen"?
- Was für Typen von Zahlen gibt es?

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Was heißt: “zufällig auswählen”?
- Was für Typen von Zahlen gibt es?
- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Was heißt: "zufällig auswählen"?
- Was für Typen von Zahlen gibt es?
- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?

Zum Aufwärmen ein Gedankenspiel.

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Was heißt: "zufällig auswählen"?
- Was für Typen von Zahlen gibt es?
- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?

Zum Aufwärmen ein Gedankenspiel. Angenommen, ich hätte einen Beutel voller zufälliger reelle Zahlen, und ziehe eine.

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Was heißt: "zufällig auswählen"?
- Was für Typen von Zahlen gibt es?
- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?

Zum Aufwärmen ein Gedankenspiel. Angenommen, ich hätte einen Beutel voller zufälliger reelle Zahlen, und ziehe eine.
Die Frage ist: wie überrascht sollten wir von dem Ergebnis sein?

Typen von Zahlen

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
- Irrationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$)

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
- Irrationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$)
- Algebraische Zahlen

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
- Irrationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$)
- Algebraische Zahlen

Definition

Eine Zahl x heißt *algebraisch*, wenn sie eine polynomielle Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit ganzzahligen a_i erfüllt.

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
- Irrationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$)
- Algebraische Zahlen (Lösungen von ganzzahligen Gleichungen)

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
- Irrationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$)
- Algebraische Zahlen (Lösungen von ganzzahligen Gleichungen)
- Transzendente Zahlen (d.h. nicht-algebraische)

Typen von Zahlen

- Ganze Zahlen $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0\}$
- Irrationale Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$)
- Algebraische Zahlen (Lösungen von ganzzahligen Gleichungen)
- Transzendente Zahlen (d.h. nicht-algebraische)
- Zahlen, die einen Namen haben.

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$2 = \frac{n^2}{m^2}$$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ *ist nicht rational (d.h. kein Bruch).*

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$2m^2 = n^2$$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$2m^2 = n^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$2m^2 = n^2 = (2k)^2 = 4k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.

$\square$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$m^2 = 2k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.

$\square$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$m^2 = 2k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.
- Also ist m^2 gerade, und damit auch m.

$\square$

Bonus: Irrationale Zahlen

Satz

Die Zahl $\sqrt{2}$ ist nicht rational (d.h. kein Bruch).

Beweis.

- Angenommen doch, und schreibe $\sqrt{2} = n/m$ als *gekürzten* Bruch:
$$m^2 = 2k^2$$
- Also ist n^2 gerade, und damit auch $n = 2k$.
- Also ist m^2 gerade, und damit auch m.
- Widerspruch!

$\square$

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Was heißt: "zufällig auswählen"?
- Was für Typen von Zahlen gibt es?
- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?
- "Wie viele" Zahlen der verschiedenen Typen gibt es?

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?
- "Wie viele" Zahlen der verschiedenen Typen gibt es?

Nächste Fragen:

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?
- "Wie viele" Zahlen der verschiedenen Typen gibt es?

Nächste Fragen:

- Intuitiv scheint klar, dass es mehr Brüche als ganze Zahlen gibt, und mehr reelle Zahlen als Brüche

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?
- "Wie viele" Zahlen der verschiedenen Typen gibt es?

Nächste Fragen:

- Intuitiv scheint klar, dass es mehr Brüche als ganze Zahlen gibt, und mehr reelle Zahlen als Brüche – aber stimmt das?

Ausgangspunkt

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Erste Fragen:

- Wie entscheiden wir, welche Typen wahrscheinlicher auftreten als andere?
- "Wie viele" Zahlen der verschiedenen Typen gibt es?

Nächste Fragen:

- Intuitiv scheint klar, dass es mehr Brüche als ganze Zahlen gibt, und mehr reelle Zahlen als Brüche – aber stimmt das?
- Wie vergleicht man die Größe unendlicher Mengen?

Was heißt gleichgroß?

Frage

Wann sind zwei (unendliche) Mengen gleich groß?

Was heißt gleichgroß?

Frage

Wann sind zwei (unendliche) Mengen gleich groß?

- Angenommen A, B sind endliche Mengen. Dann sind A und B gleich groß...

Was heißt gleichgroß?

Frage

Wann sind zwei (unendliche) Mengen gleich groß?

- Angenommen A, B sind endliche Mengen. Dann sind A und B gleich groß, wenn sie dieselbe *Anzahl* Elemente haben.

Was heißt gleichgroß?

Frage

Wann sind zwei (unendliche) Mengen gleich groß?

- Angenommen A, B sind endliche Mengen. Dann sind A und B gleich groß, wenn sie dieselbe *Anzahl* Elemente haben.
- Wenn A und B beide unendlich sind, macht diese Definition keinen Sinn mehr

Was heißt gleichgroß?

Frage

Wann sind zwei (unendliche) Mengen gleich groß?

- Angenommen A, B sind endliche Mengen. Dann sind A und B gleich groß, wenn sie dieselbe *Anzahl* Elemente haben.
- Wenn A und B beide unendlich sind, macht diese Definition keinen Sinn mehr – beide Anzahlen sind unendlich.

Was heißt gleichgroß?

Frage

Wann sind zwei (unendliche) Mengen gleich groß?

- Angenommen A, B sind endliche Mengen. Dann sind A und B gleich groß, wenn sie dieselbe *Anzahl* Elemente haben.
- Wenn A und B beide unendlich sind, macht diese Definition keinen Sinn mehr – beide Anzahlen sind unendlich.
- Eine andere Definition, die für endliche Mengen funktioniert:

Was heißt gleichgroß?

Frage

Wann sind zwei (unendliche) Mengen gleich groß?

- Angenommen A, B sind endliche Mengen. Dann sind A und B gleich groß, wenn sie dieselbe *Anzahl* Elemente haben.
- Wenn A und B beide unendlich sind, macht diese Definition keinen Sinn mehr – beide Anzahlen sind unendlich.
- Eine andere Definition, die für endliche Mengen funktioniert:

Definition

A und B sind gleich groß, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.

Beispiel

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch: $f(x) = x^2$.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.

Beispiel

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch: $f(x)$ ist die kleinste Primzahl, die x teilt.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.

Beispiel

$f : \{2, 3, \ldots\} \to \mathbb{N}$ definiert durch: $f(x)$ ist die kleinste Primzahl, die x teilt.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.
- Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B von f mindestens einem Element aus A zugeordnet wird.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.
- Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B von f mindestens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn jedes Element von B von f höchstens einem Element aus A zugeordnet wird.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.
- Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B von f mindestens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn jedes Element von B von f höchstens einem Element aus A zugeordnet wird.

Beispiel

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch: $f(x) = x^2$.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.
- Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B von f mindestens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn jedes Element von B von f höchstens einem Element aus A zugeordnet wird.

Beispiel

$f : \{2, 3, \ldots\} \to \mathbb{N}$ definiert durch: $f(x)$ ist die kleinste Primzahl, die x teilt.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.
- Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B von f mindestens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn jedes Element von B von f höchstens einem Element aus A zugeordnet wird.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, wenn wir die Elemente in A und B einander eindeutig zuordnen können.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.
- Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B von f mindestens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn jedes Element von B von f höchstens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *bijektiv*, wenn sie beides ist.

Formalismus I: Funktionen

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

- Eine *Funktion* $f : A \to B$ ist eine Vorschrift, die einem Element aus A eindeutig ein Element aus B zuordnet.
- Eine Funktion heißt *surjektiv*, wenn jedes Element von B von f mindestens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *injektiv*, wenn jedes Element von B von f höchstens einem Element aus A zugeordnet wird.
- Eine Funktion heißt *bijektiv*, wenn sie beides ist.

Unendlichkeit I: Gleich große Teilmengen

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

Unendlichkeit I: Gleich große Teilmengen

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

Beispiel

Die Funktion

$$f : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \{1, 2, 3, \ldots\}$$

definiert durch $f(x) = x + 1$ ist eine Bijektion.

Unendlichkeit I: Gleich große Teilmengen

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

Beispiel

Die Funktion

$$f : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \{1, 2, 3, \ldots\}$$

definiert durch $f(x) = x + 1$ ist eine Bijektion.

Beispiel

Die Funktion

$$g : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \{0, 2, 4, \ldots\}$$

definiert durch $f(x) = 2x$ ist eine Bijektion.

Unendlichkeit I: Gleich große Teilmengen

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

Beispiel

Die Funktion

$$g : \{0, 1, 2, \ldots\} \to \{0, 2, 4, \ldots\}$$

definiert durch $f(x) = 2x$ ist eine Bijektion.

- Mit anderen Worten: Die Menge der geraden Zahlen und die Menge der natürlichen Zahlen sind gleich groß.

Unendlichkeit I: Gleich große Teilmengen

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

- Mit anderen Worten: Die Menge der geraden Zahlen und die Menge der natürlichen Zahlen sind gleich groß.

Unendlichkeit I: Gleich große Teilmengen

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

- Mit anderen Worten: Die Menge der geraden Zahlen und die Menge der natürlichen Zahlen sind gleich groß.

Frage

Sind

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \quad \textit{und} \quad \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

gleich groß?

Formalismus II

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

Formalismus II

Definition

A und B sind *gleich groß*, falls es eine bijektive Funktion $f : A \to B$ gibt.

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Formalismus II

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Formalismus II

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

- Intuition: M abzählbar falls es eine (unendliche) Liste gibt, in der alle Element von M auftauchen.

Formalismus II

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

- Intuition: M abzählbar falls es eine (unendliche) Liste gibt, in der alle Element von M auftauchen.

Beispiel

Die Menge aller geraden Zahlen ist abzählbar.

Formalismus II

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

- Intuition: M abzählbar falls es eine (unendliche) Liste gibt, in der alle Element von M auftauchen.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist abzählbar.

Formalismus II

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

- Intuition: M abzählbar falls es eine (unendliche) Liste gibt, in der alle Element von M auftauchen.

Beispiel

Die Menge $\mathbb{P}$ der Primzahlen ist abzählbar.

Formalismus II

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

- Intuition: M abzählbar falls es eine (unendliche) Liste gibt, in der alle Element von M auftauchen.

Beispiel

Die Menge aller deutschen Worte ist abzählbar.

Formalismus II

Definition

Wir nennen eine Menge M *abzählbar*, wenn es eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$ gibt.

- Intuition: M abzählbar falls es eine (unendliche) Liste gibt, in der alle Element von M auftauchen.

Beispiel

Die Menge aller deutschen Texte ist abzählbar.

Nicht abzählbare Mengen

Frage

Gibt es nicht-abzählbare Mengen?

Nicht abzählbare Mengen

Frage

Gibt es nicht-abzählbare Mengen?

Versuch

Ist die Menge $M = \mathbb{N}^2$ abzählbar?

$$M = \{(n, m), n, m \in \mathbb{N}\}.$$

Nicht abzählbare Mengen

Frage

Gibt es nicht-abzählbare Mengen?

Versuch

Ist die Menge $M = \mathbb{N}^2$ abzählbar?

$$M = \{(n, m), n, m \in \mathbb{N}\}.$$

- Eine Abzählung bekommt man durch diagonales Zählen.

Formalismus III: Teilmengen abzählbarer Mengen

Lemma

Eine unendliche Teilmenge N einer abzählbaren Menge M ist wieder abzählbar.

Formalismus III: Teilmengen abzählbarer Mengen

Lemma

Eine unendliche Teilmenge N einer abzählbaren Menge M ist wieder abzählbar.

Beweis.

- Sei $f : \mathbb{N} \to M$ die ursprüngliche Abzählung.

Formalismus III: Teilmengen abzählbarer Mengen

Lemma

Eine unendliche Teilmenge N einer abzählbaren Menge M ist wieder abzählbar.

Beweis.

- Sei $f : \mathbb{N} \to M$ die ursprüngliche Abzählung.
- Definiere eine Folge von Zahlen:

$$n_1 = \min(n, f(n) \in N)).$$

Formalismus III: Teilmengen abzählbarer Mengen

Lemma

Eine unendliche Teilmenge N einer abzählbaren Menge M ist wieder abzählbar.

Beweis.

- Sei $f : \mathbb{N} \to M$ die ursprüngliche Abzählung.
- Definiere eine Folge von Zahlen:

$$n_1 = \min(n, f(n) \in N)).$$

$$n_k = \min(n > n_{k-1}, f(n) \in N).$$

Formalismus III: Teilmengen abzählbarer Mengen

Lemma

Eine unendliche Teilmenge N einer abzählbaren Menge M ist wieder abzählbar.

Beweis.

- Sei $f : \mathbb{N} \to M$ die ursprüngliche Abzählung.
- Definiere eine Folge von Zahlen:

$$n_1 = \min(n, f(n) \in N)).$$

$$n_k = \min(n > n_{k-1}, f(n) \in N).$$

- Dann ist $g(k) = f(n_k)$ die gewünschte Abzählung.

$\square$

Rationale Zahlen sind abzählbar

Frage

Sind $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{N}$ *gleich groß?*

Rationale Zahlen sind abzählbar

Frage

Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleich groß? (Ist die Menge der rationalen Zahlen abzählbar?)

Rationale Zahlen sind abzählbar

Frage

Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleich groß? (Ist die Menge der rationalen Zahlen abzählbar?)

- Wir wissen schon: die Menge $M = \mathbb{N}^2$ ist abzählbar.

Rationale Zahlen sind abzählbar

Frage

Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleich groß? (Ist die Menge der rationalen Zahlen abzählbar?)

- Wir wissen schon: die Menge $M = \mathbb{N}^2$ ist abzählbar.
- Ein Bruch hat eine *eindeutige* Darstellung als gekürzter Bruch, mit positivem Nenner.

Rationale Zahlen sind abzählbar

Frage

Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleich groß? (Ist die Menge der rationalen Zahlen abzählbar?)

- Wir wissen schon: die Menge $M = \mathbb{N}^2$ ist abzählbar.
- Ein Bruch hat eine *eindeutige* Darstellung als gekürzter Bruch, mit positivem Nenner.
- Also: die Menge

$$N = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, ggT(n, m) = 1.\}$$

ist in Bijektion mit $\mathbb{Q}$.

Rationale Zahlen sind abzählbar

Frage

Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleich groß? (Ist die Menge der rationalen Zahlen abzählbar?)

- Wir wissen schon: die Menge $M = \mathbb{N}^2$ ist abzählbar.
- Ein Bruch hat eine *eindeutige* Darstellung als gekürzter Bruch, mit positivem Nenner.
- Also: die Menge

  $$N = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, ggT(n, m) = 1.\}$$

  ist in Bijektion mit $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q} \simeq N$ ist unendliche Teilmenge der abzählbaren Menge M

Rationale Zahlen sind abzählbar

Frage

Sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{N}$ gleich groß? (Ist die Menge der rationalen Zahlen abzählbar?)

- Wir wissen schon: die Menge $M = \mathbb{N}^2$ ist abzählbar.
- Ein Bruch hat eine *eindeutige* Darstellung als gekürzter Bruch, mit positivem Nenner.
- Also: die Menge

  $$N = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, ggT(n, m) = 1.\}$$

  ist in Bijektion mit $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Q} \simeq N$ ist unendliche Teilmenge der abzählbaren Menge M, also ist nach unserem Lemma auch $\mathbb{Q}$ abzählbar.

Bonus: Algebraische Zahlen sind abzählbar

Bonus: Algebraische Zahlen sind abzählbar

- Ein Polynom von Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Bonus: Algebraische Zahlen sind abzählbar

- Ein Polynom von Grad n hat höchstens n Nullstellen.
- Die Menge aller Polynome vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten ist abzählbar.

Bonus: Algebraische Zahlen sind abzählbar

- Ein Polynom von Grad n hat höchstens n Nullstellen.
- Die Menge aller Polynome vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten ist abzählbar.
- Die Menge aller Polynome ist abzählbar mit ganzzahligen Koeffizienten ist abzählbar.

Bonus: Algebraische Zahlen sind abzählbar

- Ein Polynom von Grad n hat höchstens n Nullstellen.
- Die Menge aller Polynome vom Grad n mit ganzzahligen Koeffizienten ist abzählbar.
- Die Menge aller Polynome ist abzählbar mit ganzzahligen Koeffizienten ist abzählbar.
- Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar.

Reelle Zahlen abzählbar?

Ist etwa auch $\mathbb{R}$ abzählbar?

Reelle Zahlen abzählbar?

Ist etwa auch $\mathbb{R}$ abzählbar?

Theorem (Cantor)

Nein!

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

□

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.

$\square$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.6079010833843872\ldots$$
$$0.6131243081403313\ldots$$
$$0.5539563757807909\ldots$$
$$0.8436121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.

$\square$

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:

$\square$

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:
- Die k–te Nachkommastelle von y ist anders als die k–te Nachkommastelle von x_k

□

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:
- Die k–te Nachkommastelle von y ist anders als die k–te Nachkommastelle von x_k (und nicht 9 oder 0)

□

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.6079010833843872\ldots$$
$$0.6131243081403313\ldots$$
$$0.5539563757807909\ldots$$
$$0.8436121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.6079010833843872\ldots$$
$$0.6131243081403313\ldots$$
$$0.5539563757807909\ldots$$
$$0.8436121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.5$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.{\color{red}6}079010833843872\dots$$
$$0.6{\color{red}1}31243081403313\dots$$
$$0.553956375780790 9\dots$$
$$0.843612199679706 2\dots$$
$$0.164111455923901 5\dots$$
$$0.743308459257502 9\dots$$
$$\dots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.5$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.6079010833843872\ldots$$
$$0.6131243081403313\ldots$$
$$0.5539563757807909\ldots$$
$$0.8436121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.52$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.\textcolor{red}{6}079010833843872\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{1}31243081403313\ldots$$
$$0.55\textcolor{red}{3}9563757807909\ldots$$
$$0.8436121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.52$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.6079010833843872\ldots$$
$$0.6131243081403313\ldots$$
$$0.5539563757807909\ldots$$
$$0.8436121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.524$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.\textcolor{red}{6}079010833843872\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{1}31243081403313\ldots$$
$$0.55\textcolor{red}{3}9563757807909\ldots$$
$$0.843\textcolor{red}{6}121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.524$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.\textcolor{red}{6}079010833843872\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{1}31243081403313\ldots$$
$$0.55\textcolor{red}{3}9563757807909\ldots$$
$$0.843\textcolor{red}{6}121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.5245$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.\textcolor{red}{6}079010833843872\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{1}31243081403313\ldots$$
$$0.55\textcolor{red}{3}9563757807909\ldots$$
$$0.843\textcolor{red}{6}121996797062\ldots$$
$$0.1641\textcolor{red}{1}14559239015\ldots$$
$$0.743308459257502 9\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.5245$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.6079010833843872\ldots$$
$$0.6131243081403313\ldots$$
$$0.5539563757807909\ldots$$
$$0.8436121996797062\ldots$$
$$0.1641114559239015\ldots$$
$$0.7433084592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.52452$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.\textcolor{red}{6}079010833843872\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{1}31243081403313\ldots$$
$$0.55\textcolor{red}{3}9563757807909\ldots$$
$$0.843\textcolor{red}{6}121996797062\ldots$$
$$0.1641\textcolor{red}{1}14559239015\ldots$$
$$0.74330\textcolor{red}{8}4592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.52452$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.{\color{red}6}079010833843872\ldots$$
$$0.6{\color{red}1}31243081403313\ldots$$
$$0.55{\color{red}3}9563757807909\ldots$$
$$0.843{\color{red}6}121996797062\ldots$$
$$0.1641{\color{red}1}14559239015\ldots$$
$$0.74330{\color{red}8}4592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.524527$$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.\textcolor{red}{6}079010833843872\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{1}31243081403313\ldots$$
$$0.55\textcolor{red}{3}9563757807909\ldots$$
$$0.843\textcolor{red}{6}121996797062\ldots$$
$$0.1641\textcolor{red}{1}14559239015\ldots$$
$$0.74330\textcolor{red}{8}4592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.524527\ldots$$

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:
- Die k–te Nachkommastelle von y ist anders als die k–te Nachkommastelle von x_k (und nicht 9 oder 0)

$\square$

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:
- Die k–te Nachkommastelle von y ist anders als die k–te Nachkommastelle von x_k (und nicht 9 oder 0)
- Diese Zahl y kann *nicht* eine der Zahlen x_i sein

□

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:
- Die k–te Nachkommastelle von y ist anders als die k–te Nachkommastelle von x_k (und nicht 9 oder 0)
- Diese Zahl y kann *nicht* eine der Zahlen x_i sein egal welches i wir betrachten.

$\square$

Cantor-Diagonalisierung

Unsere (angebliche) Liste aller reellen Zahlen:

$$0.\textcolor{red}{6}079010833843872\ldots$$
$$0.6\textcolor{red}{1}31243081403313\ldots$$
$$0.55\textcolor{red}{3}9563757807909\ldots$$
$$0.843\textcolor{red}{6}121996797062\ldots$$
$$0.1641\textcolor{red}{1}14559239015\ldots$$
$$0.74330\textcolor{red}{8}4592575029\ldots$$
$$\ldots$$

Unsere (gefährliche) neue Zahl

$$0.524527\ldots$$

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:
- Die k–te Nachkommastelle von y ist anders als die k–te Nachkommastelle von x_k (und nicht 9 oder 0)
- Diese Zahl y kann *nicht* eine der Zahlen x_i sein egal welches i wir betrachten.

$\square$

Reelle Zahlen abzählbar?

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Beweis durch Widerspruch.

- Angenommen, wir hätten eine Liste aller reellen Zahlen: $x_1, x_2, \ldots$.
- Wir konstruieren eine neue reelle Zahl y mit der folgenden Eigenschaft:
- Die k–te Nachkommastelle von y ist anders als die k–te Nachkommastelle von x_k (und nicht 9 oder 0)
- Diese Zahl y kann *nicht* eine der Zahlen x_i sein egal welches i wir betrachten.
- Also ist die Liste der x_i nicht vollständig.

$\square$

Cantor, interpretiert

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

Cantor, interpretiert

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

- Der (Beweis des) Satzes von Cantor zeigt: jede Liste von reellen Zahlen enthält mindestens eine reelle Zahl noch nicht.

Cantor, interpretiert

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

- Der (Beweis des) Satzes von Cantor zeigt: jede Liste von reellen Zahlen enthält mindestens eine reelle Zahl noch nicht.
- Das gibt aber kein Gefühl dafür, wie viel mehr reelle Zahlen es als rationale Zahlen gibt.

Cantor, interpretiert

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

- Der (Beweis des) Satzes von Cantor zeigt: jede Liste von reellen Zahlen enthält mindestens eine reelle Zahl noch nicht.
- Das gibt aber kein Gefühl dafür, wie viel mehr reelle Zahlen es als rationale Zahlen gibt.
- Der nächste Satz tut das

Cantor, interpretiert

Theorem (Cantor)

Die Menge der reellen Zahlen ist nicht abzählbar

- Der (Beweis des) Satzes von Cantor zeigt: jede Liste von reellen Zahlen enthält mindestens eine reelle Zahl noch nicht.
- Das gibt aber kein Gefühl dafür, wie viel mehr reelle Zahlen es als rationale Zahlen gibt.
- Der nächste Satz tut das (und beantwortet unsere ursprüngliche Frage).

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Theorem

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Menge, und $\epsilon > 0$ irgend eine Zahl. Dann können wir A mit Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ überdecken, wobei die Gesamtlänge aller I_j die Zahl ϵ nicht übersteigt.

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Theorem

Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Menge, und $\epsilon > 0$ irgend eine Zahl. Dann können wir A mit Intervallen $I_1, I_2, \ldots$ überdecken, wobei die Gesamtlänge aller I_j die Zahl ϵ nicht übersteigt.

Mit anderen Worten: abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* auf der Zahlengerade ein.

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt 0
- Wir haben: ϵ Länge Intervall übrig,
- Wir haben: nichts von A bedeckt.

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \dots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt 0
- Wir haben: ϵ Länge Intervall übrig,
- Wir haben: nichts von A bedeckt.
- Überdecke a_1 mit einem Intervall der Länge $\epsilon/2$ (der Hälfte aller Länge die wir haben)

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt 1
- Wir haben: $\epsilon/2$ Länge übrig
- Wir haben: a_1 bedeckt.
- Überdecke a_1 mit einem Intervall der Länge $\epsilon/2$ (der Hälfte aller Länge die wir haben)

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt 1
- Wir haben: $\epsilon/2$ Länge übrig
- Wir haben: a_1 bedeckt.
- Überdecke a_1 mit einem Intervall der Länge $\epsilon/2$ (der Hälfte aller Länge die wir haben)
- Überdecke jetzt a_2 mit einem Intervall der Länge $\epsilon/4$(der Hälfte aller Länge die wir übrig haben)

□

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \dots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt 2
- Wir haben: $\epsilon/4$ Länge übrig
- Wir haben: a_1, a_2 bedeckt.
- Überdecke a_1 mit einem Intervall der Länge $\epsilon/2$ (der Hälfte aller Länge die wir haben)
- Überdecke jetzt a_2 mit einem Intervall der Länge $\epsilon/4$(der Hälfte aller Länge die wir übrig haben)

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt 2
- Wir haben: $\epsilon/4$ Länge übrig
- Wir haben: a_1, a_2 bedeckt.
- Fahre mit diesem Prozess fort

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt k
- Wir haben: $\epsilon/2^k$ Länge übrig
- Wir haben: $a_1, a_2, \ldots, a_k$ bedeckt.
- Fahre mit diesem Prozess fort

$\square$

Abzählbare Mengen sind Nullmengen

Abzählbare Mengen nehmen *beliebig wenig Platz* ein

Beweis.

- Nehme eine Abzählung der Menge $A = \{a_1, a_2, \dots\}$
- Wir überdecken A schrittweise.
- Schritt k
- Wir haben: $\epsilon/2^k$ Länge übrig
- Wir haben: $a_1, a_2, \dots, a_k$ bedeckt.
- Fahre mit diesem Prozess fort
- In jedem Schritt haben wir noch Intervall übrig, können also unendlich fortfahren.

$\square$

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

- Faires Ziehen einer zufälligen reellen Zahl aus $[0, 100]$ erfüllt:

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

- Faires Ziehen einer zufälligen reellen Zahl aus $[0, 100]$ erfüllt:

Axiom

Ist I ein Intervall der Länge r in $[0, 100]$, dann ist die Wahrscheinlichkeit einer zufälligen Zahl in I zu liegen $r/100$.

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

- Faires Ziehen einer zufälligen reellen Zahl aus $[0, 100]$ erfüllt:

Axiom

Ist I ein Intervall der Länge r in $[0, 100]$, dann ist die Wahrscheinlichkeit einer zufälligen Zahl in I zu liegen $r/100$.

- Aus dem Satz von eben folgt:

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

- Faires Ziehen einer zufälligen reellen Zahl aus $[0, 100]$ erfüllt:

Axiom

Ist I ein Intervall der Länge r in $[0, 100]$, dann ist die Wahrscheinlichkeit einer zufälligen Zahl in I zu liegen $r/100$.

- Aus dem Satz von eben folgt:Ist A abzählbar, dann ist die Wahrscheinlichkeit in A zu landen kleiner als $\epsilon/100$

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

- Faires Ziehen einer zufälligen reellen Zahl aus $[0, 100]$ erfüllt:

Axiom

Ist I ein Intervall der Länge r in $[0, 100]$, dann ist die Wahrscheinlichkeit einer zufälligen Zahl in I zu liegen $r/100$.

- Aus dem Satz von eben folgt:Ist A abzählbar, dann ist die Wahrscheinlichkeit in A zu landen kleiner als $\epsilon/100$ *für alle* ϵ.

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Antwort

Für jede abzählbare Menge $A \subset [0, 100]$ ist die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällige Zahl Element von A ist verschwindend gering.

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Antwort

Für jede abzählbare Menge $A \subset [0, 100]$ ist die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällige Zahl Element von A ist verschwindend gering.

Insbesondere sind zufällig gezogene Zahlen...

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Antwort

Für jede abzählbare Menge $A \subset [0, 100]$ ist die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällige Zahl Element von A ist verschwindend gering.

Insbesondere sind zufällig gezogene Zahlen...

- ...nicht rational

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Antwort

Für jede abzählbare Menge $A \subset [0, 100]$ ist die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällige Zahl Element von A ist verschwindend gering.

Insbesondere sind zufällig gezogene Zahlen...

- ...nicht rational,
- ...nicht algebraisch

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Antwort

Für jede abzählbare Menge $A \subset [0, 100]$ ist die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällige Zahl Element von A ist verschwindend gering.

Insbesondere sind zufällig gezogene Zahlen...

- ...nicht rational,
- ...nicht algebraisch (insbesondere *gibt es nicht-algebraische Zahlen!*)

Zurück zum fairen Ziehen

Frage

Angenommen, wir wählen zufällig eine reelle Zahl zwischen 0 *und* 100 *aus – was können wir von dieser Zahl erwarten?*

Antwort

Für jede abzählbare Menge $A \subset [0, 100]$ ist die Wahrscheinlichkeit dass eine zufällige Zahl Element von A ist verschwindend gering.

Insbesondere sind zufällig gezogene Zahlen...

- ...nicht rational,
- ...nicht algebraisch (insbesondere *gibt es nicht-algebraische Zahlen!*)
- und haben keinen Namen.

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin f(x)\}.$$

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin f(x)\}.$$

- Wäre f jetzt wirklich bijektiv, dann wäre $B = f(y)$ für ein y.

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin f(x)\}.$$

- Wäre f jetzt wirklich bijektiv, dann wäre $B = f(y)$ für ein y.
- Ist $y \in B$?

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin f(x)\}.$$

- Wäre f jetzt wirklich bijektiv, dann wäre $B = f(y)$ für ein y.
- Ist $y \in B$?
- Wenn ja, dann gilt $y \notin f(y) = B$

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin f(x)\}.$$

- Wäre f jetzt wirklich bijektiv, dann wäre $B = f(y)$ für ein y.
- Ist $y \in B$?
- Wenn ja, dann gilt $y \notin f(y) = B$ – Widerspruch!

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin f(x)\}.$$

- Wäre f jetzt wirklich bijektiv, dann wäre $B = f(y)$ für ein y.
- Ist $y \in B$?
- Wenn ja, dann gilt $y \notin f(y) = B$ – Widerspruch!
- Wenn nein, dann gilt $y \notin B = f(y)$

Bonus: Mehr als reelle Zahlen

- Sei $P(\mathbb{R})$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{R}$.
- Angenommen $f : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ wäre eine bijektive Funktion.
- Definiere die Menge

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \notin f(x)\}.$$

- Wäre f jetzt wirklich bijektiv, dann wäre $B = f(y)$ für ein y.
- Ist $y \in B$?
- Wenn ja, dann gilt $y \notin f(y) = B$ – Widerspruch!
- Wenn nein, dann gilt $y \notin B = f(y)$ – Widerspruch!