VON SPHÄREN, SCHLEIFEN UND FLÜSSEN

Die Poincaré-Vermutung und die Form des Raums

Prof. Dr. Sebastian Hensel
LMU München

WORUM GEHT ES HEUTE?

WORUM GEHT ES HEUTE?

- Ein altes mathematisches Problem…
  (Henri Poincaré, 1854-1912)

Bild: Wikipedia (public domain)

WORUM GEHT ES HEUTE?

- Ein altes mathematisches Problem…
  (Henri Poincaré, 1854-1912)

- …eine moderne Lösung…
  (Grigori Perelman, 1966-)

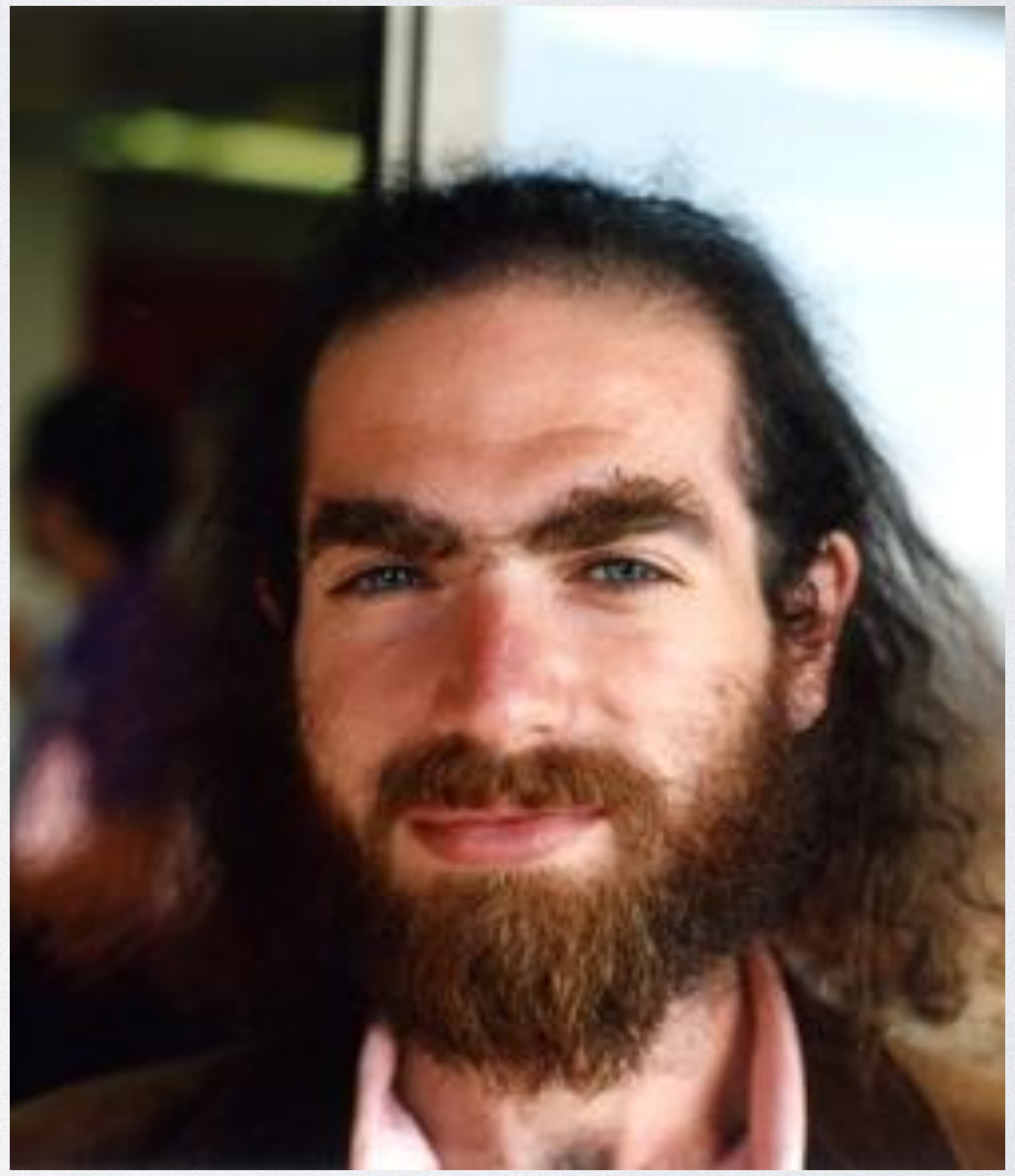


Bild: Wikipedia (public domain)

Bild: George Bergman - Mathematisches Institut Oberwolfach (MFO)

WORUM GEHT ES HEUTE?

- …1 Million US-Dollars…

WORUM GEHT ES HEUTE?

- …1 Million US-Dollars…
- …mehrere Fields-Medallien…

Bild: Wikipedia (public domain)

WORUM GEHT ES HEUTE?

- …echte reine Mathematik, und

WORUM GEHT ES HEUTE?

- …echte reine Mathematik, und
- drei moderne mathematische Disziplinen (Geometrie, Topologie, Dynamik)

WAS IST EIGENTLICH MATHEMATIK?

(geschweige denn Topologie und Geometrie…)

WAS IST REINE MATHEMATIK?

WAS IST REINE MATHEMATIK?

- Suche nach Struktur in komplizierten Systemen

WAS IST REINE MATHEMATIK?

- Suche nach Struktur in komplizierten Systemen
- Suche nach Verbindungen zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten

WAS IST REINE MATHEMATIK?

- Suche nach Struktur in komplizierten Systemen
- Suche nach Verbindungen zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten
- Formale Beweise

WAS IST REINE MATHEMATIK?

- Suche nach Struktur in komplizierten Systemen
- Suche nach Verbindungen zwischen (scheinbar) unzusammenhängenden Konzepten
- Formale Beweise
- Heute: Klassifikationsprobleme

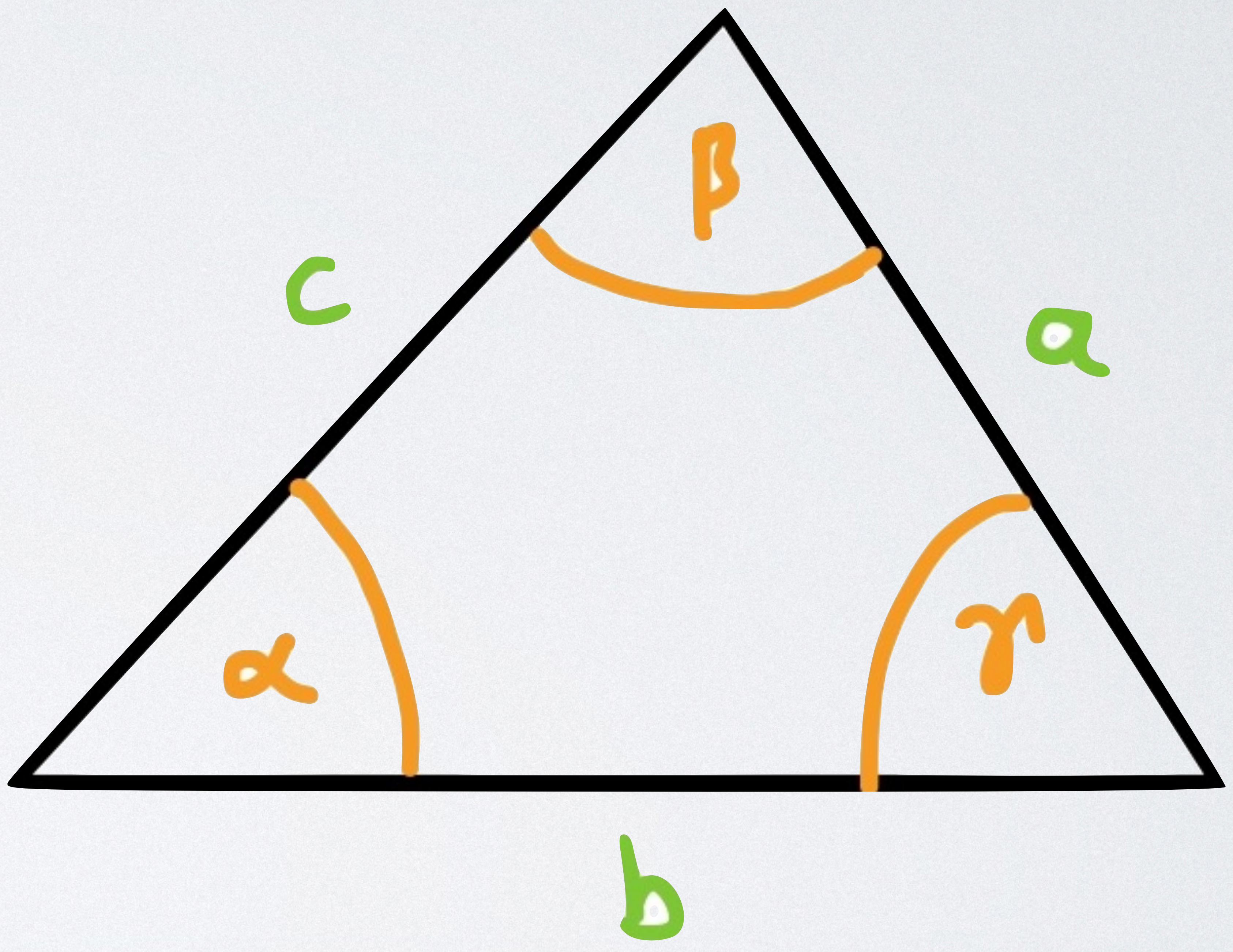
KLASSIFIKATIONSPROBLEME

KLASSIFIKATIONSPROBLEME

- Welche Objekte einer Sorte gibt es?
  (und wie erkennen wir, was man hat?)

KLASSIFIKATIONSPROBLEME

- Welche Objekte einer Sorte gibt es?
  (und wie erkennen wir, was man hat?)
- Dreiecke (Seiten und Winkel)

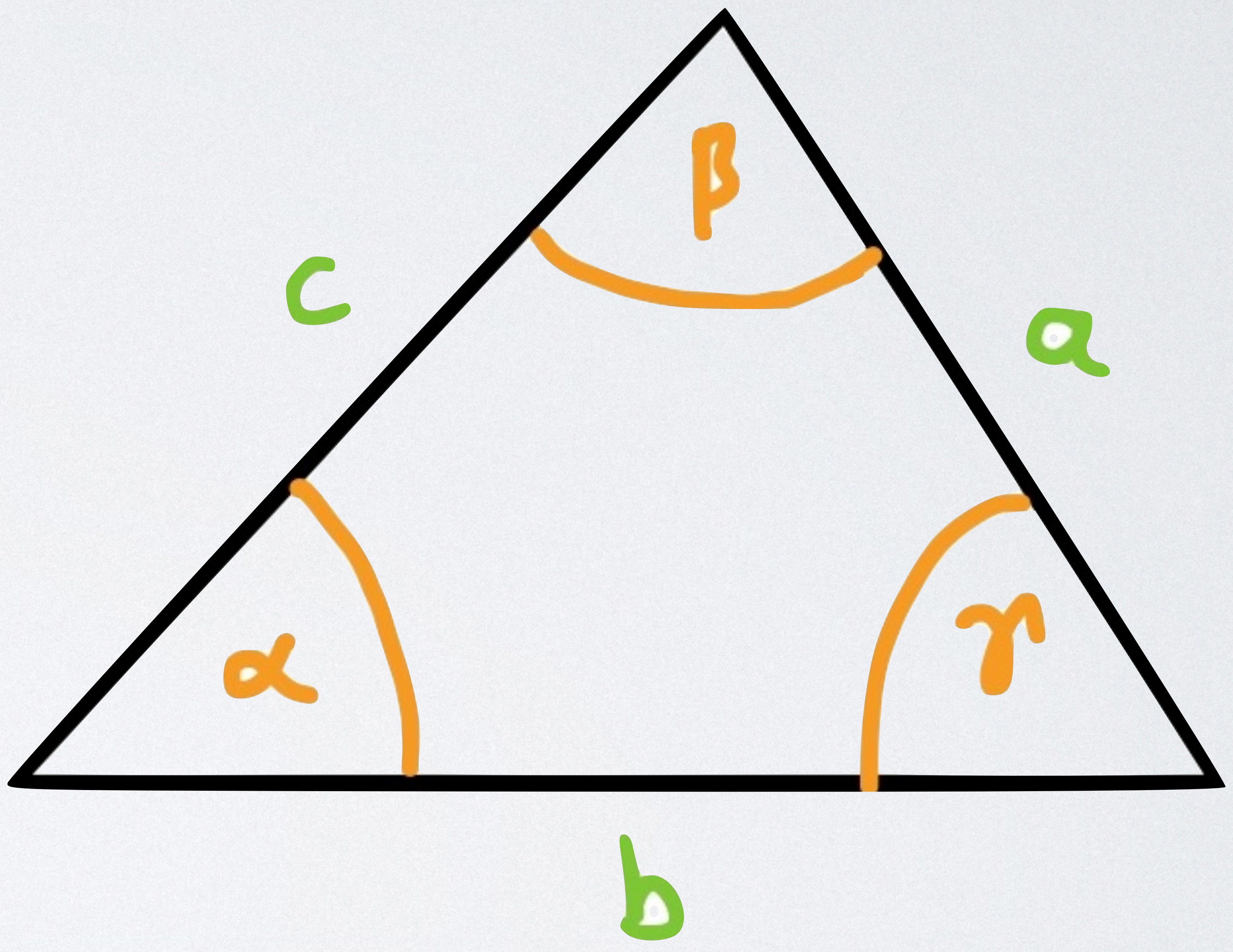


KLASSIFIKATIONSPROBLEME

- Welche Objekte einer Sorte gibt es?
  (und wie erkennen wir, was man hat?)

- Dreiecke (Seiten und Winkel)

- Permutationen



KLASSIFIKATIONSPROBLEME

- Welche Objekte einer Sorte gibt es?
  (und wie erkennen wir, was man hat?)
- Dreiecke (Seiten und Winkel)
- Permutationen
- platonische Körper

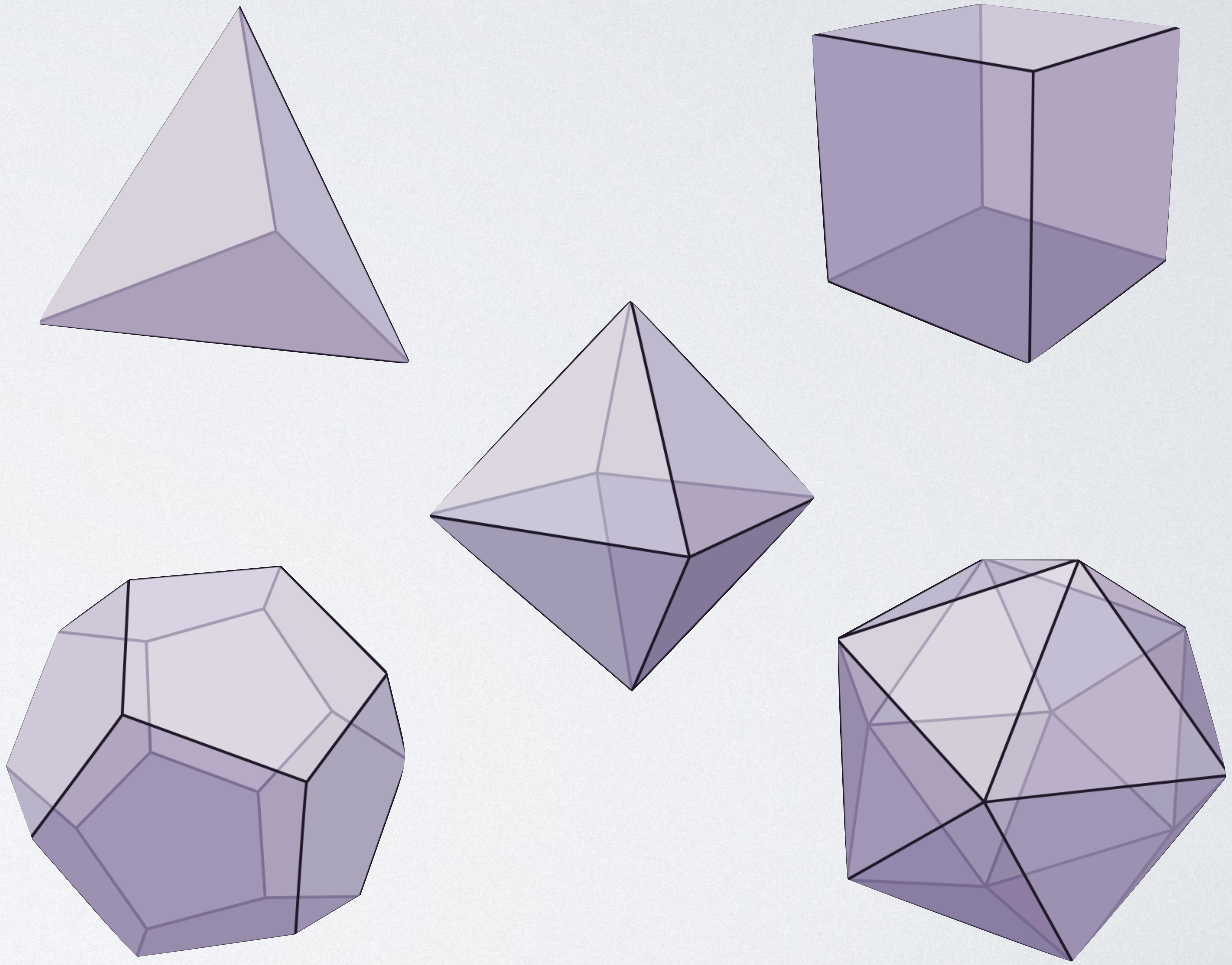


Bild: Wikipedia (public domain)

GEOMETRIE

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)

Bild: Urcia, A., Yale Peabody Museum of Natural History (CC0)

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)
- Auch schon früh: Interesse an reinen intellektuellen Fragen und Ästhetik

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)
- Auch schon früh: Interesse an reinen intellektuellen Fragen und Ästhetik

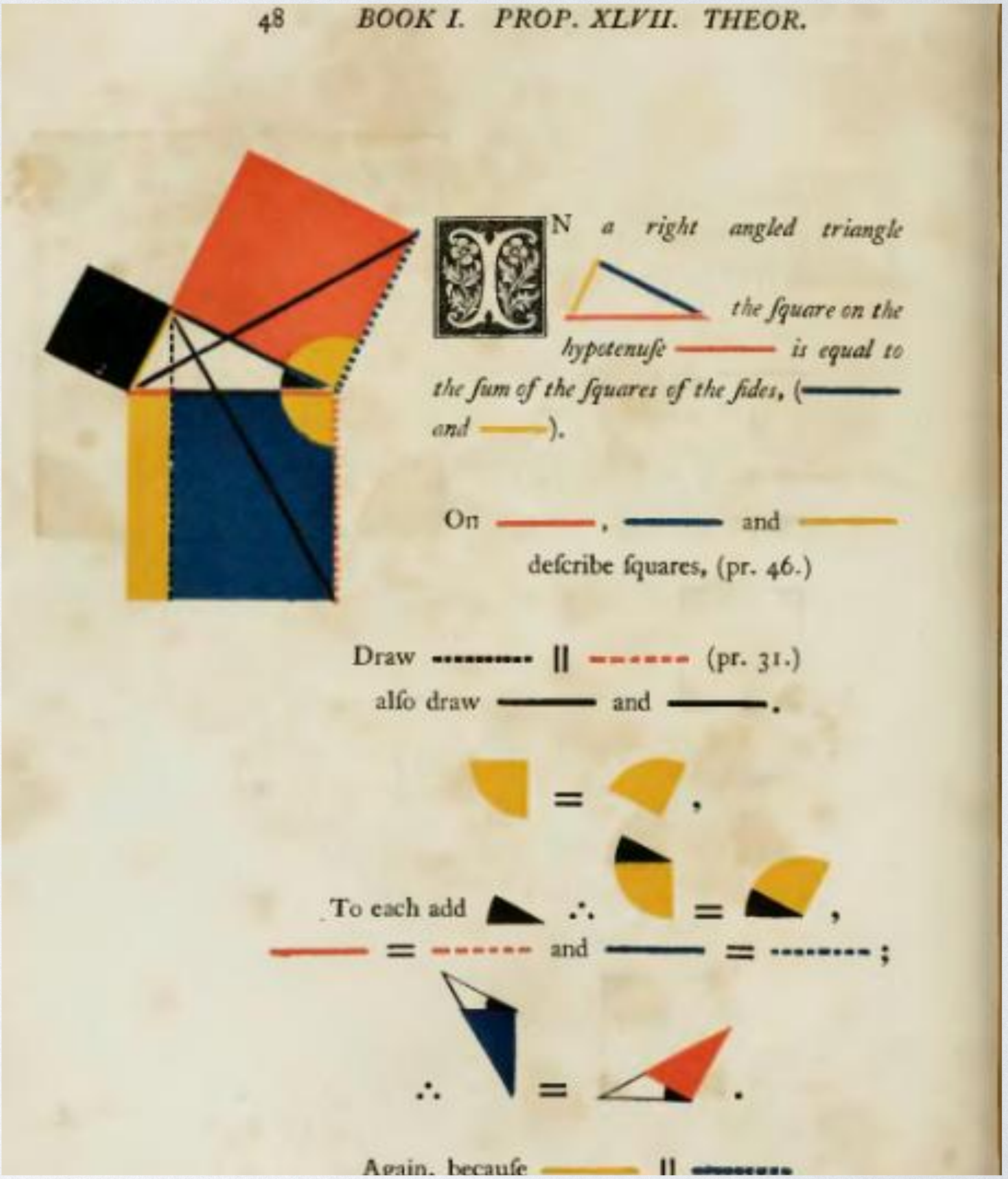


Bild: Byrne, Euclid's Elements

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)
- Auch schon früh: Interesse an reinen intellektuellen Fragen und Ästhetik

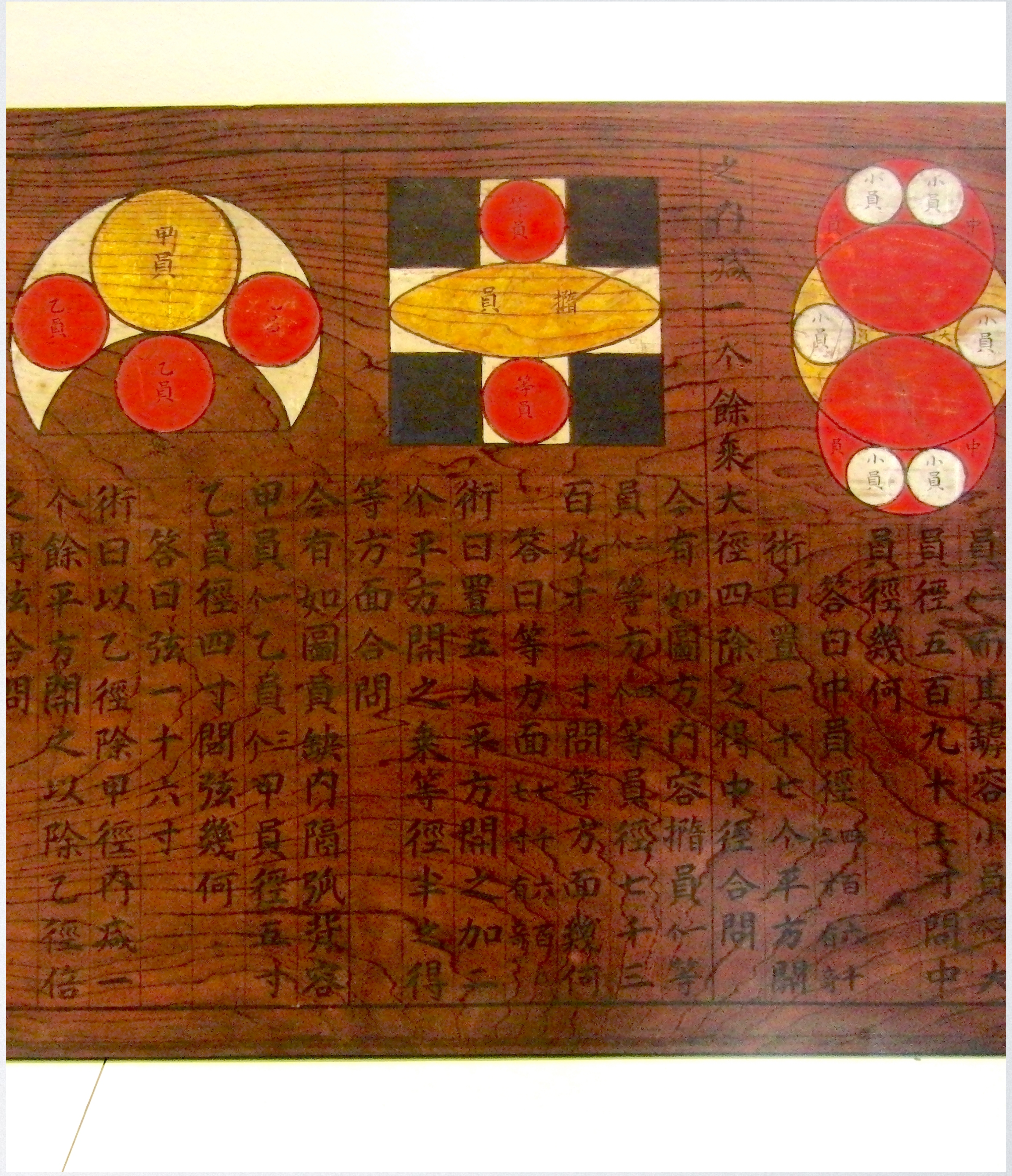


Bild: Wikipedia (Momotarou2012)

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)
- Auch schon früh: Interesse an reinen intellektuellen Fragen und Ästhetik

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)
- Auch schon früh: Interesse an reinen intellektuellen Fragen und Ästhetik
- Viel mehr als nur Dreiecke: gekrümmte Räume, hohe Dimensionen…

GEOMETRIE

- Eine der ältesten mathematischen Disziplinen
- Relevant für praktische Probleme (Vermessung, Steuern…)
- Auch schon früh: Interesse an reinen intellektuellen Fragen und Ästhetik
- Viel mehr als nur Dreiecke: gekrümmte Räume, hohe Dimensionen…
- Heute noch immer: praktisch relevant und interessant

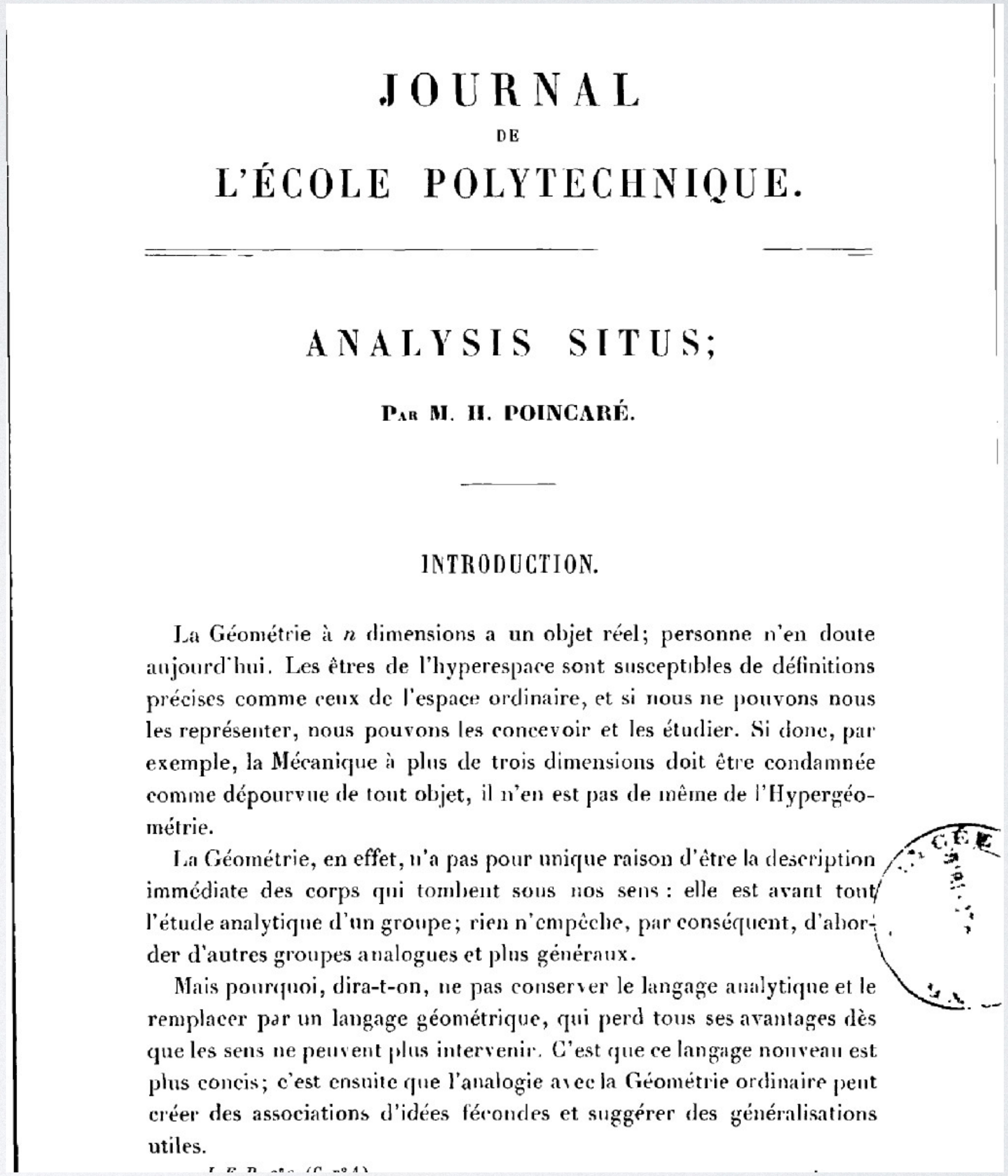
TOPOLOGIE

TOPOLOGIE

- Beginnt Ende der 19. Jahrhunderts

TOPOLOGIE

- Beginnt Ende der 19. Jahrhunderts
- Erstes wichtiges Werk "Analysis Situs" (Poincaré, 1895)



JOURNAL

DE

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ANALYSIS SITUS;

PAR M. H. POINCARÉ.

INTRODUCTION.

La Géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

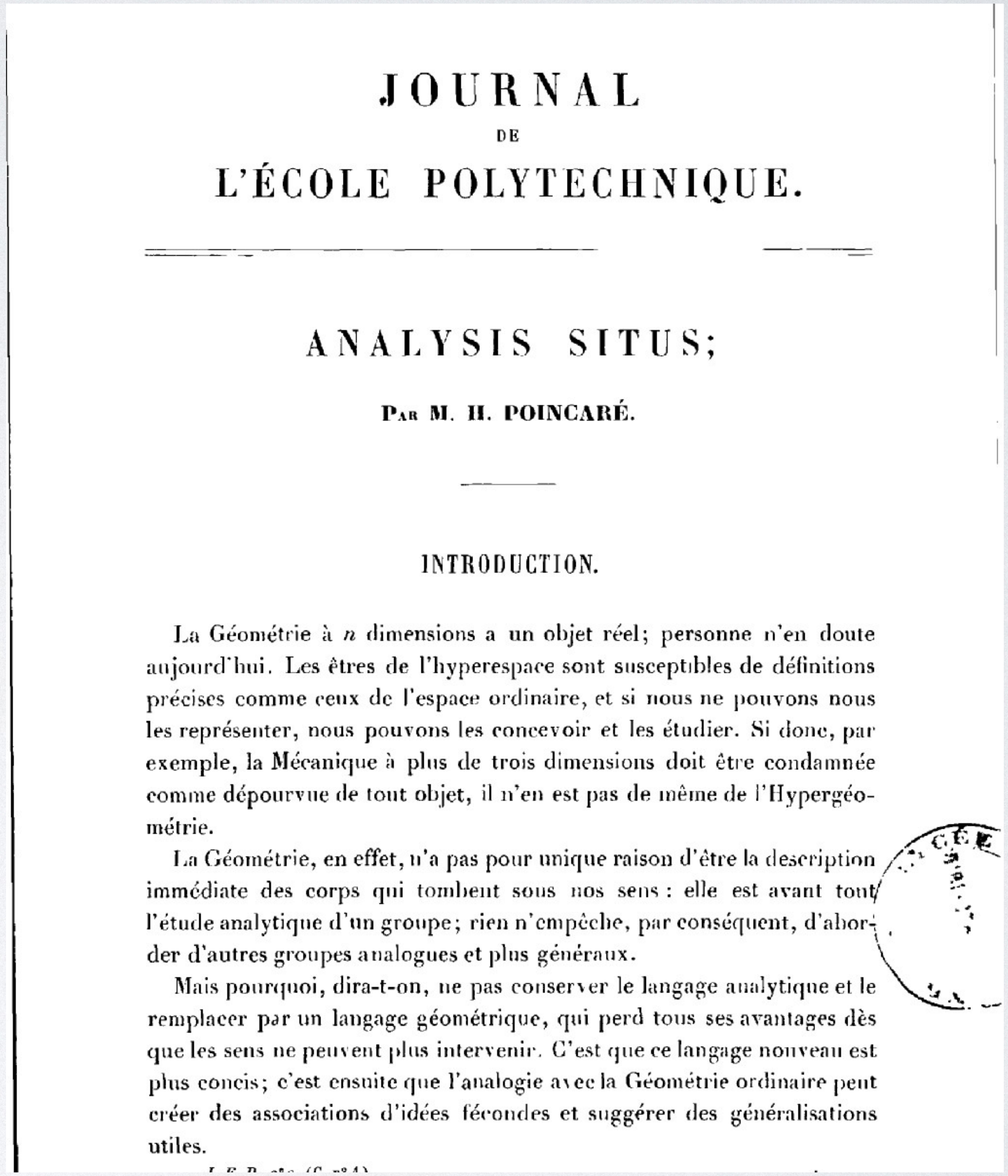
La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles.

Bild: Bibliothèque nationale de France.

TOPOLOGIE

- Beginnt Ende der 19. Jahrhunderts
- Erstes wichtiges Werk "Analysis Situs" (Poincaré, 1895)
- Eines der aktivsten aktuellen reinen Gebiete (etwa 170 neue Preprints diesen Monat!)



JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ANALYSIS SITUS;

PAR M. H. POINCARÉ.

INTRODUCTION.

La Géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

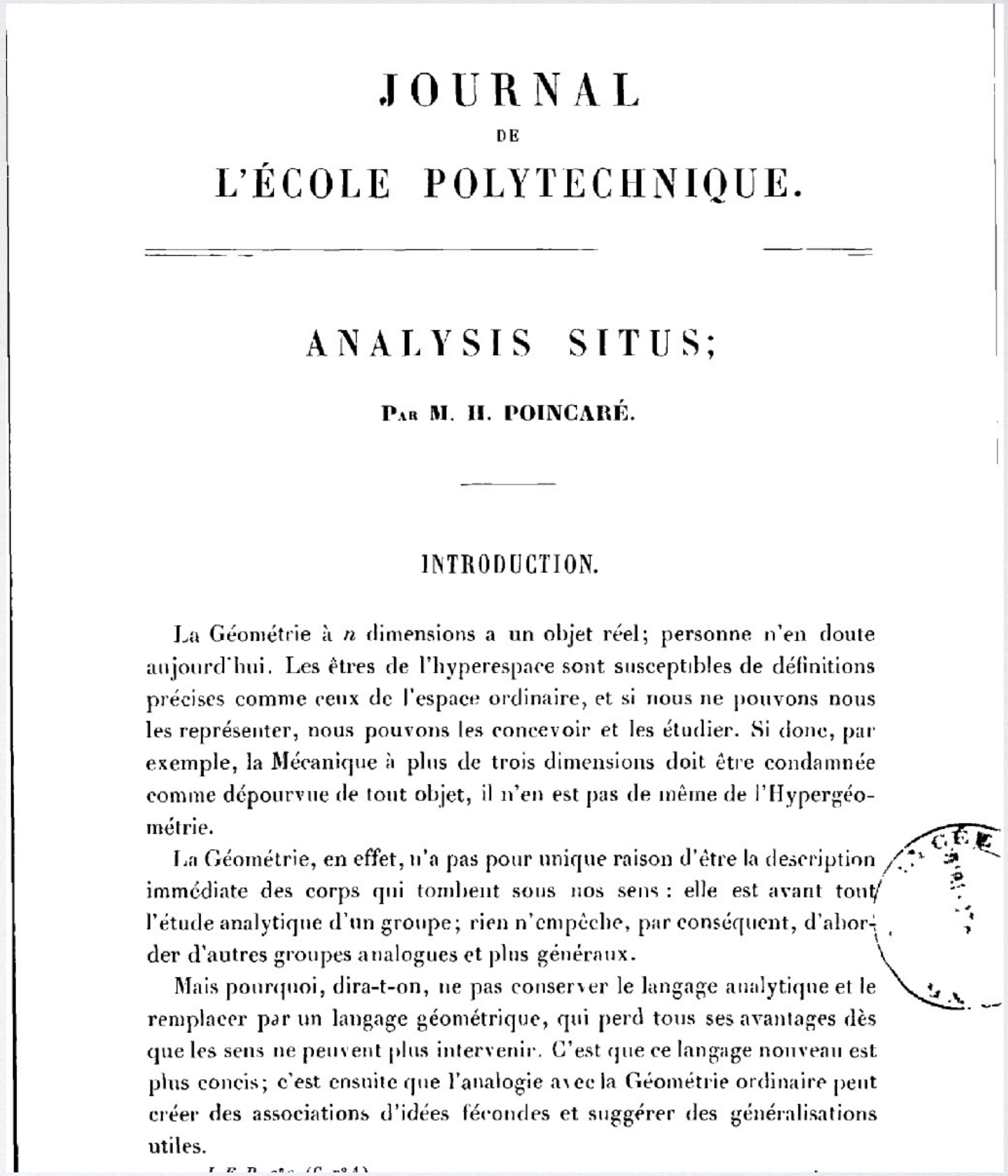
La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles.

Bild: Bibliothèque nationale de France.

TOPOLOGIE

- Beginnt Ende der 19. Jahrhunderts
- Erstes wichtiges Werk "Analysis Situs" (Poincaré, 1895)
- Eines der aktivsten aktuellen reinen Gebiete (etwa 170 neue Preprints diesen Monat!)
- Relevant auch für moderne Physik (z.B. Nobelpreis 2016, TQFTs)



JOURNAL
DE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

ANALYSIS SITUS;

PAR M. H. POINCARÉ.

INTRODUCTION.

La Géométrie à n dimensions a un objet réel; personne n'en doute aujourd'hui. Les êtres de l'hyperespace sont susceptibles de définitions précises comme ceux de l'espace ordinaire, et si nous ne pouvons nous les représenter, nous pouvons les concevoir et les étudier. Si donc, par exemple, la Mécanique à plus de trois dimensions doit être condamnée comme dépourvue de tout objet, il n'en est pas de même de l'Hypergéométrie.

La Géométrie, en effet, n'a pas pour unique raison d'être la description immédiate des corps qui tombent sous nos sens : elle est avant tout l'étude analytique d'un groupe; rien n'empêche, par conséquent, d'aborder d'autres groupes analogues et plus généraux.

Mais pourquoi, dira-t-on, ne pas conserver le langage analytique et le remplacer par un langage géométrique, qui perd tous ses avantages dès que les sens ne peuvent plus intervenir. C'est que ce langage nouveau est plus concis; c'est ensuite que l'analogie avec la Géométrie ordinaire peut créer des associations d'idées fécondes et suggérer des généralisations utiles.

Bild: Bibliothèque nationale de France.

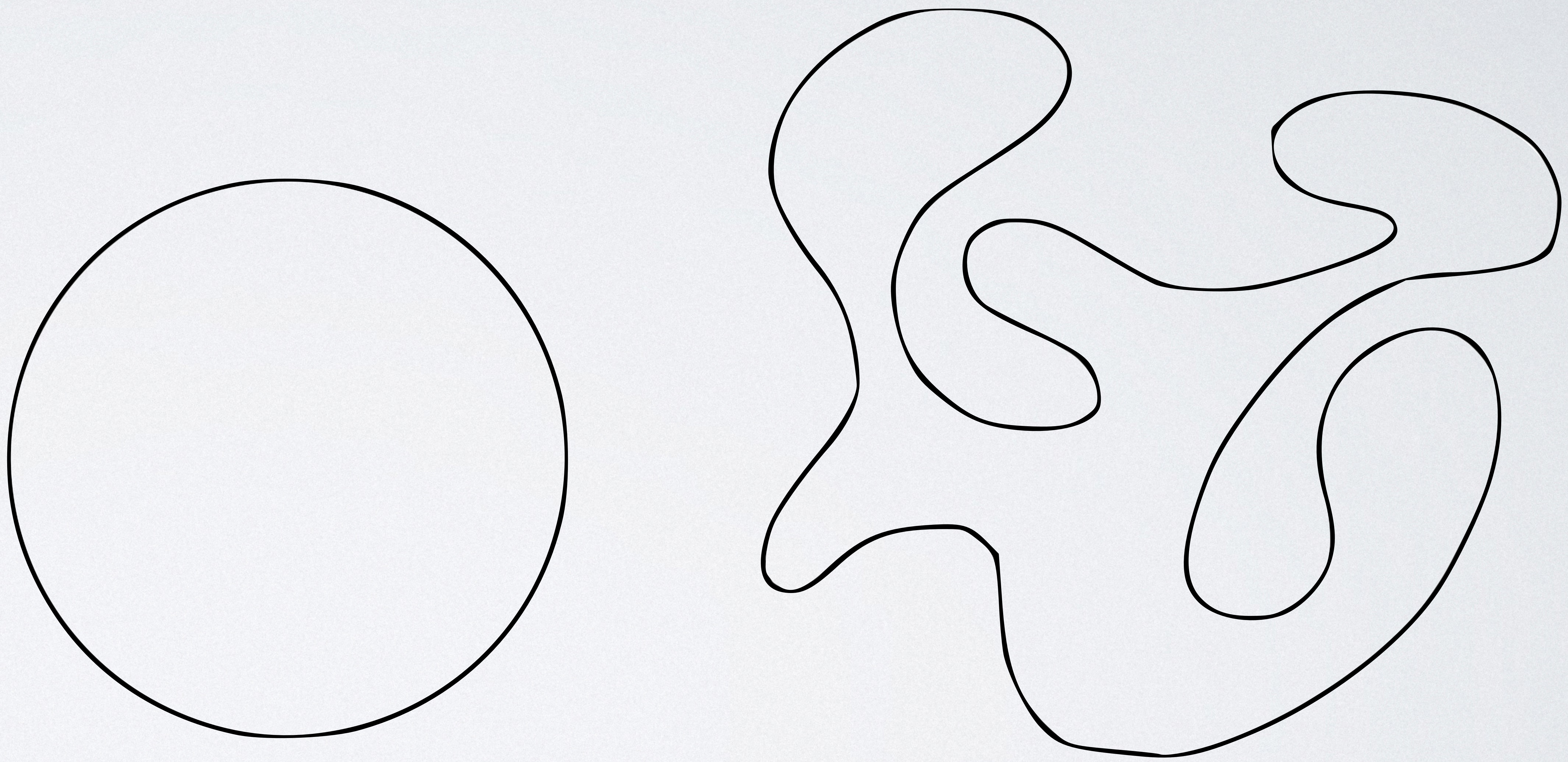
ABER WAS IST TOPOLOGIE?

ABER WAS IST TOPOLOGIE?

- Slogan: “Räume bis auf stetige Verformung”

ABER WAS IST TOPOLOGIE?

- Slogan: "Räume bis auf stetige Verformung"



ABER WAS IST TOPOLOGIE?

- Slogan: "Räume bis auf stetige Verformung"

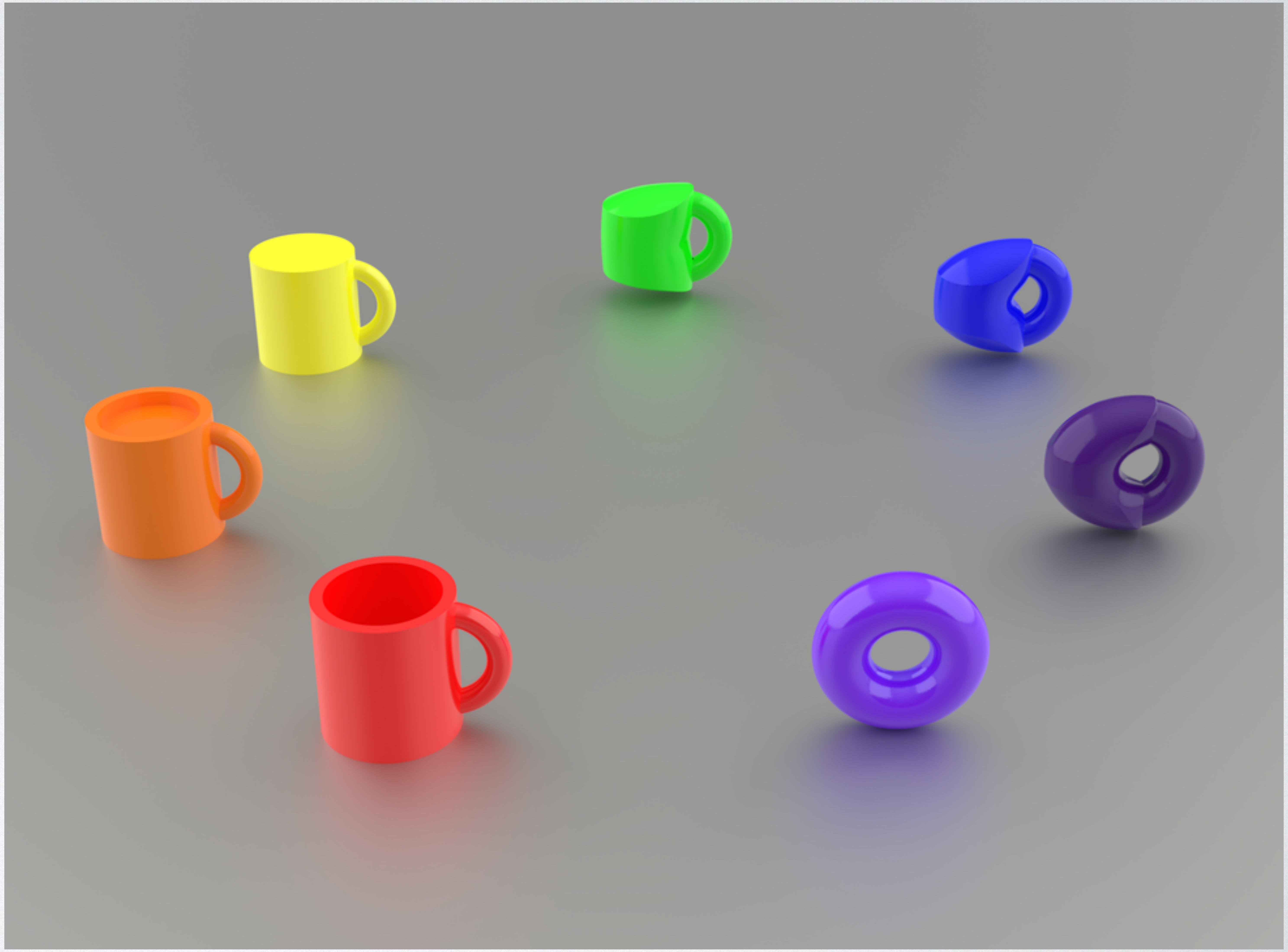


Bild: Diaaeldin Taha (HEGL)

ABER WAS IST TOPOLOGIE?

- Slogan: "Räume bis auf stetige Verformung"
- Keine Längen, keine Winkel…

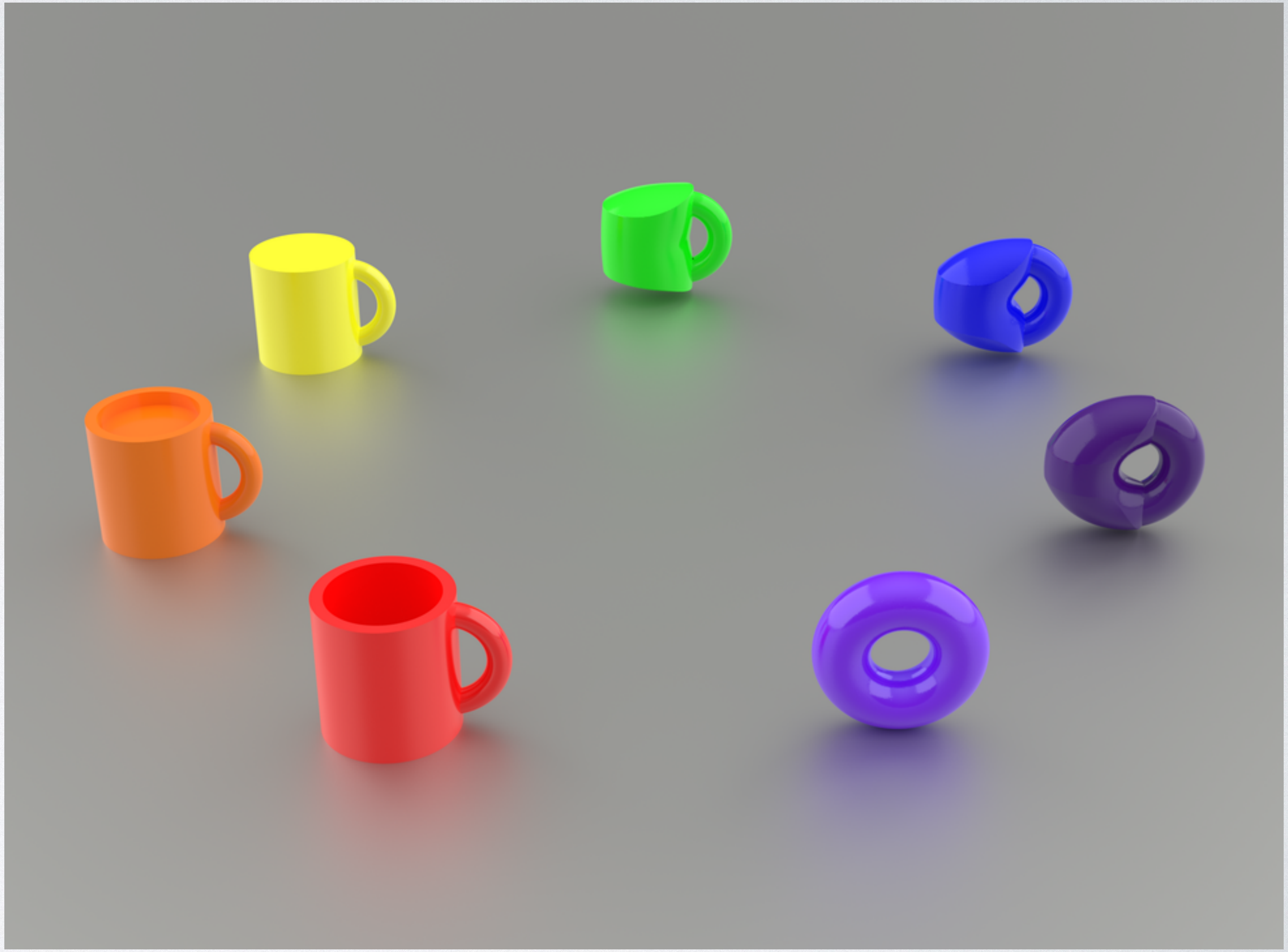


Bild: Diaaeldin Taha (HEGL)

ABER WAS IST TOPOLOGIE?

- Slogan: "Räume bis auf stetige Verformung"
- Keine Längen, keine Winkel…
- "Flexibler" als Geometrie

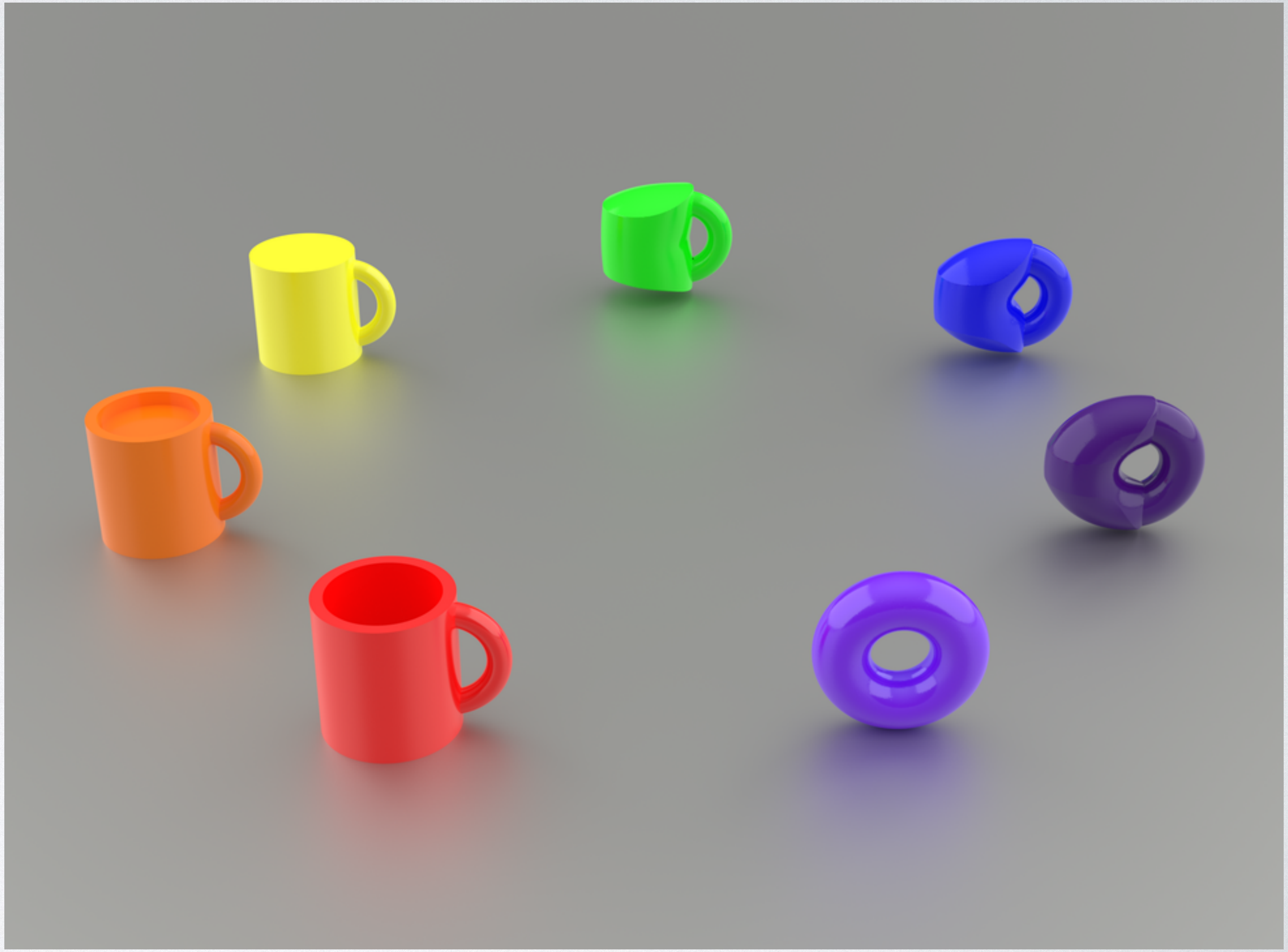


Bild: Diaaeldin Taha (HEGL)

FLÄCHEN

(zum Warmwerden)

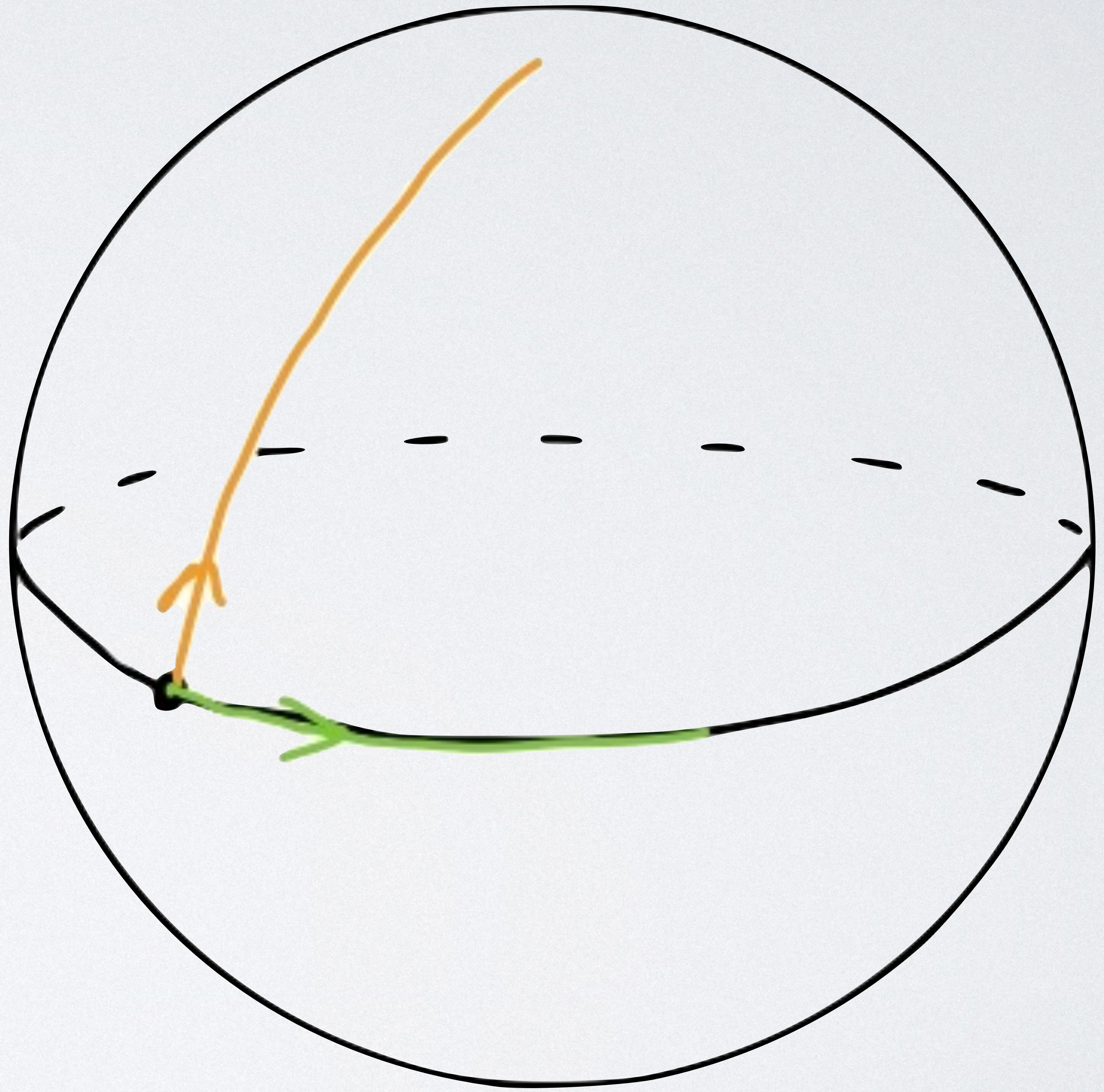
FLÄCHEN

FLÄCHEN

- Eine Fläche ist etwas, wo man sich an jedem Punkt “in genau zwei unabhängige Richtungen bewegen kann”

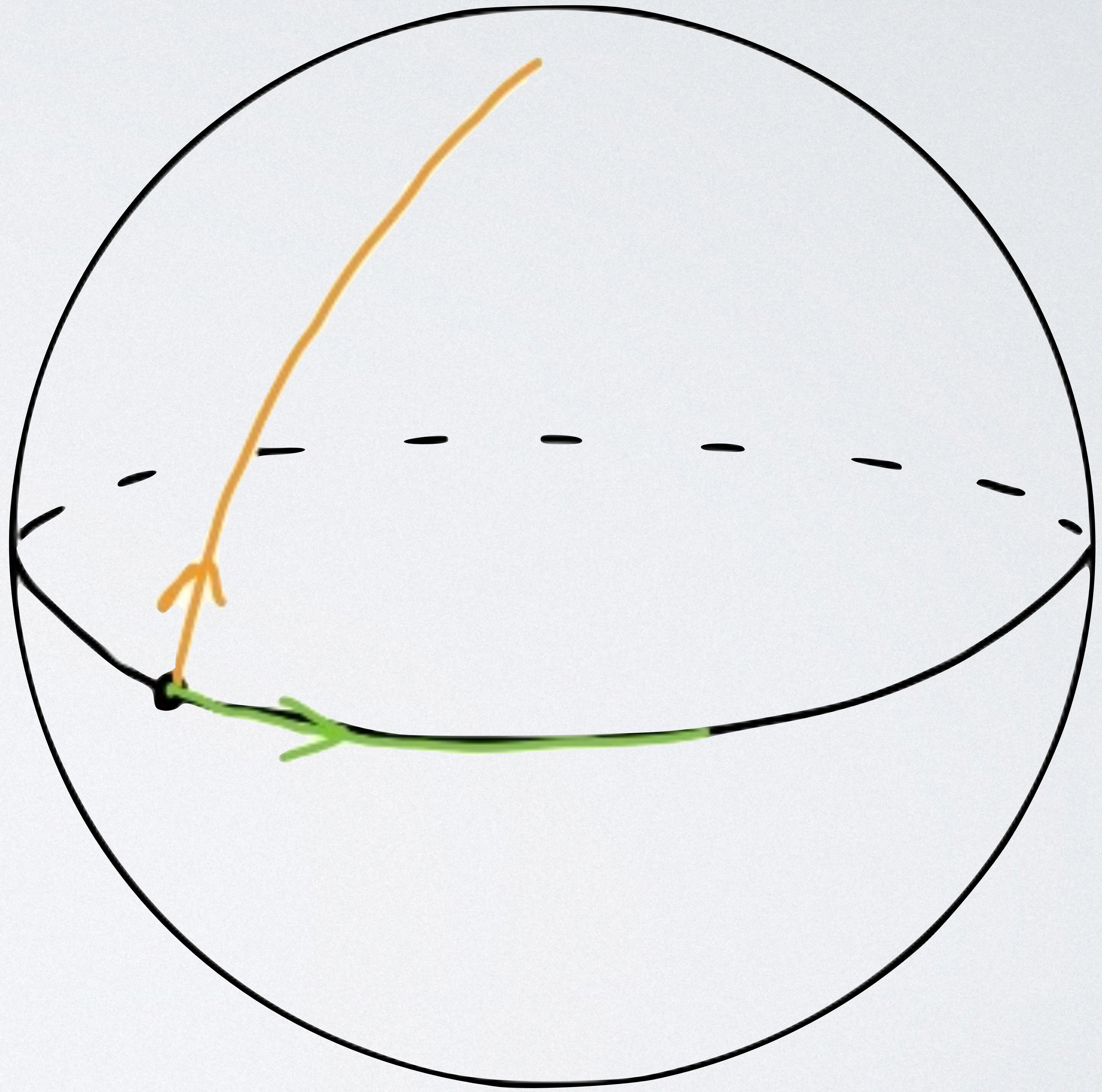
FLÄCHEN

- Eine Fläche ist etwas, wo man sich an jedem Punkt "in genau zwei unabhängige Richtungen bewegen kann"
- Präziser: lokal sieht der Raum aus wie die Ebene



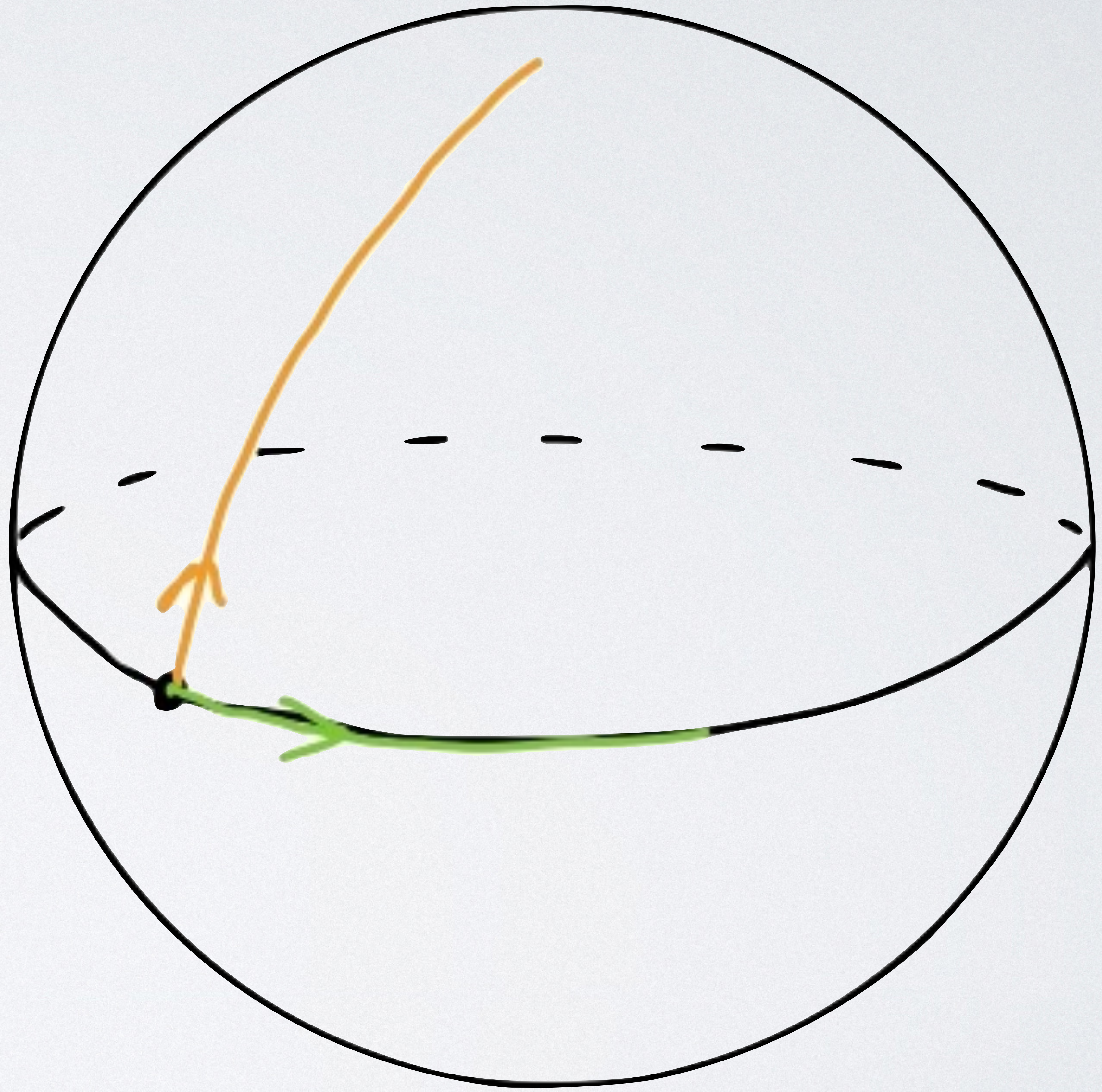
FLÄCHEN

- Eine Fläche ist etwas, wo man sich an jedem Punkt “in genau zwei unabhängige Richtungen bewegen kann”
- Präziser: lokal sieht der Raum aus wie die Ebene
- Beispiel: Erdoberfläche, Brezeloberfläche



FLÄCHEN

- Eine Fläche ist etwas, wo man sich an jedem Punkt "in genau zwei unabhängige Richtungen bewegen kann"
- Präziser: lokal sieht der Raum aus wie die Ebene
- Beispiel: Erdoberfläche, Brezeloberfläche
- Nicht-Beispiele: Hörsaal, Achterbahn, die ganze Breze, ein sich verzweigender Baum



FLÄCHEN, INTRINSISCH

FLÄCHEN, INTRINSISCH

- Viele Flächen sind im Raum eingebettet (alle, die wir bisher gesehen haben)

FLÄCHEN, INTRINSISCH

- Viele Flächen sind im Raum eingebettet (alle, die wir bisher gesehen haben)

- Aber: das ist nur zur Anschauung

FLÄCHEN, INTRINSISCH

- Viele Flächen sind im Raum eingebettet (alle, die wir bisher gesehen haben)
- Aber: das ist nur zur Anschauung
- Man sollte versuchen sich vorzustellen, "in der Fläche selber zu leben”

FLÄCHEN, INTRINSISCH

FLÄCHEN, INTRINSISCH

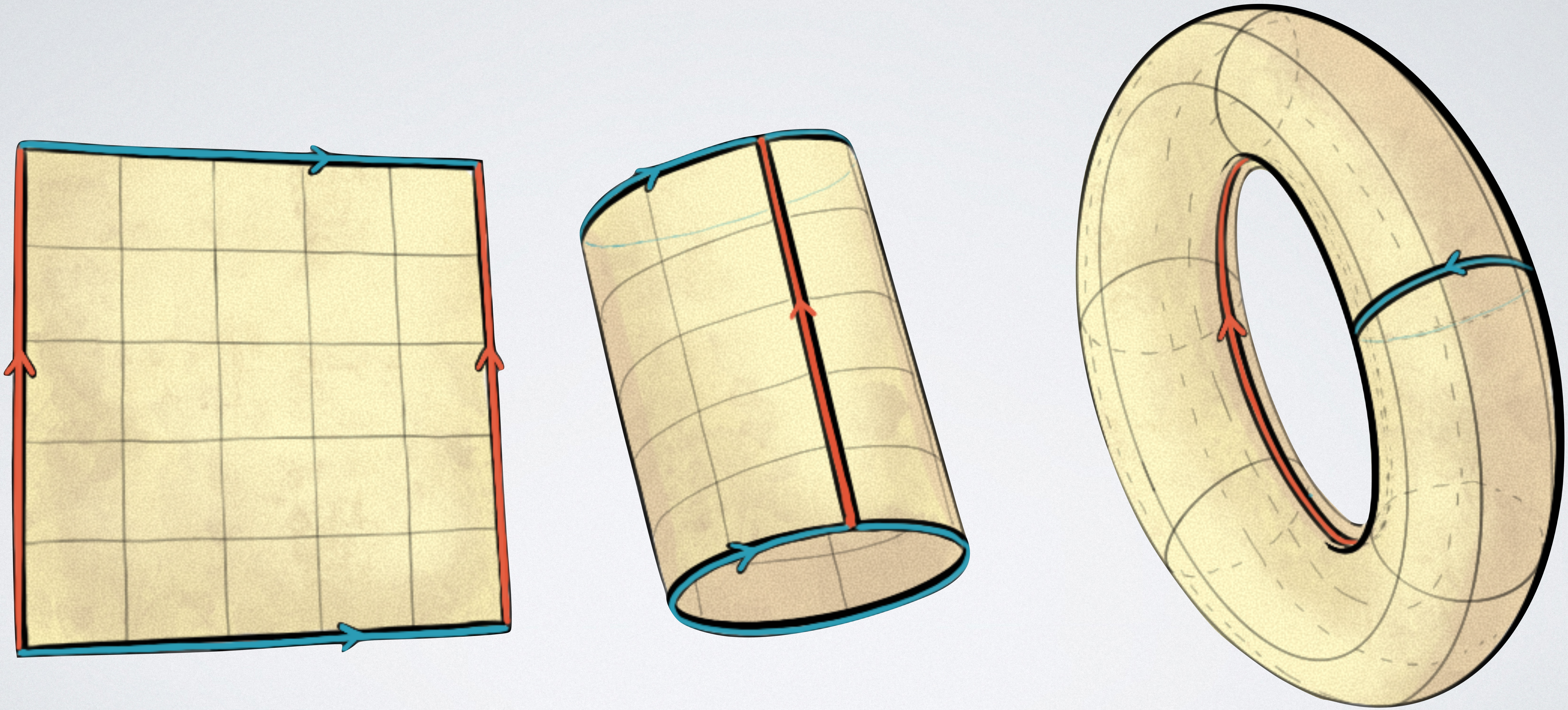
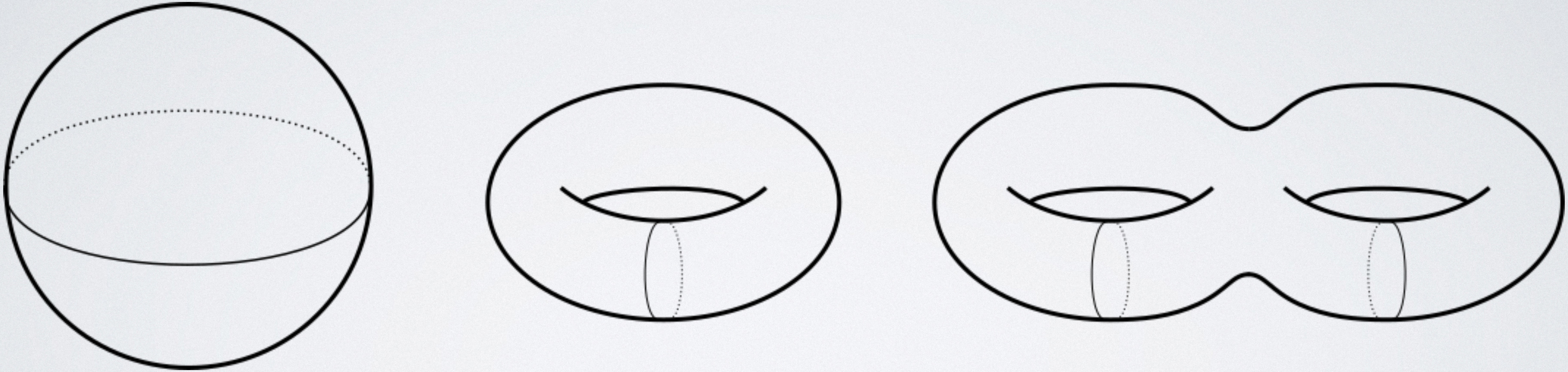


Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

WELCHE FLÄCHEN GIBT ES?



...

FLÄCHEN UNTERSCHEIDEN

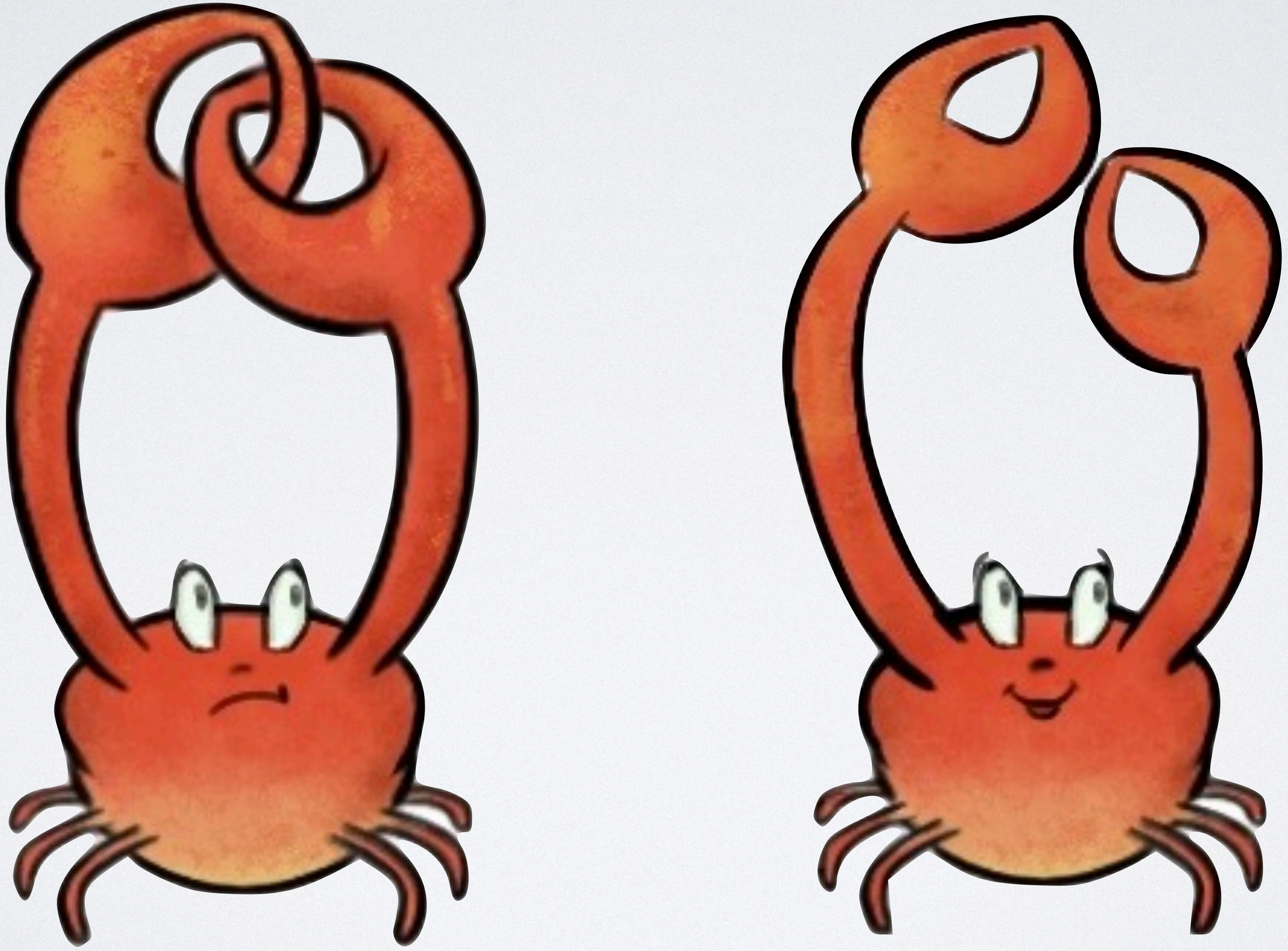


Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

FLÄCHEN UNTERSCHEIDEN

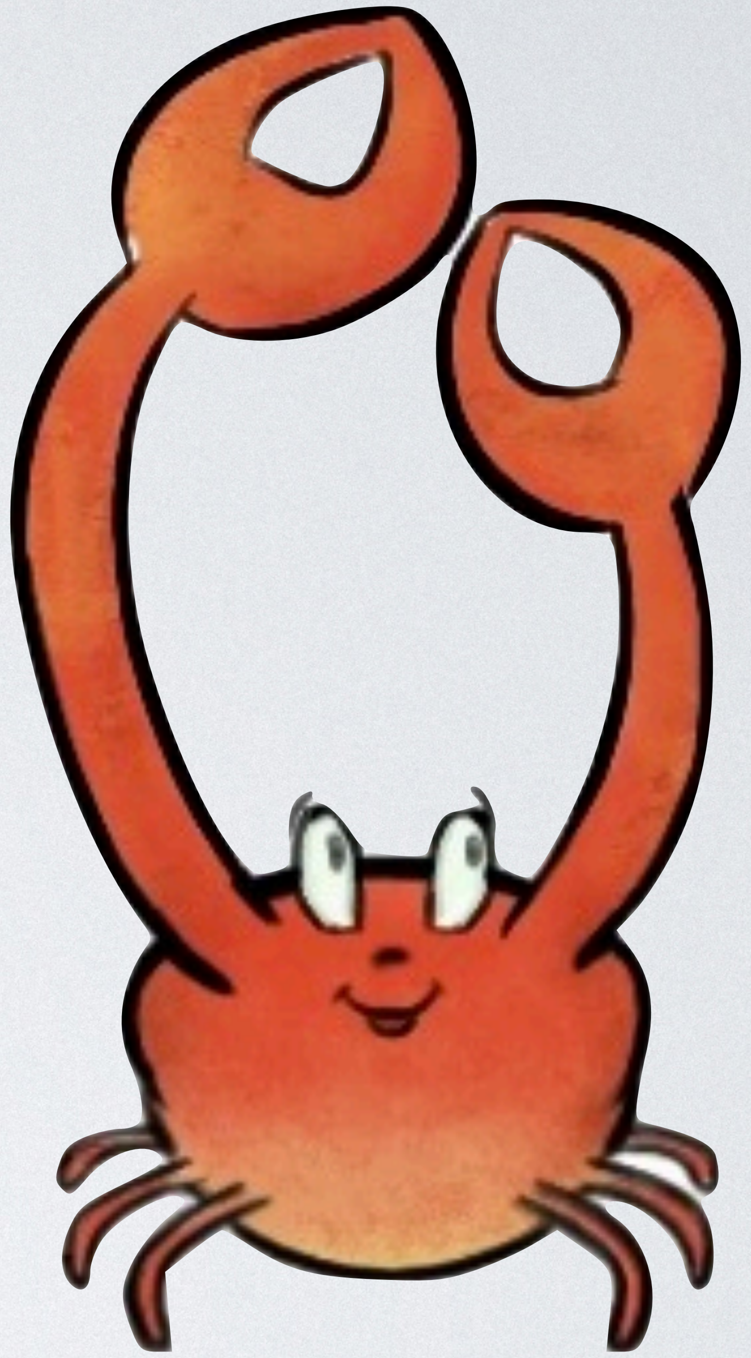


Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

FLÄCHEN UNTERSCHEIDEN

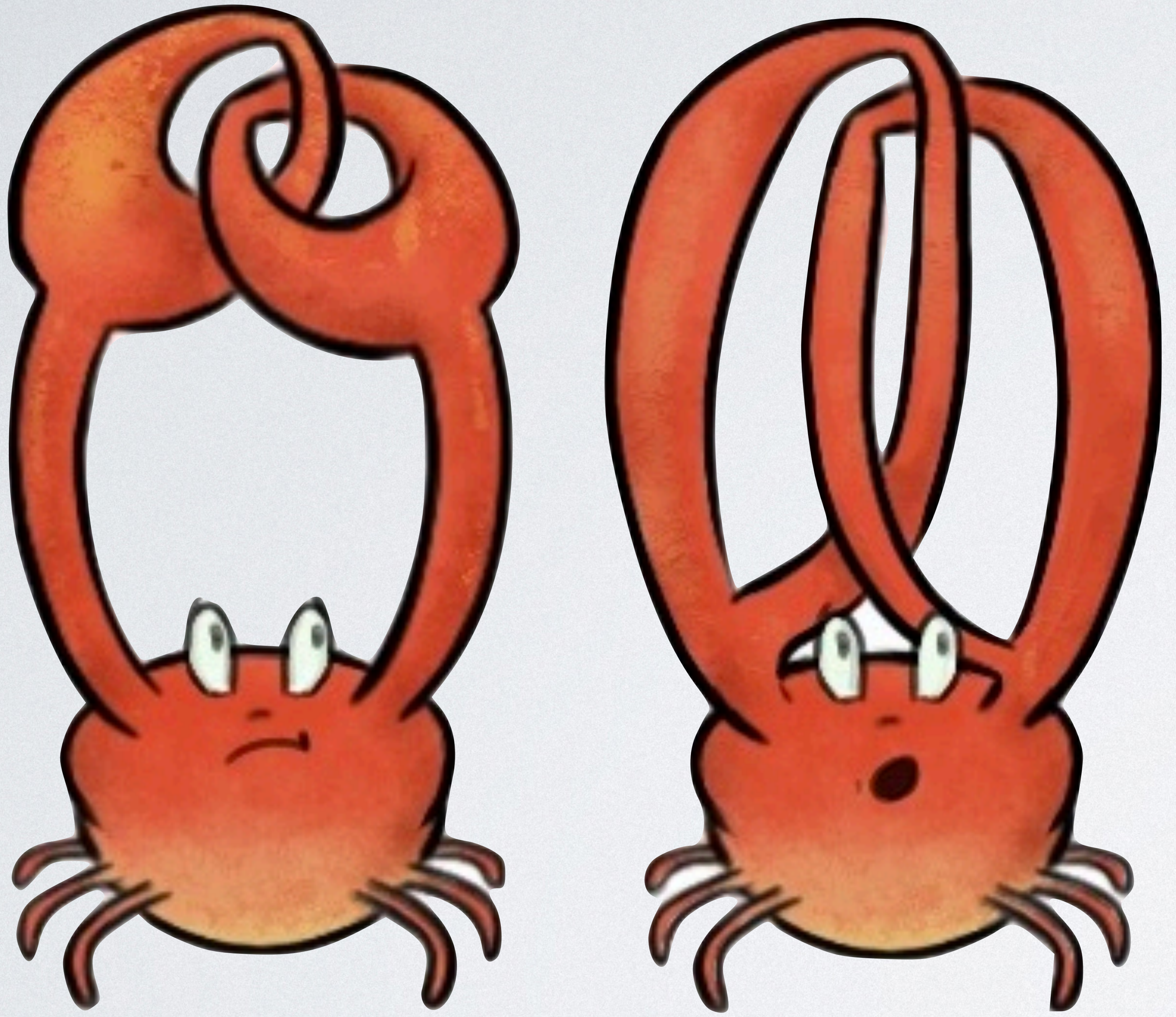
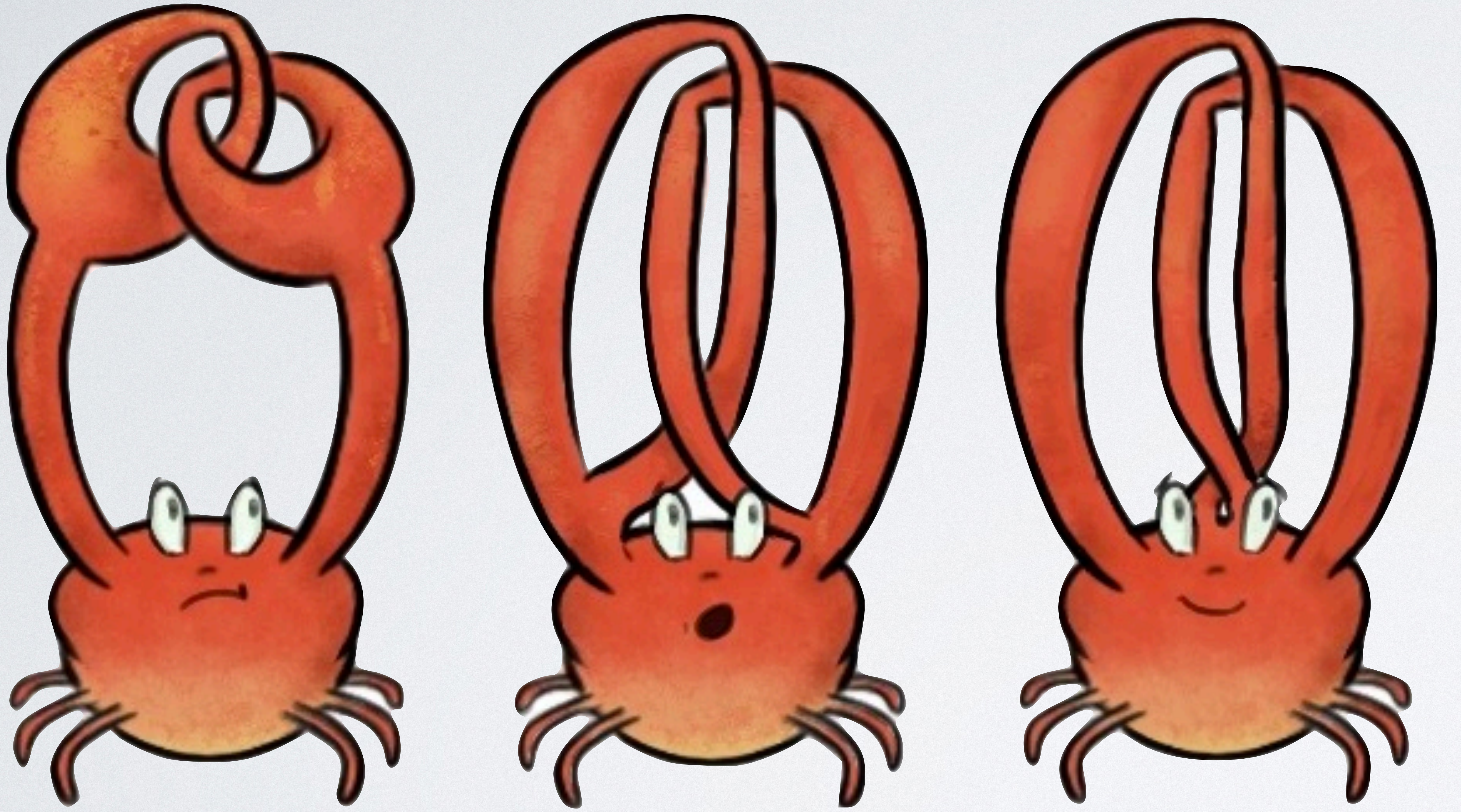


Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

FLÄCHEN UNTERSCHEIDEN



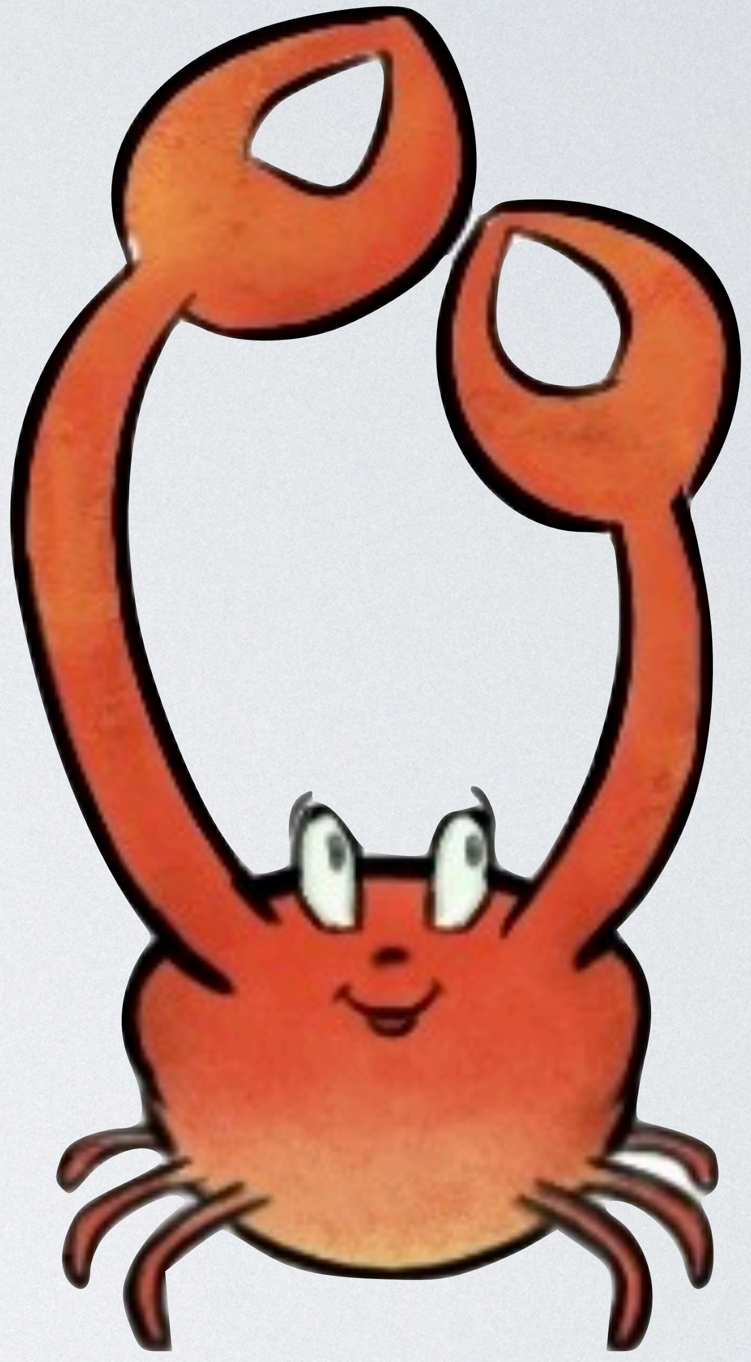


Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

FLÄCHEN UNTERSCHEIDEN

Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

FLÄCHEN UNTERSCHEIDEN

Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

- Topologische Klassifikation ist vielleicht einfacher (als in der Geometrie), weil es "weniger" Objekte gibt — viele geometrisch unterschiedliche Flächen sind topologisch gleich

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

- Topologische Klassifikation ist vielleicht einfacher (als in der Geometrie), weil es “weniger” Objekte gibt — viele geometrisch unterschiedliche Flächen sind topologisch gleich

- Topologische Klassifikation ist vielleicht aber doch sehr schwer, weil es gar nicht klar ist, was man vor sich hat…

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

- Die Idee von algebraischer Topologie ist: man ordnet (komplizierten) Räumen (einfache) Objekte wie Zahlen zu, die man leichter auseinanderhalten kann

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

Satz (Klassifikation von Flächen, 19. Jahrhundert)

Man kann jeder (zusammenhängenden, orientierten, kompakten) Fläche eine Zahl g zuordnen (die "Anzahl an Löchern"). Zwei solche Flächen sind dann topologisch gleich genau dann wenn diese Zahlen übereinstimmen. Ferner gilt:

$$2 - 2g = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Dreiecke}$$

wann immer man die Fläche in Dreiecke zerschneidet

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

Satz (Klassifikation von Flächen, 19. Jahrhundert)

Man kann jeder (zusammenhängenden, orientierten, kompakten) Fläche eine Zahl g zuordnen (die "Anzahl an Löchern"). Zwei solche Flächen sind dann topologisch gleich genau dann wenn diese Zahlen übereinstimmen. Ferner gilt:

$$2 - 2g = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Dreiecke}$$

wann immer man die Fläche in Dreiecke zerschneidet

Schwierigkeit heute: 5. Semester Mathematikstudium

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

- Der Klassifikationssatz ist perfektes Beispiel für das, was Topologen wollen:

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

- Der Klassifikationssatz ist perfektes Beispiel für das, was Topologen wollen:
- Man beschreibt die Gesamtheit der Objekte für die man sich interessiert (den Flächen)

TOPOLOGISCHE KLASSIFIKATION

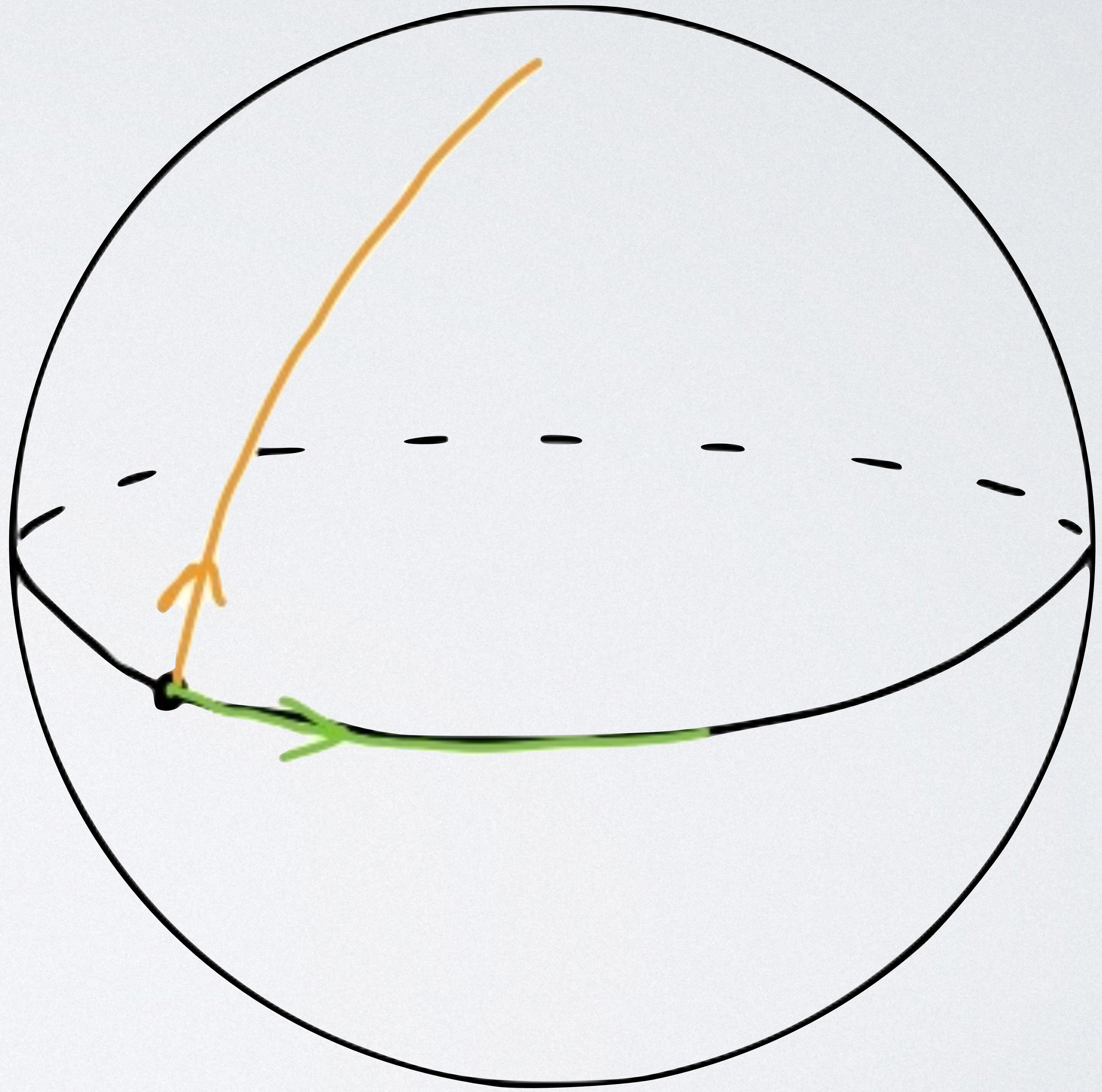
- Der Klassifikationssatz ist perfektes Beispiel für das, was Topologen wollen:
- Man beschreibt die Gesamtheit der Objekte für die man sich interessiert (den Flächen)
- Man führt das topologische Äquivalenzproblem auf Gleichheit einer einfacheren Größe (der Zahl g) zurück

DREIDIMENSIONALE RÄUME

(ohne vier Dimensionen)

FLÄCHEN

- Eine Fläche ist etwas, wo man sich an jedem Punkt "in genau zwei unabhängige Richtungen bewegen kann"
- Präziser: lokal sieht der Raum aus wie die Ebene
- Beispiel: Erdoberfläche, Brezeloberfläche
- Nicht-Beispiele: Hörsaal, Achterbahn, die ganze Breze, ein sich verzweigender Baum



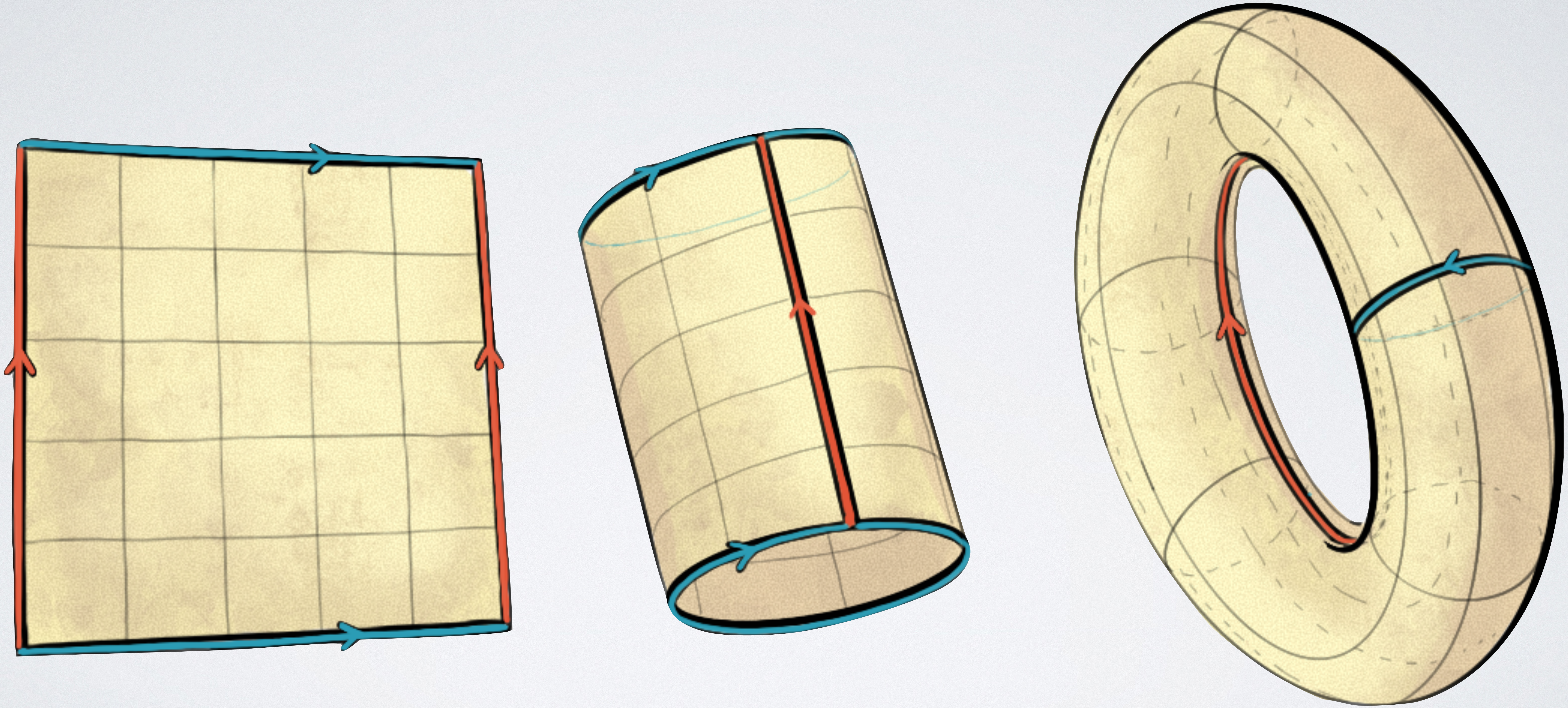
3-DIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEITEN

?

3-DIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEITEN

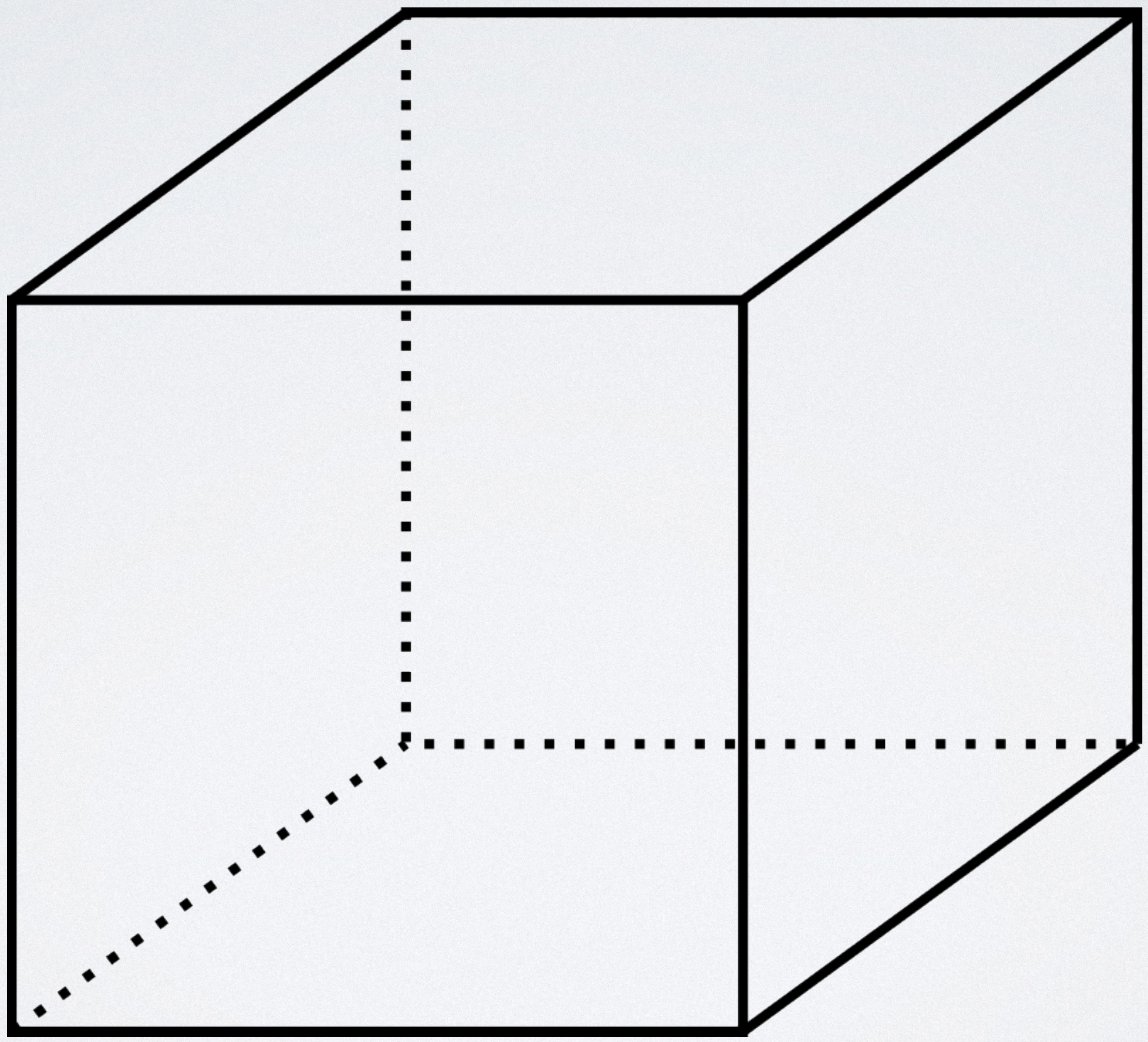
- Eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist etwas, wo man sich an jedem Punkt "in genau drei unabhängige Richtungen bewegen kann"
- Präziser: lokal sieht M aus wie die "normale" Raum um uns herum

DER 3-TORUS

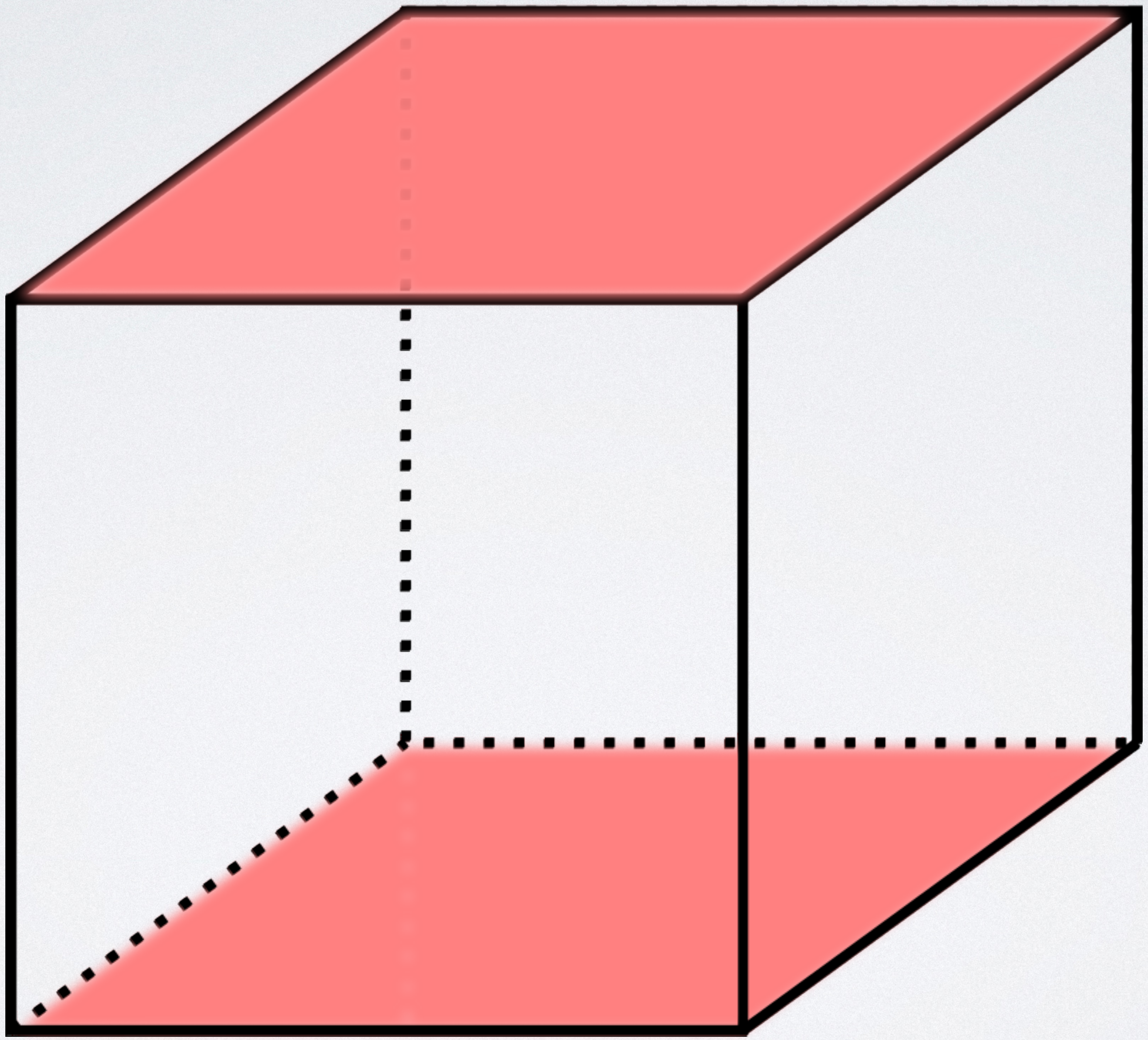


DER 3-TORUS

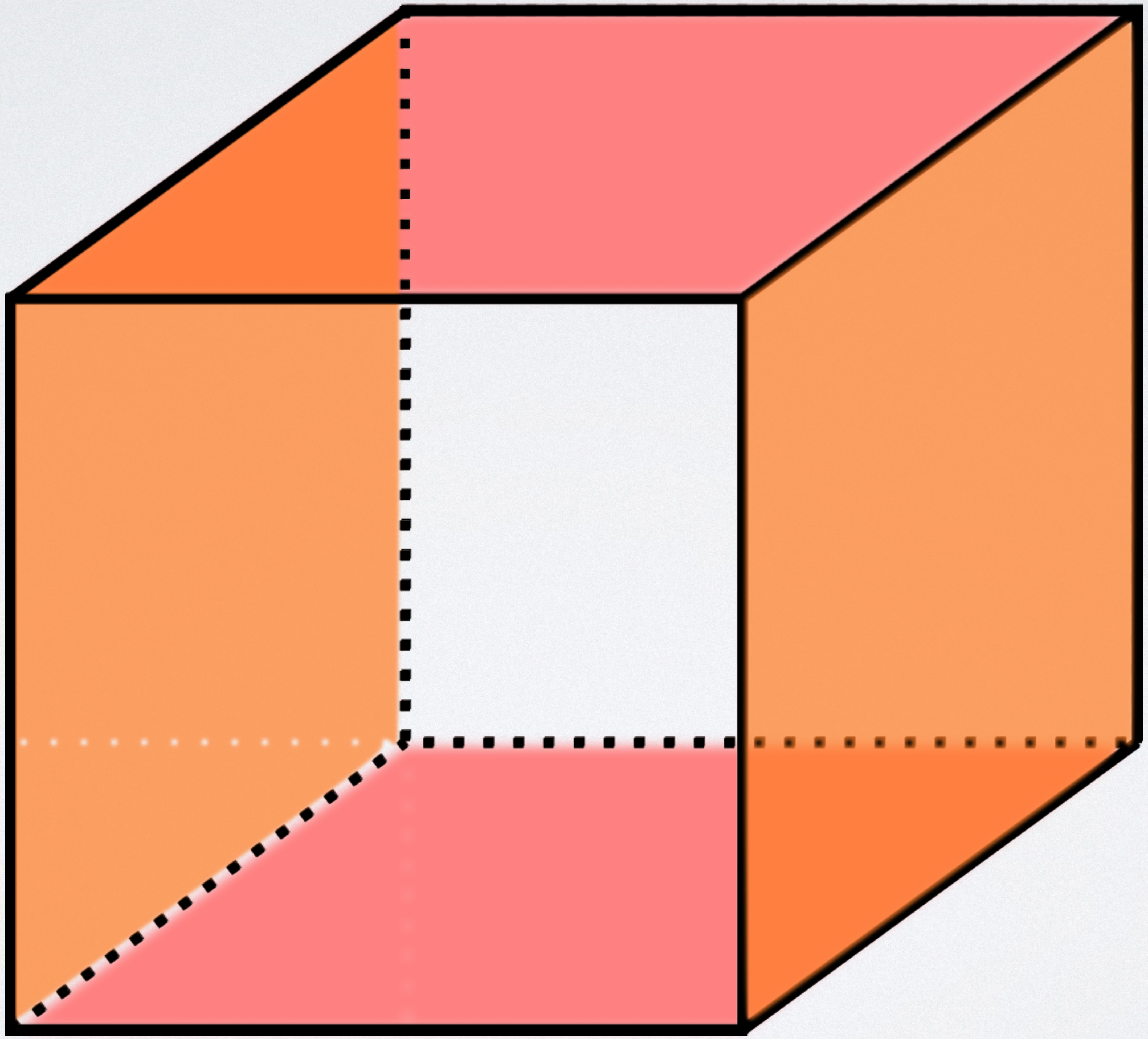
DER 3-TORUS



DER 3-TORUS



DER 3-TORUS



DER 3-TORUS

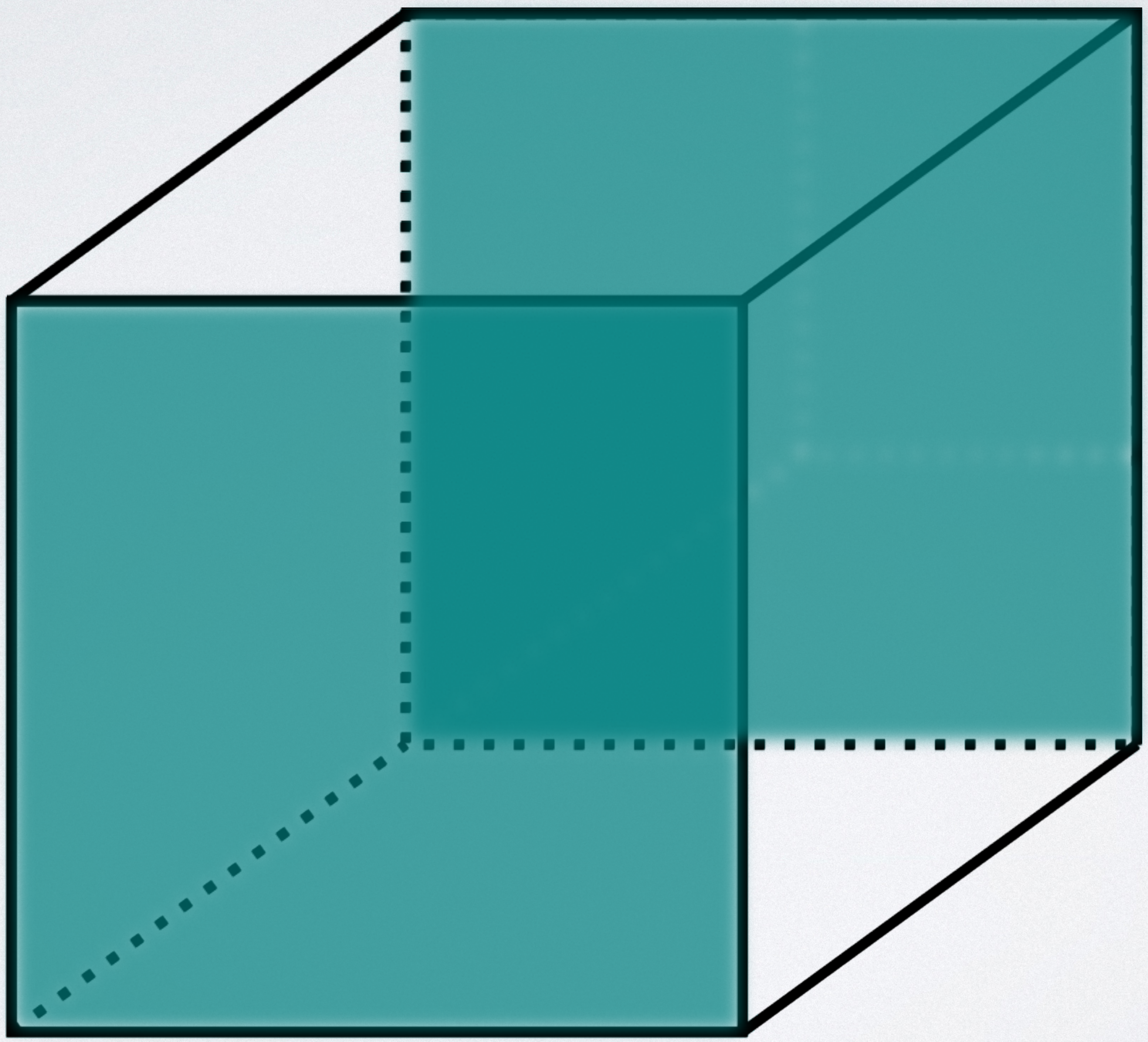



Bild: Jeff Weeks (Curved Spaces)

DIE 3-SPHÄRE

DIE 3-SPHÄRE

- Die 2-Sphäre: Alle Punkte im 3-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung

DIE 3-SPHÄRE

- Die 2-Sphäre: Alle Punkte im 3-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung
- Alternativ: Rand des 3-dimensionalen Balls

DIE 3-SPHÄRE

- Die 2-Sphäre: Alle Punkte im 3-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung
- Alternativ: Rand des 3-dimensionalen Balls
- Die 3-Sphäre: Alle Punkte im 4-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung

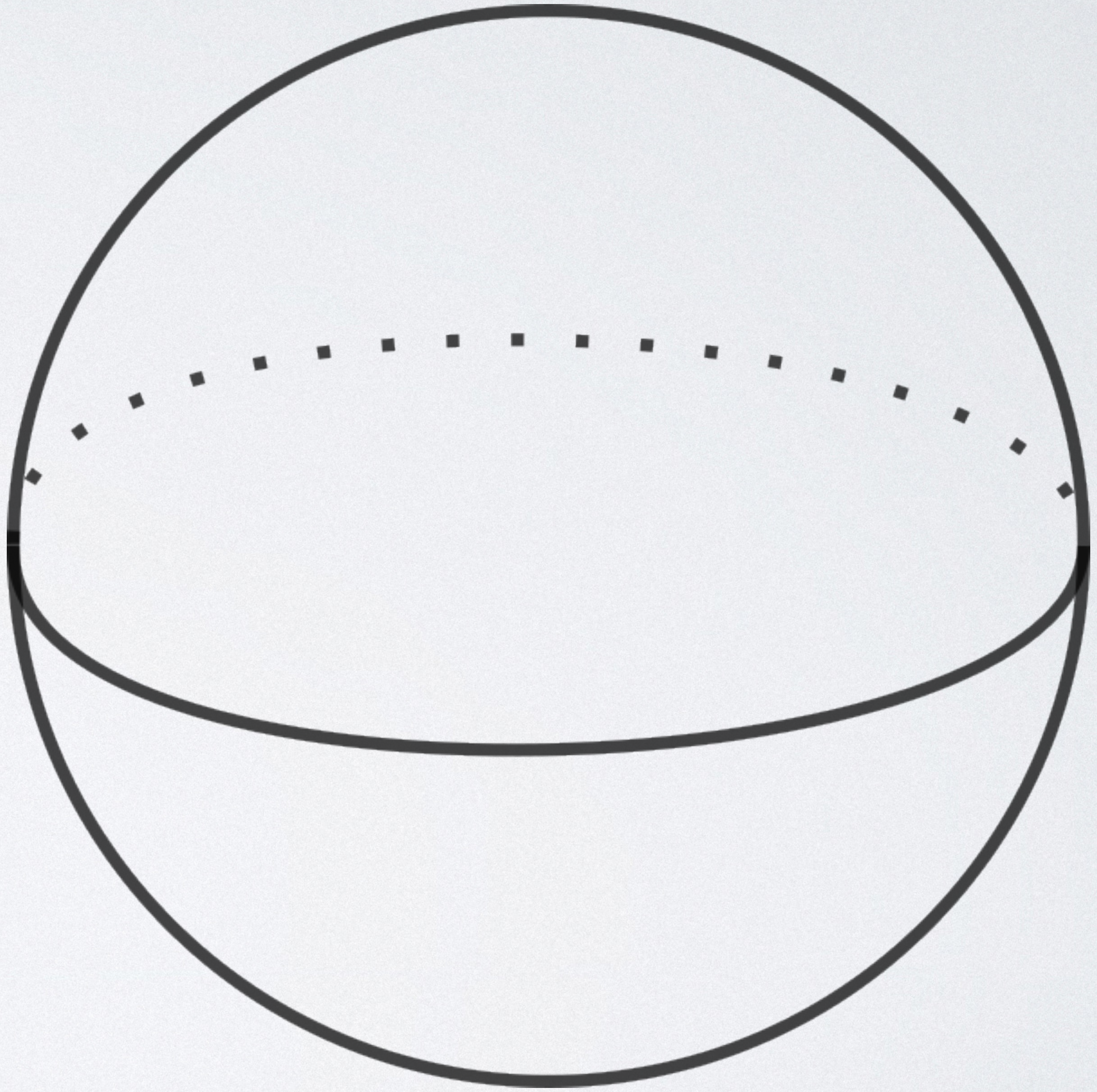
DIE 3-SPHÄRE

- Die 2-Sphäre: Alle Punkte im 3-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung
- Alternativ: Rand des 3-dimensionalen Balls
- Die 3-Sphäre: Alle Punkte im 4-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung
- Alternativ: Rand des 4-dimensionalen Balls

DIE 3-SPHÄRE

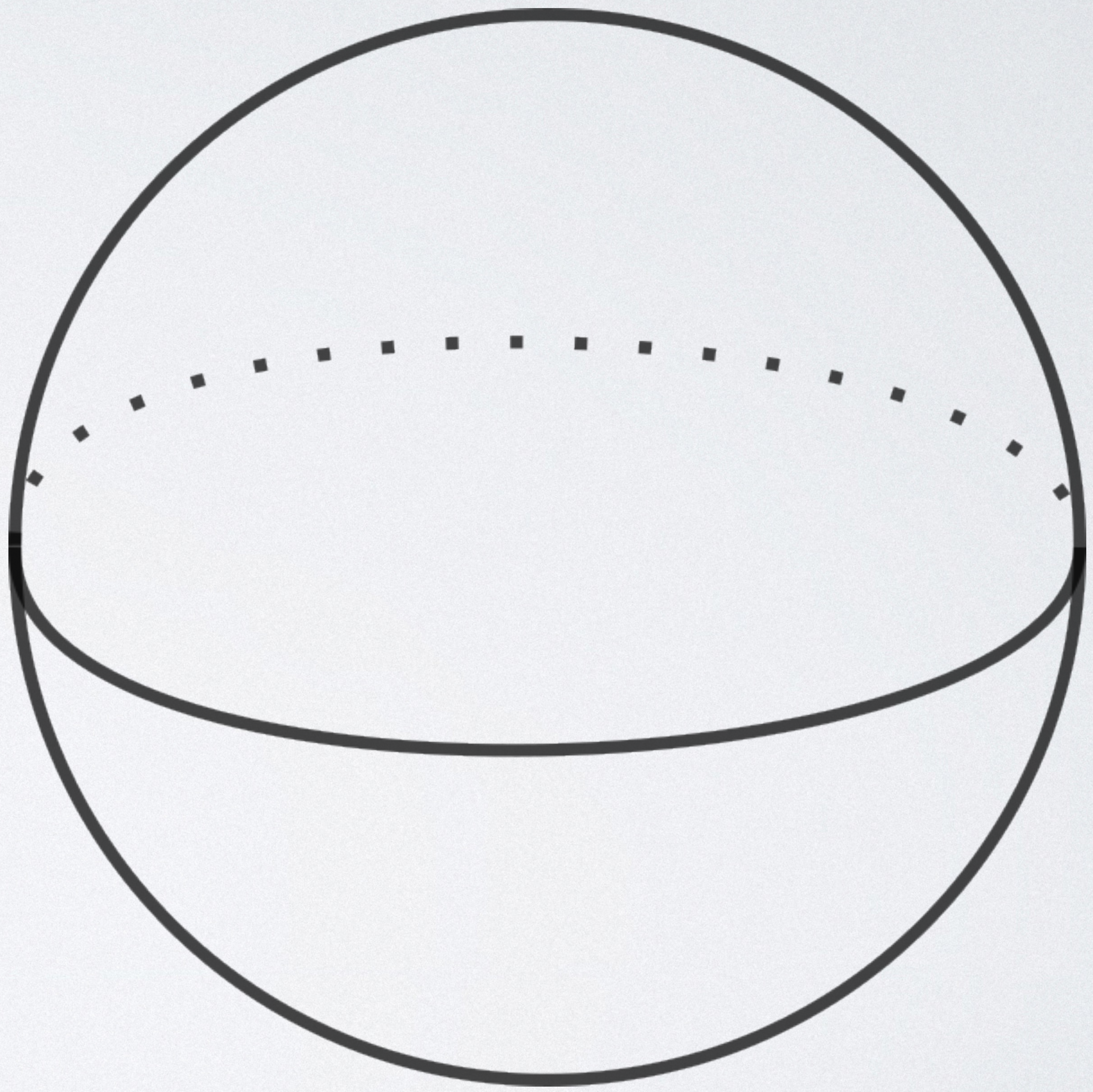
- Die 2-Sphäre: Alle Punkte im 3-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung
- Alternativ: Rand des 3-dimensionalen Balls
- Die 3-Sphäre: Alle Punkte im 4-dimensionalen Raum mit Abstand 1 zum Ursprung
- Alternativ: Rand des 4-dimensionalen Balls
- …das ist ein bisschen unhilfreich

DIE 2-SPHÄRE, INTRINSISCH



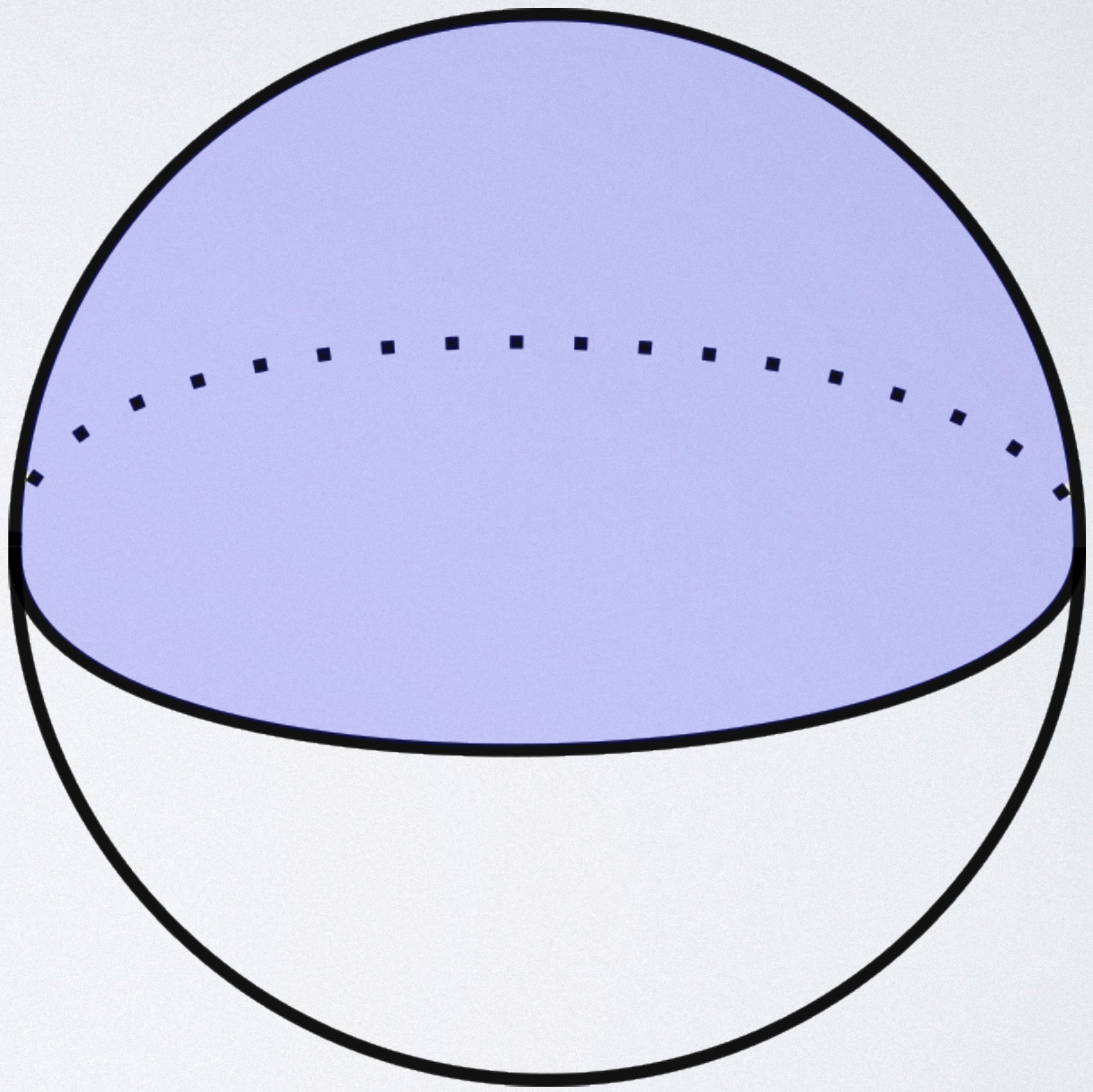
DIE 2-SPHÄRE, INTRINSISCH

- Die 2-Sphäre kann in Nord- und Südhalbkugel zerlegt werden



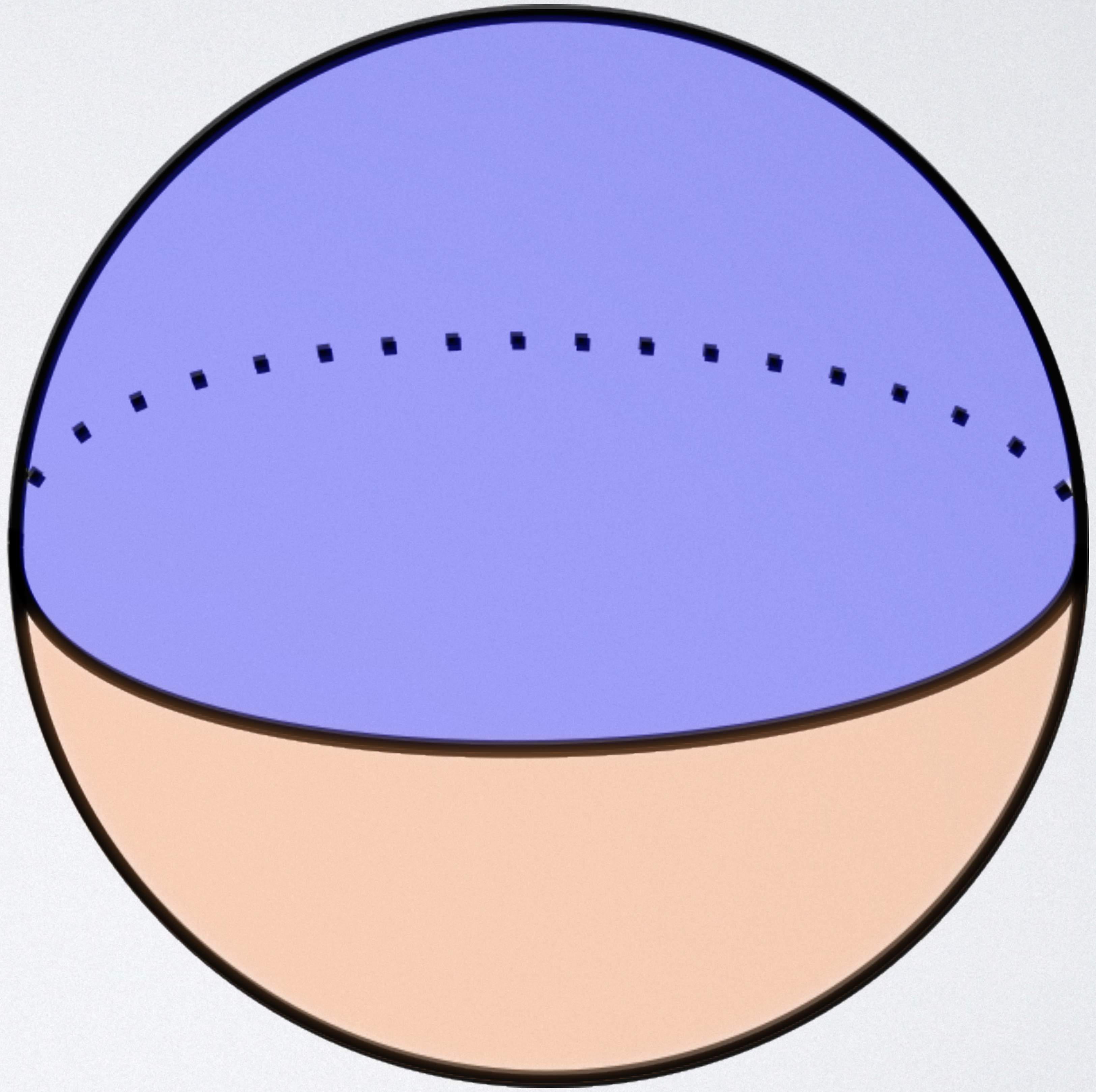
DIE 2-SPHÄRE, INTRINSISCH

- Die 2-Sphäre kann in Nord- und Südhalbkugel zerlegt werden



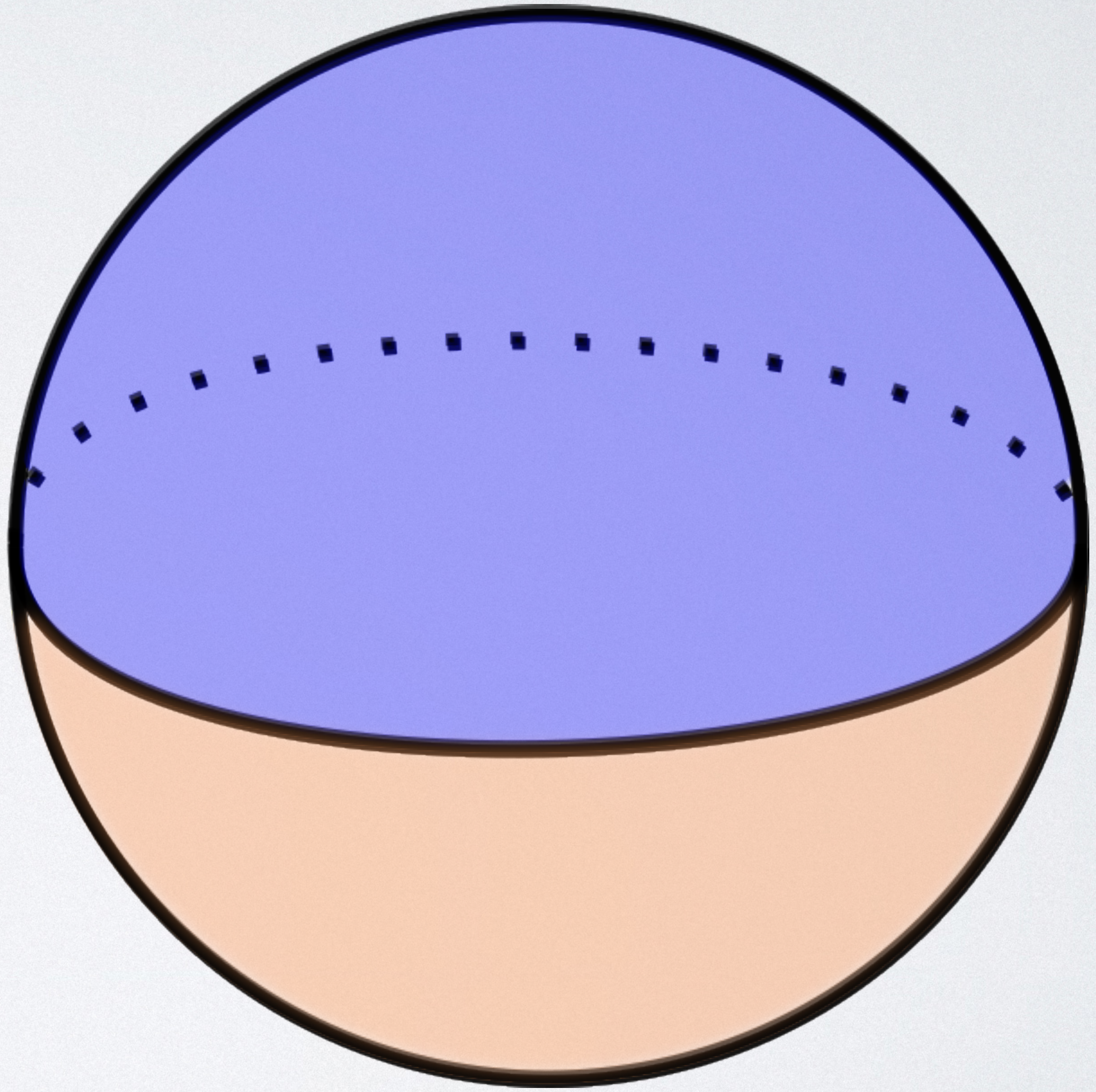
DIE 2-SPHÄRE, INTRINSISCH

- Die 2-Sphäre kann in Nord- und Südhalbkugel zerlegt werden



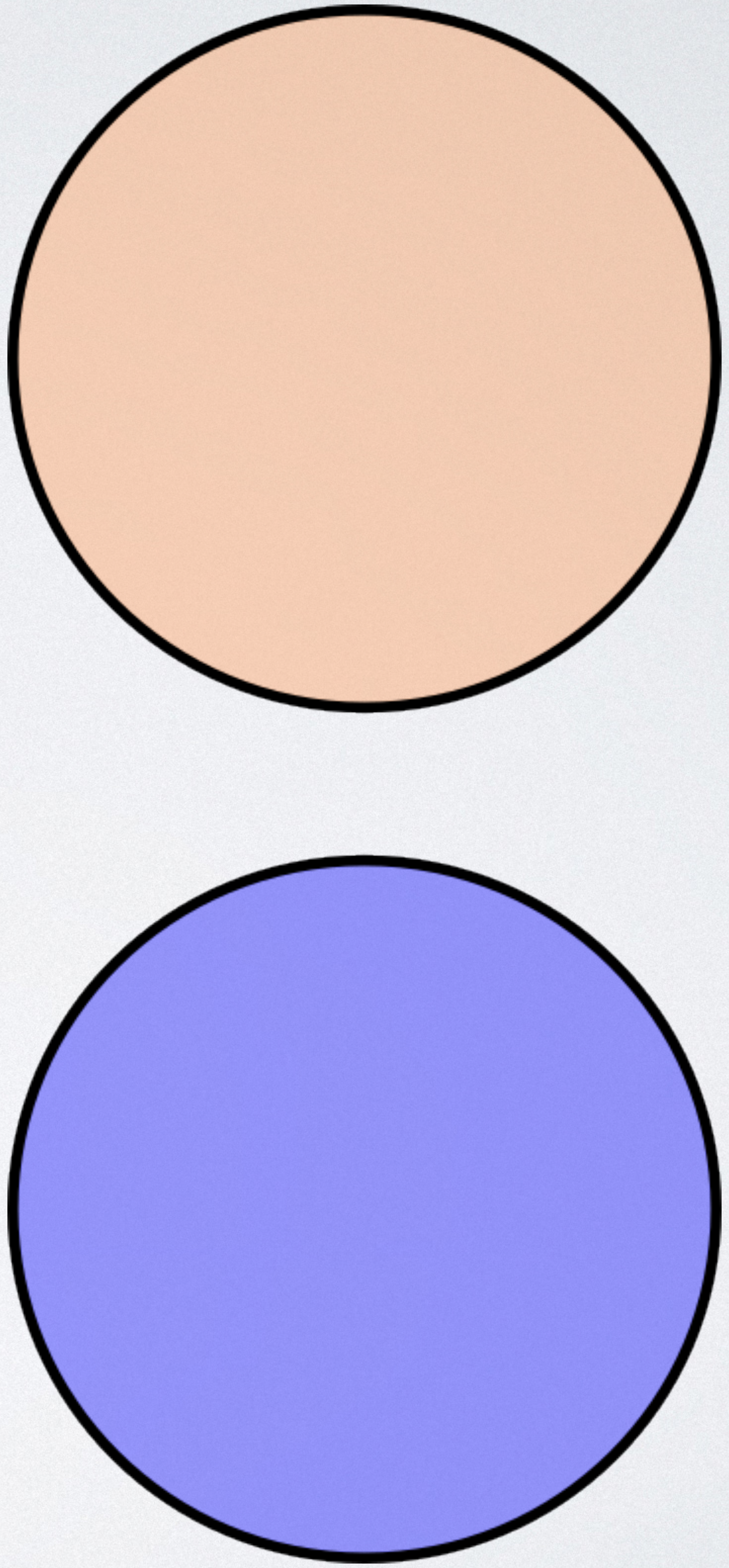
DIE 2-SPHÄRE, INTRINSISCH

- Die 2-Sphäre kann in Nord- und Südhalbkugel zerlegt werden
- Beides sind (2-dimensionale!) Scheiben



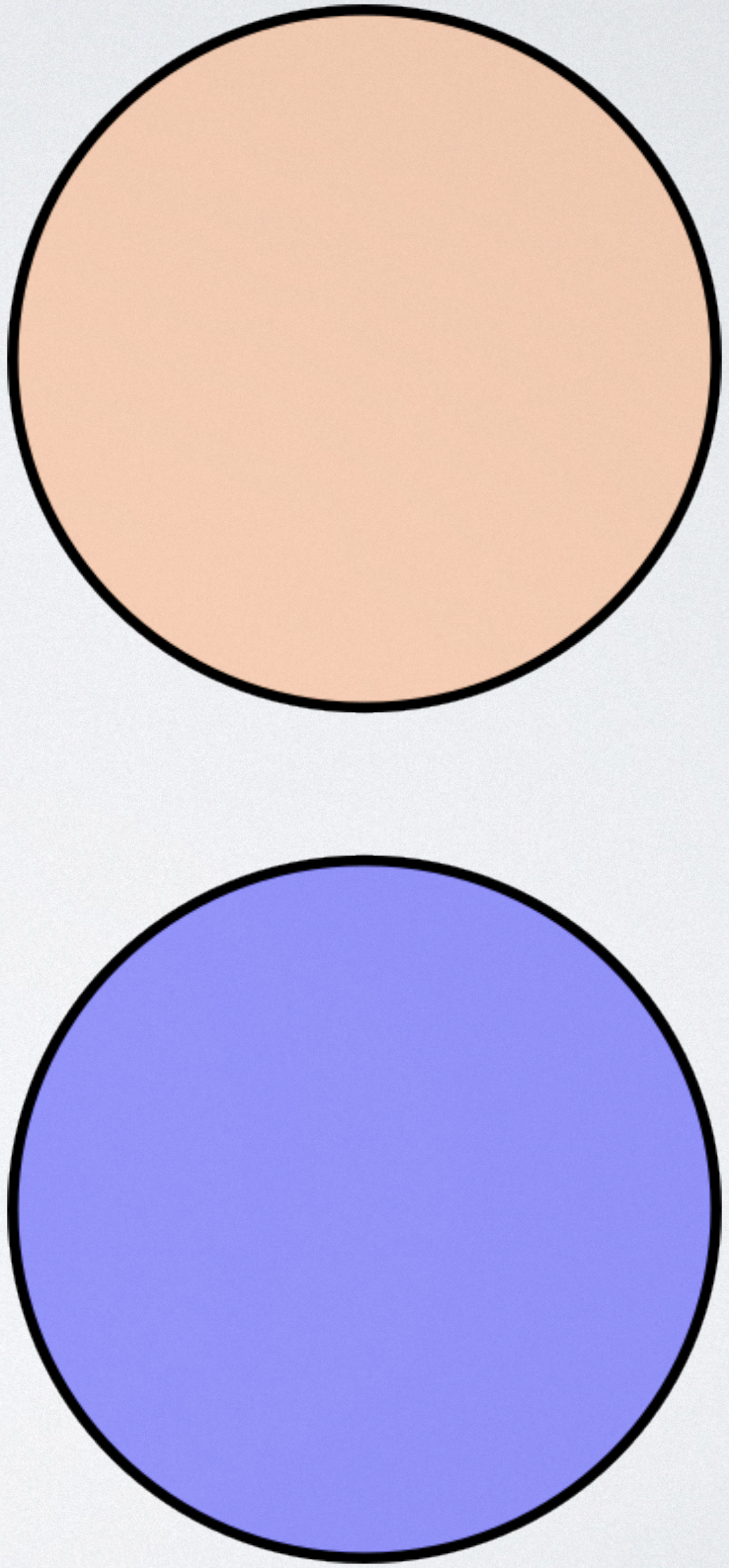
DIE 2-SPHÄRE, INTRINSISCH

- Die 2-Sphäre kann in Nord- und Südhalbkugel zerlegt werden
- Beides sind (2-dimensionale!) Scheiben



DIE 2-SPHÄRE, INTRINSISCH

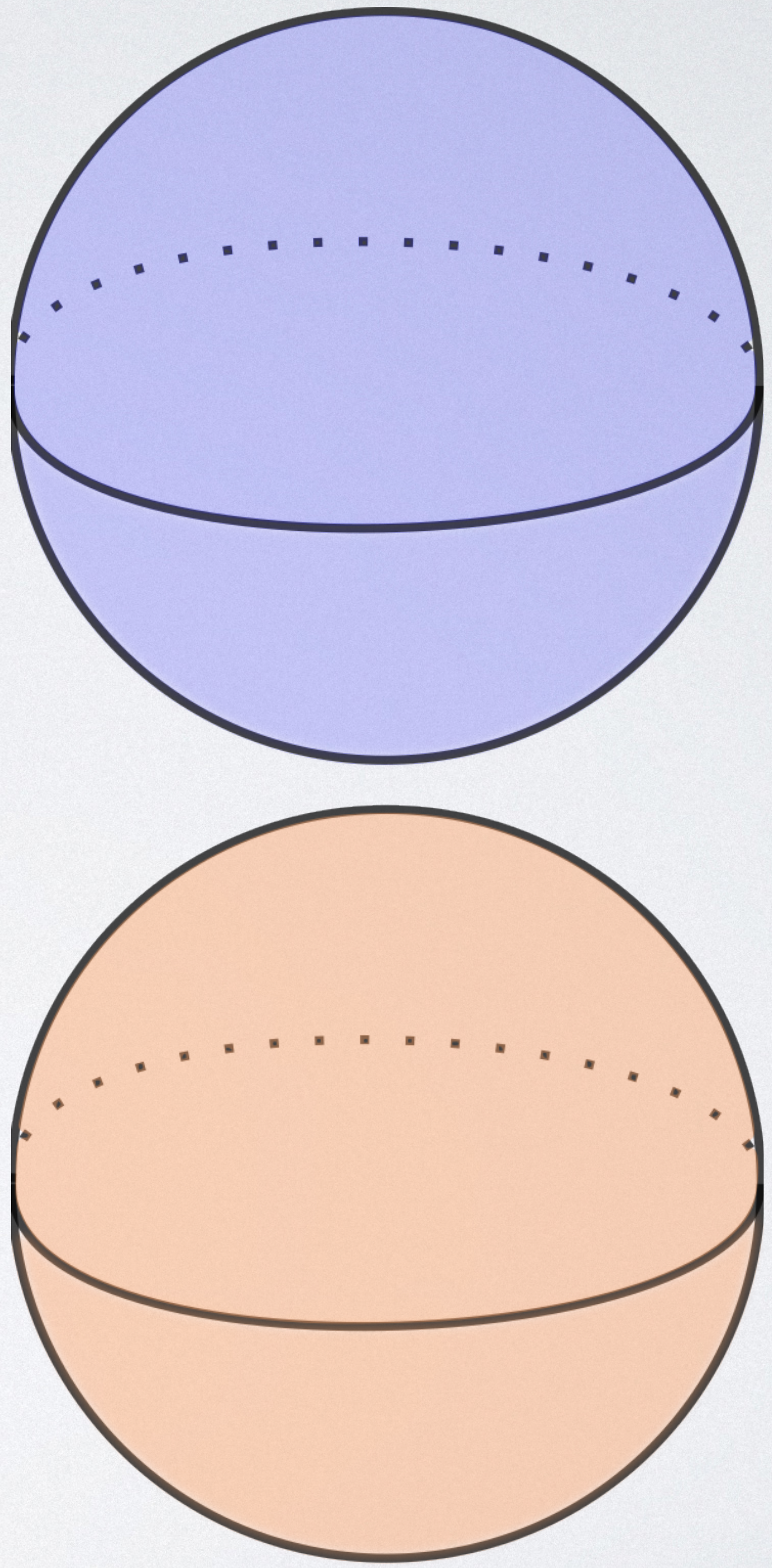
- Die 2-Sphäre kann in Nord- und Südhalbkugel zerlegt werden
- Beides sind (2-dimensionale!) Scheiben
- Also umgekehrt: die 2-Spähre sind zwei 2-dimensionale Scheiben, verklebt am Rand



DIE 3-SPHÄRE, INTRINSISCH

DIE 3-SPHÄRE, INTRINSISCH

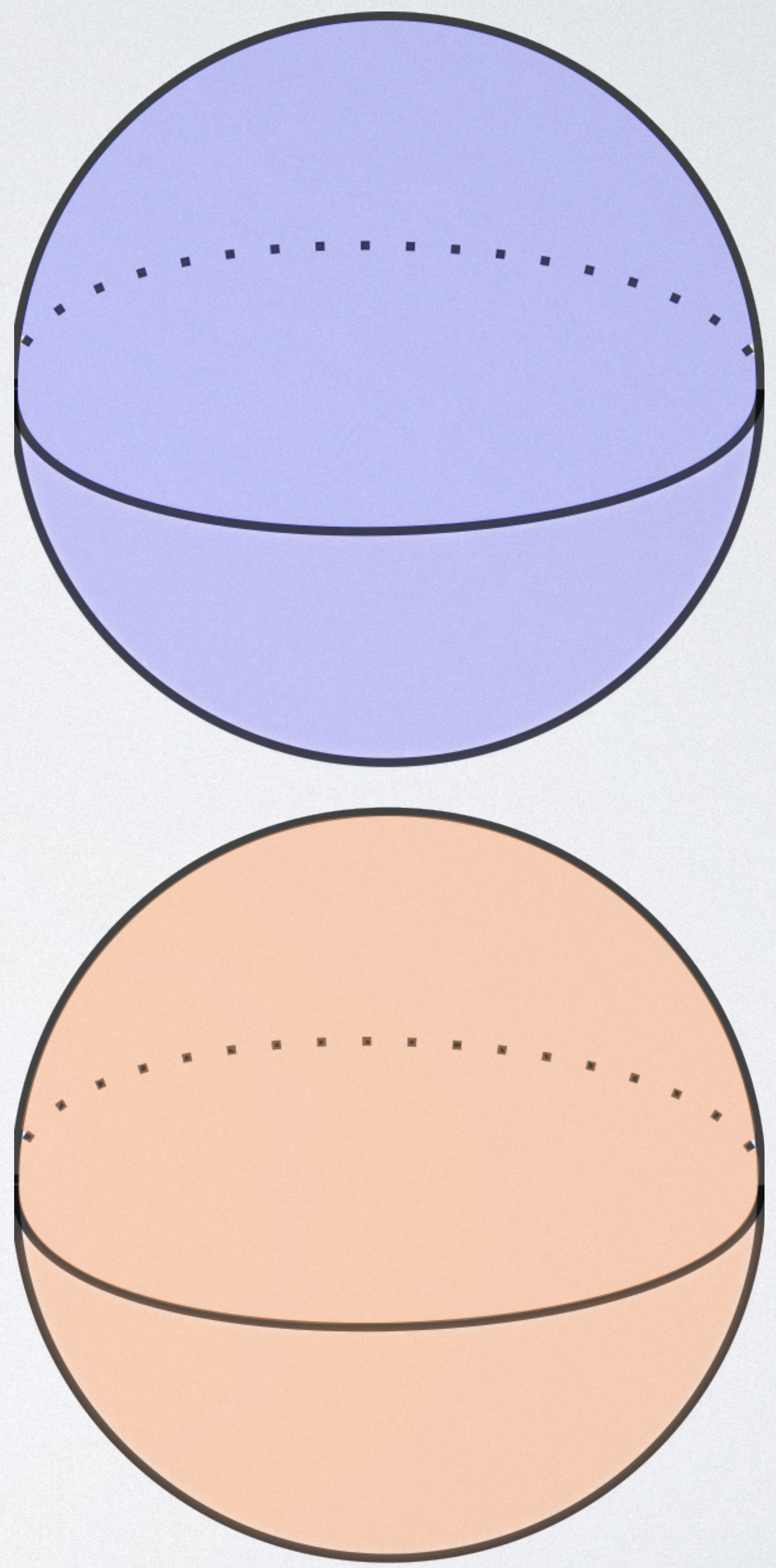
- Analog kann man die 3-Sphäre an ihrer (2-dimensionalen) Äquatorialsphäre in zwei 3-dimensionale Kugeln zerlegen



DIE 3-SPHÄRE, INTRINSISCH

- Analog kann man die 3-Sphäre an ihrer (2-dimensionalen) Äquatorialsphäre in zwei 3-dimensionale Kugeln zerlegen

- Oder umgekehrt: die 3-Sphäre sind zwei (normale, 3-dimensionale) Bälle, verklebt an ihren Rändern



DIE POINCARÉ-VERMUTUNG

(und ihre Varianten)

KLASSIFIKATION IN DIMENSION 3

KLASSIFIKATION IN DIMENSION 3

- Eine Klassifikation aller dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten ist (auch heute) nicht realistisch

KLASSIFIKATION IN DIMENSION 3

- Eine Klassifikation aller dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten ist (auch heute) nicht realistisch
- Poincaré fragt 1904: Kann man zumindest die 3-Sphäre erkennen?

KLASSIFIKATION IN DIMENSION 3

- Eine Klassifikation aller dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten ist (auch heute) nicht realistisch
- Poincaré fragt 1904: Kann man zumindest die 3-Sphäre erkennen?
- Poincaré stellt auch direkt eine Vermutung auf. Die präzise Version ist zu technisch (Schwierigkeit etwa: Grundvorlesungen Master Mathematik) aber es geht im Grunde wieder um Zählen von Ecken, Kanten, Dreiecken und Tetraedern.

KLASSIFIKATION IN DIMENSION 3

- Eine Klassifikation aller dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten ist (auch heute) nicht realistisch

- Poincaré fragt 1904: Kann man zumindest die 3-Sphäre erkennen?

- Poincaré stellt auch direkt eine Vermutung auf. Die präzise Version ist zu technisch (Schwierigkeit etwa: Grundvorlesungen Master Mathematik) aber es geht im Grunde wieder um Zählen von Ecken, Kanten, Dreiecken und Tetraedern.

- Er selbst zeigt bald darauf, dass das nicht stimmt, und es "Fast-Sphären" gibt (Schwierigkeit etwa: Spezialvorlesungen Master Mathematik). Davon lässt er sich nicht abhalten, und stellt direkt einen neue Vermutung auf

EINFACHER ZUSAMMENHANG

EINFACHER ZUSAMMENHANG

- Eine Schleife in einem topologischen Raum ist ein eingebetteter Kreis

EINFACHER ZUSAMMENHANG

- Eine Schleife in einem topologischen Raum ist ein eingebetteter Kreis
- Die Schleife heißt “trivial”, wenn man sie in dem Raum zu einem Punkt zusammenziehen kann

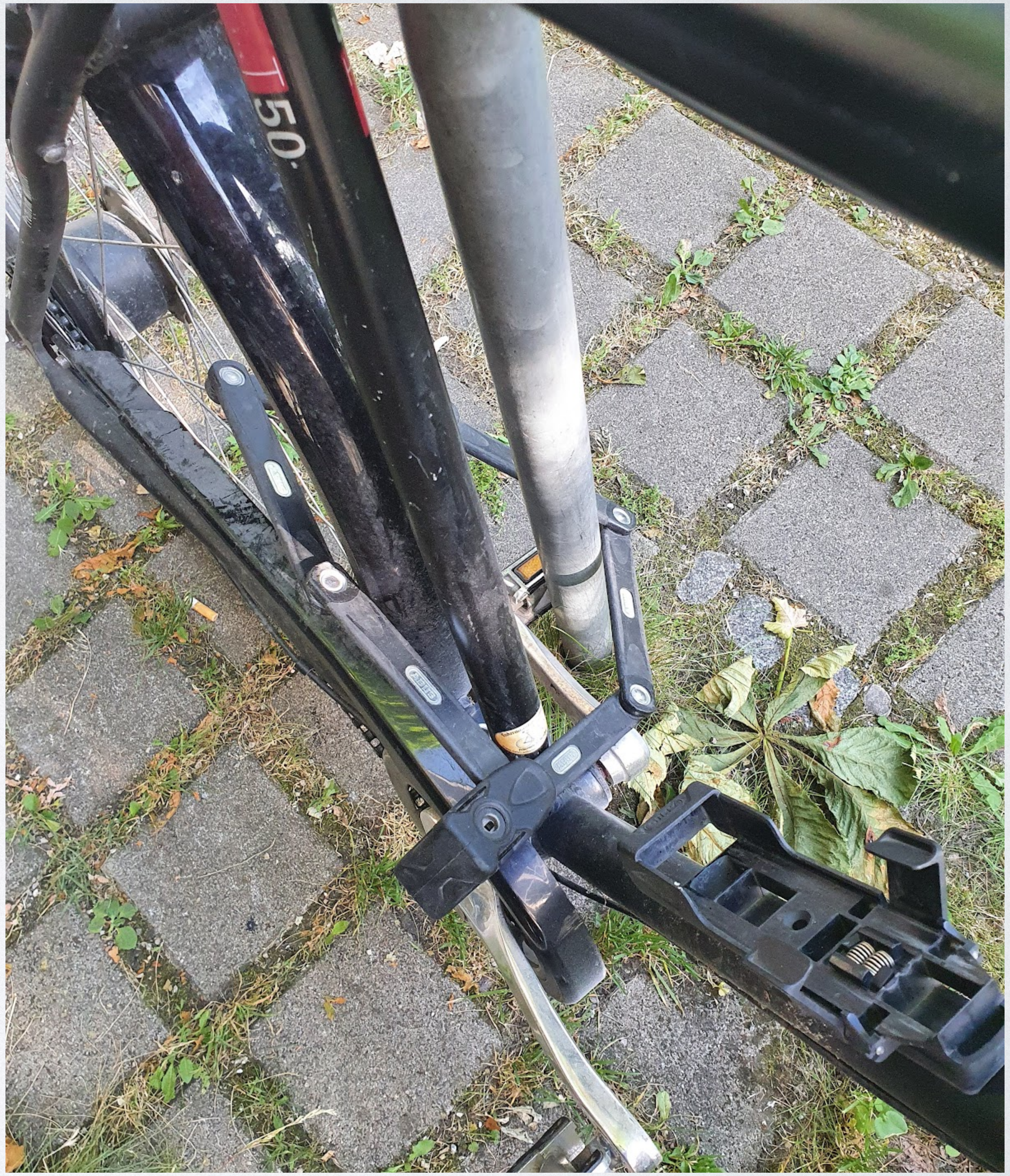
EINFACHER ZUSAMMENHANG

- Eine Schleife in einem topologischen Raum ist ein eingebetteter Kreis
- Die Schleife heißt “trivial”, wenn man sie in dem Raum zu einem Punkt zusammenziehen kann

EINFACHER ZUSAMMENHANG

- Eine Schleife in einem topologischen Raum ist ein eingebetteter Kreis

- Die Schleife heißt "trivial", wenn man sie in dem Raum zu einem Punkt zusammenziehen kann



EINFACHER ZUSAMMENHANG BEI FLÄCHEN

EINFACHER ZUSAMMENHANG BEI FLÄCHEN

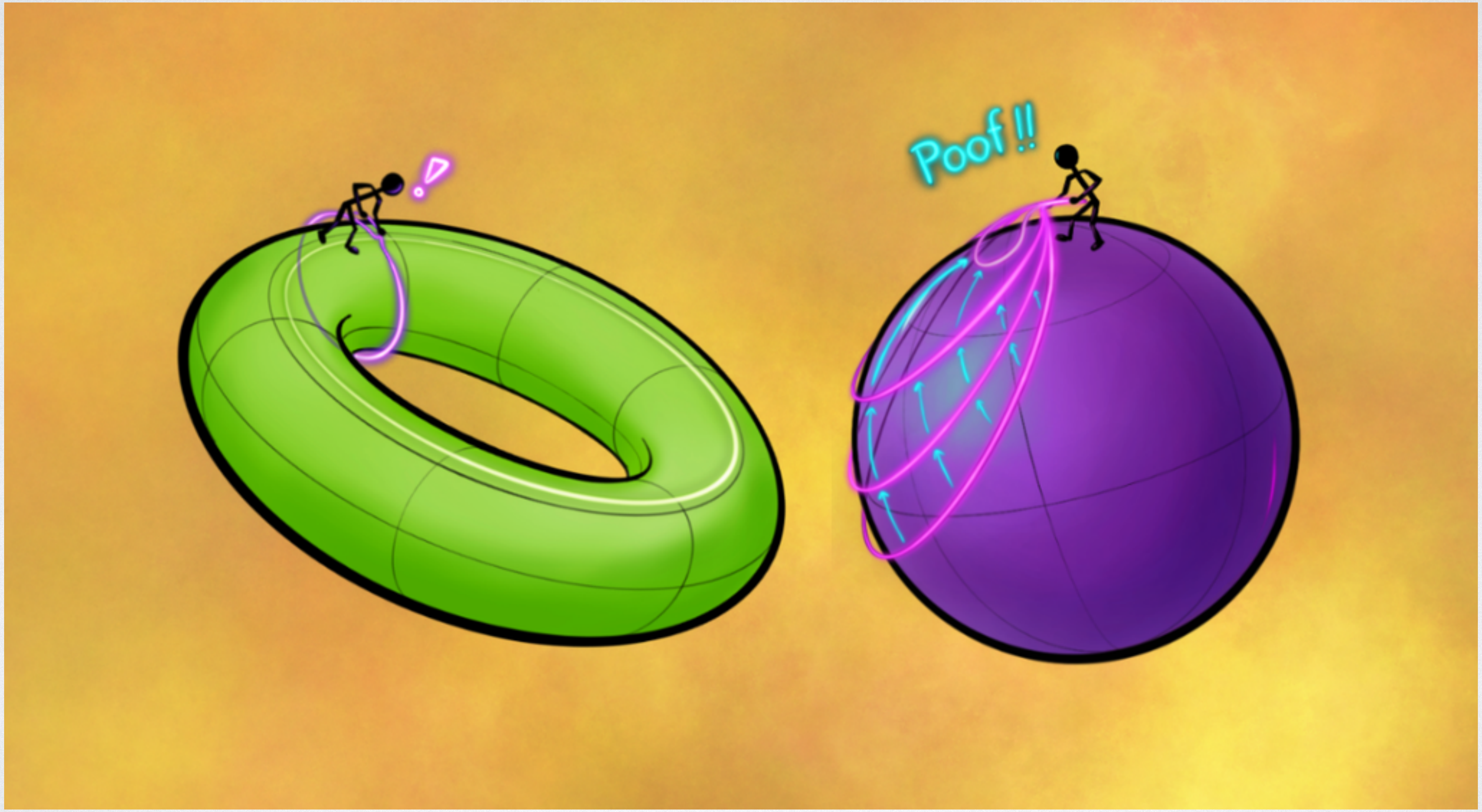


Bild: Ana Chaviz Caliz (HEGL)

POINCARÉ-VERMUTUNG

(korrigiert)

POINCARÉ-VERMUTUNG

(korrigiert)

Vermutung (Poincaré, 1904)

Eine (zusammenhängende, orientierte) kompakte 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, die einfach zusammenhängend ist, ist bereits die 3-Sphäre

POINCARÉ-VERMUTUNG

(Varianten und Forschritt)

POINCARÉ-VERMUTUNG

(Varianten und Forschritt)

- In Dimension 2 stimmt die Poincaré-Vermutung

POINCARÉ-VERMUTUNG

(Varianten und Forschritt)

- In Dimension 2 stimmt die Poincaré-Vermutung
- Es gibt eine Variante der Poincaré-Vermutung in allen Dimensionen n.

POINCARÉ-VERMUTUNG

(Varianten und Forschritt)

- In Dimension 2 stimmt die Poincaré-Vermutung
- Es gibt eine Variante der Poincaré-Vermutung in allen Dimensionen n.
- Für n>4 stimmt sie auch (1962, Smale)
  Schwierigkeit: Fields-Medaille 1966…

POINCARÉ-VERMUTUNG

(Varianten und Forschritt)

- In Dimension 2 stimmt die Poincaré-Vermutung
- Es gibt eine Variante der Poincaré-Vermutung in allen Dimensionen n.
- Für n>4 stimmt sie auch (1962, Smale)
  Schwierigkeit: Fields-Medaille 1966…
- Für n=4 stimmt es auch (1982, Freedman)
  Schwierigkeit: Fields-Medaille 1986…

POINCARÉ-VERMUTUNG

(Varianten und Forschritt)

- In Dimension 2 stimmt die Poincaré-Vermutung
- Es gibt eine Variante der Poincaré-Vermutung in allen Dimensionen n.
- Für n>4 stimmt sie auch (1962, Smale)
  Schwierigkeit: Fields-Medaille 1966…
- Für n=4 stimmt es auch (1982, Freedman)
  Schwierigkeit: Fields-Medaille 1986…
- Im Jahr 2000 wurde die 3-dimensionale Version als eins der Clay Millennium Problems benannt (1 Million USD Preisgeld…)

GEOMETRIE FÜR TOPOLOGIE

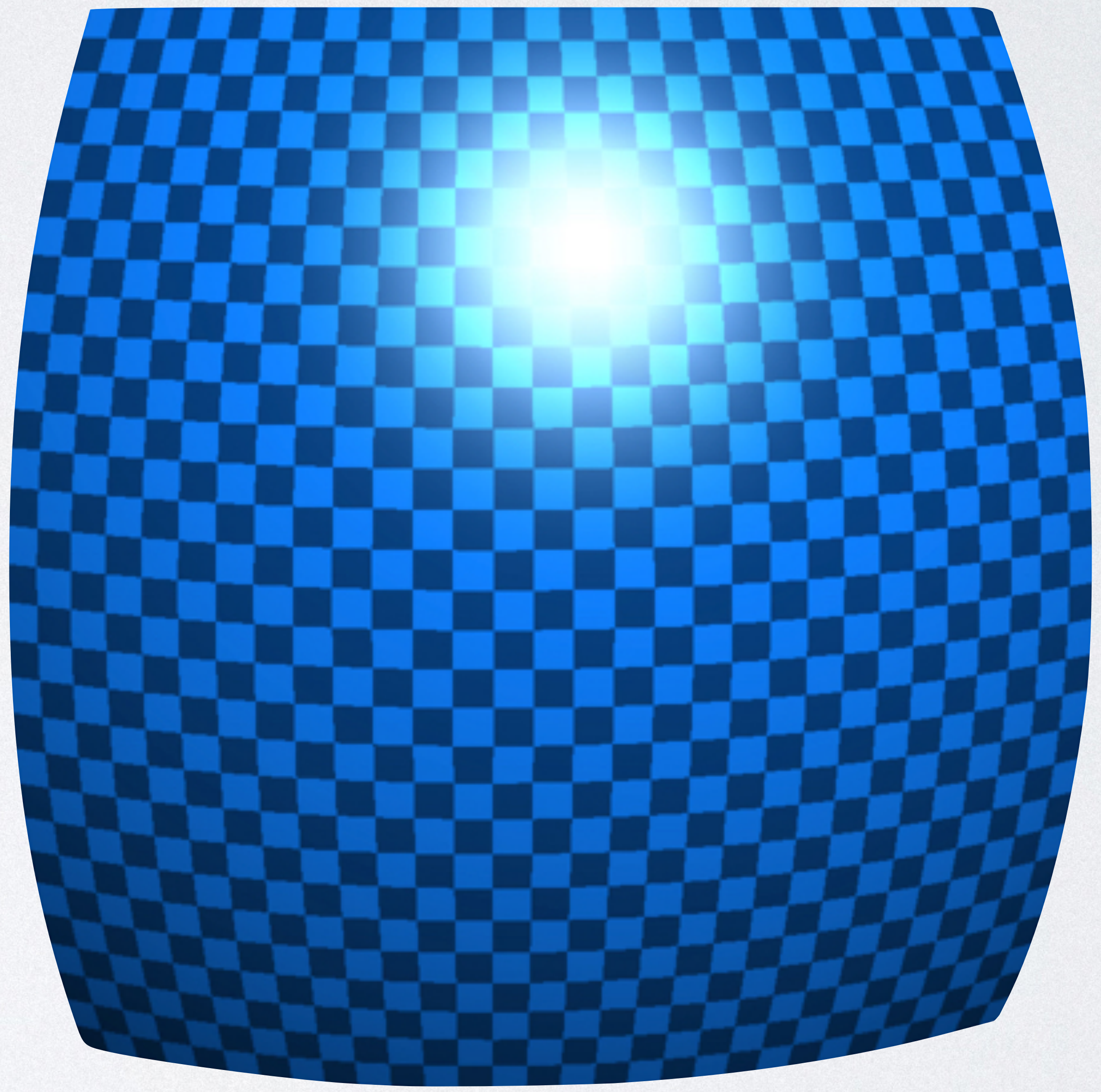
DIE “RUNDE” SPHÄRE

DIE “RUNDE” SPHÄRE

- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist

DIE "RUNDE" SPHÄRE

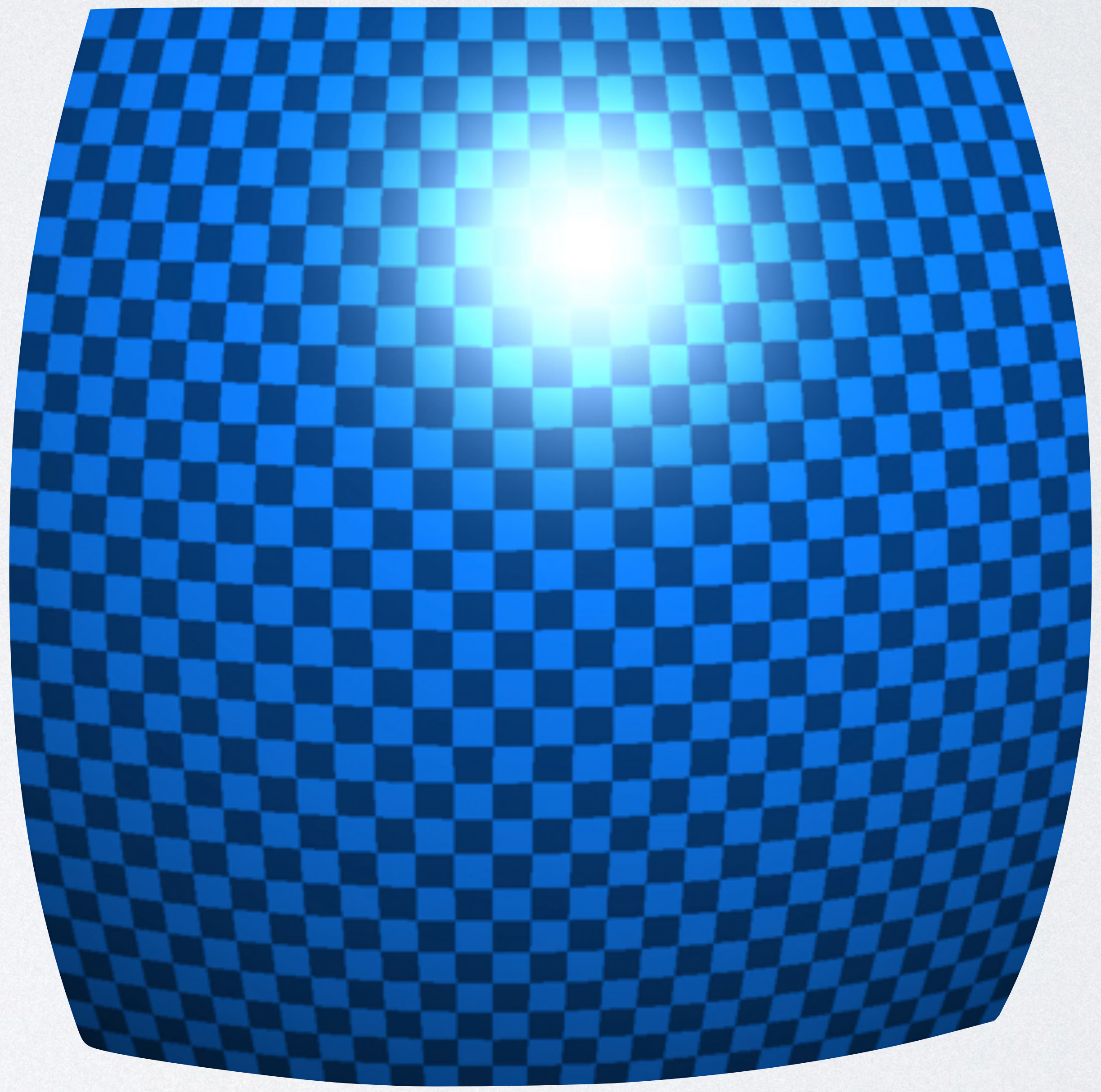
- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist



DIE "RUNDE" SPHÄRE

- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist

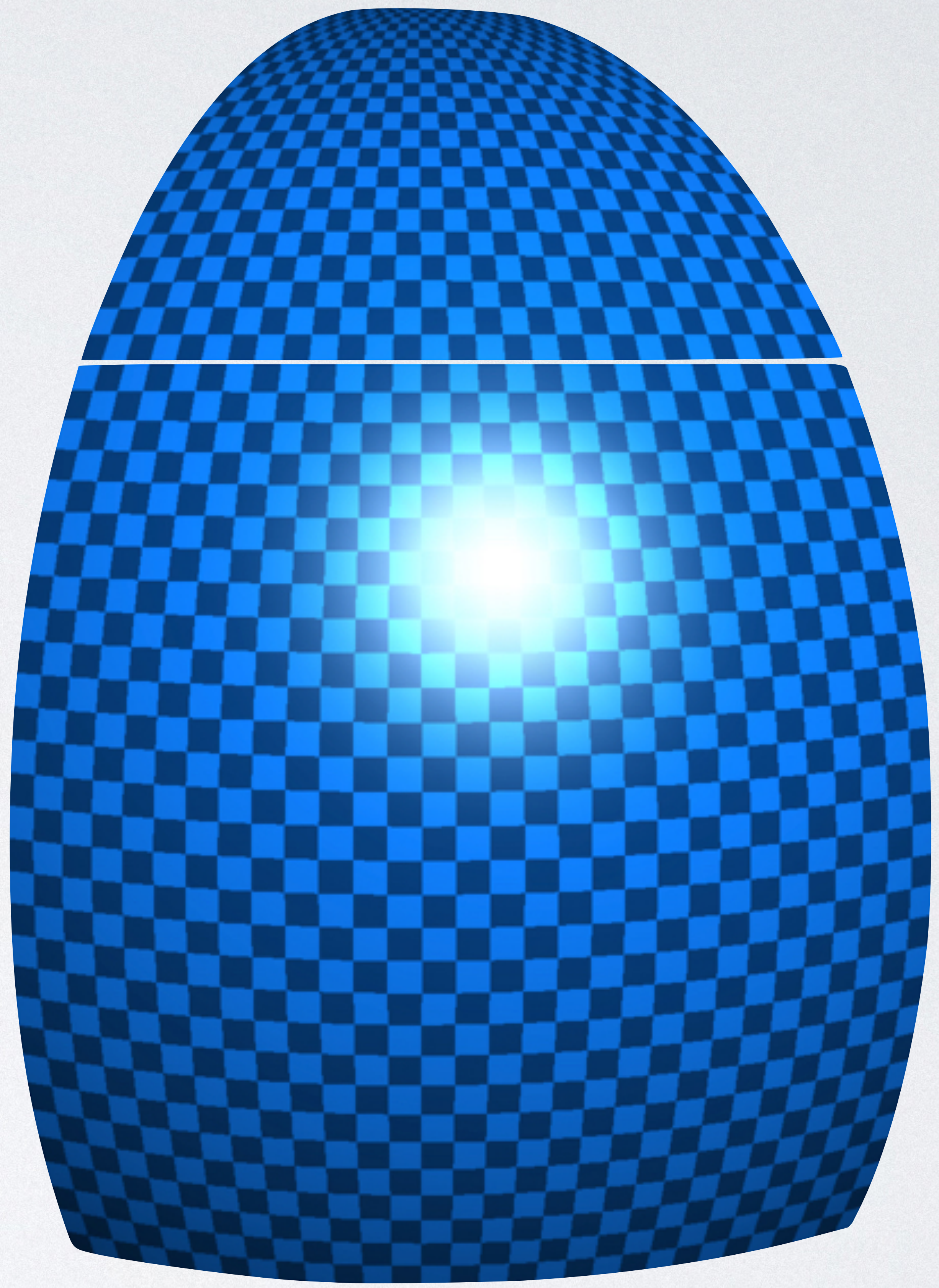
- Dann ist die Fläche schon die Sphäre!



DIE "RUNDE" SPHÄRE

- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist

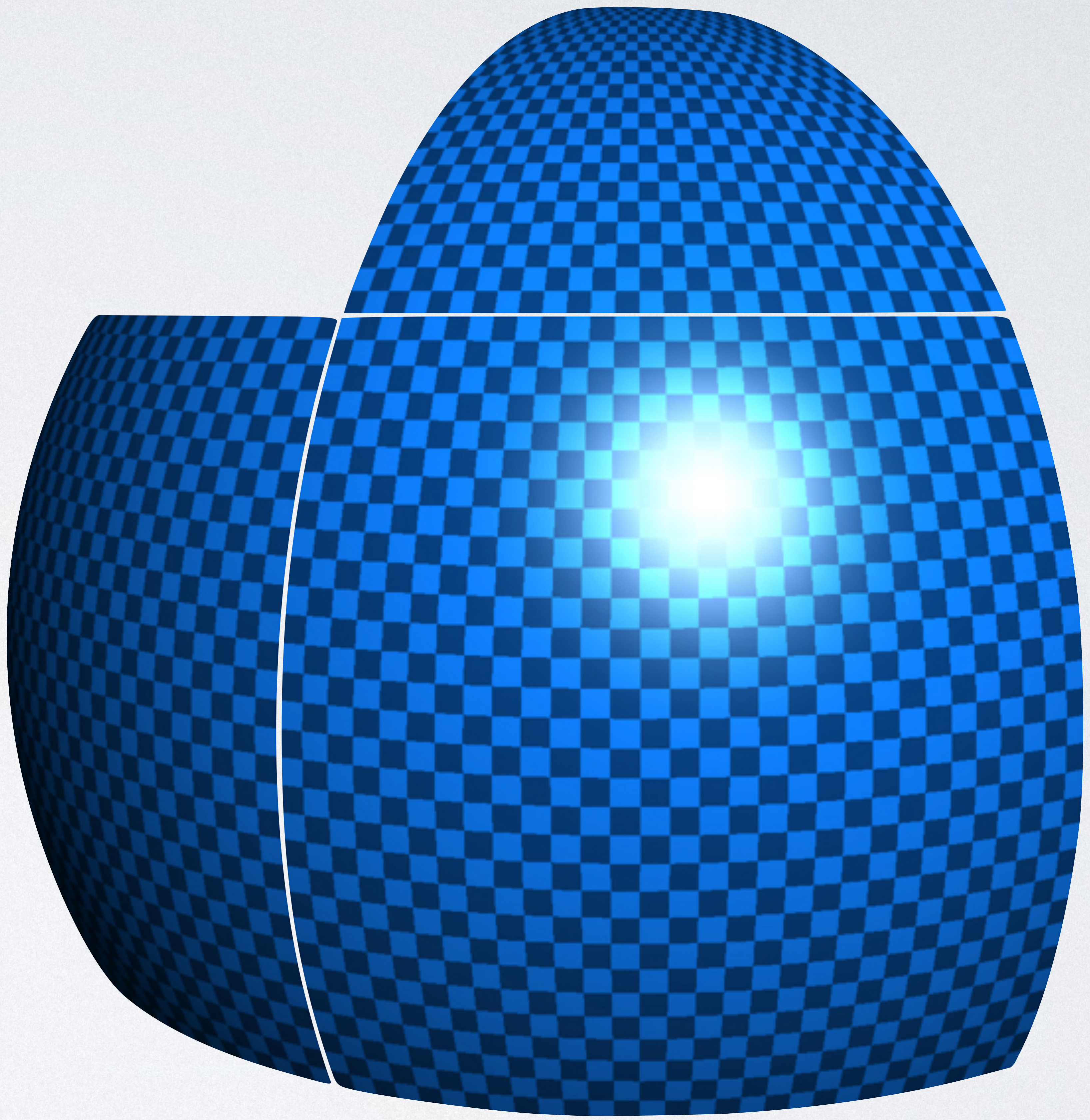
- Dann ist die Fläche schon die Sphäre!



DIE "RUNDE" SPHÄRE

- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist

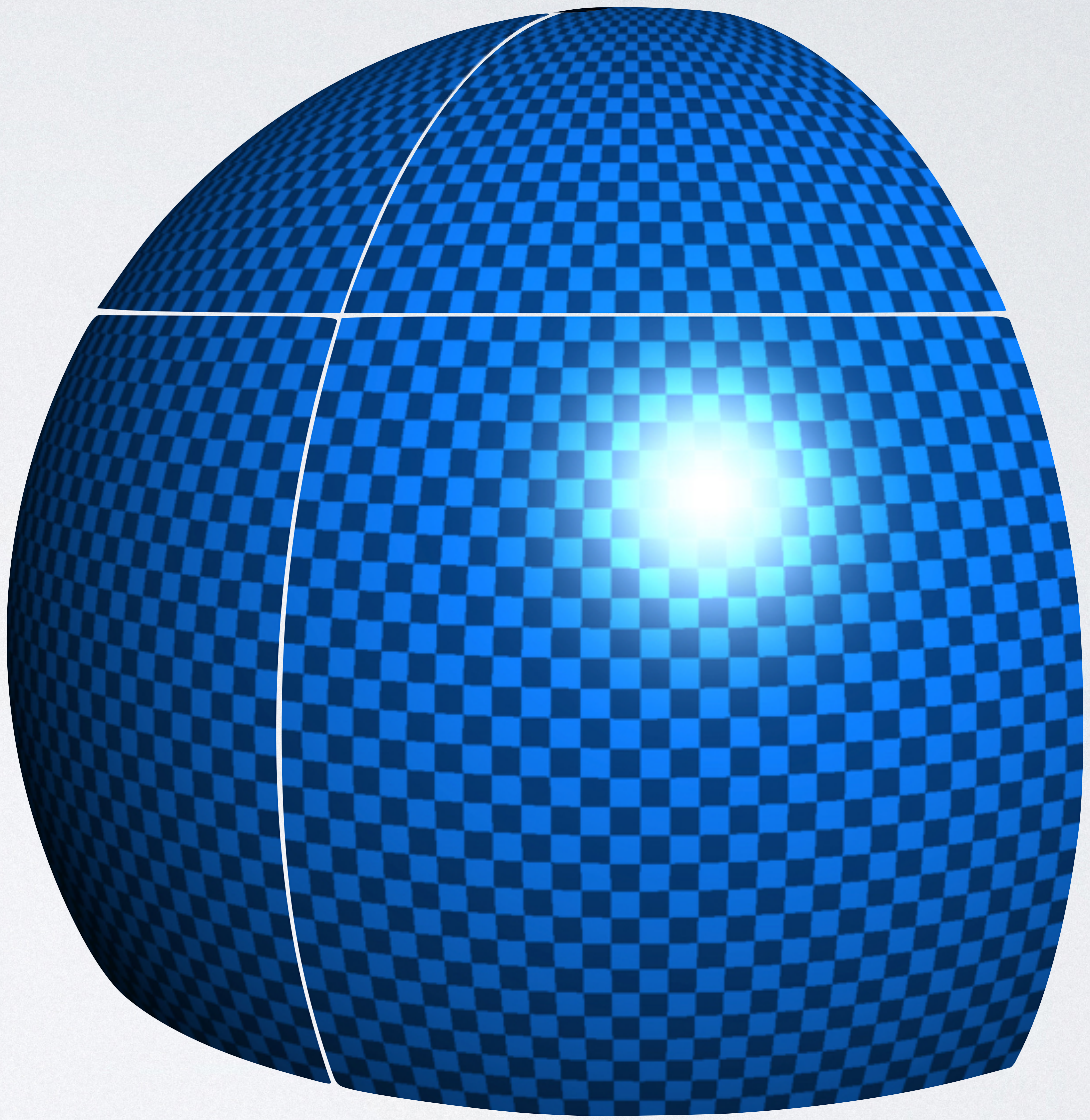
- Dann ist die Fläche schon die Sphäre!



DIE "RUNDE" SPHÄRE

- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist

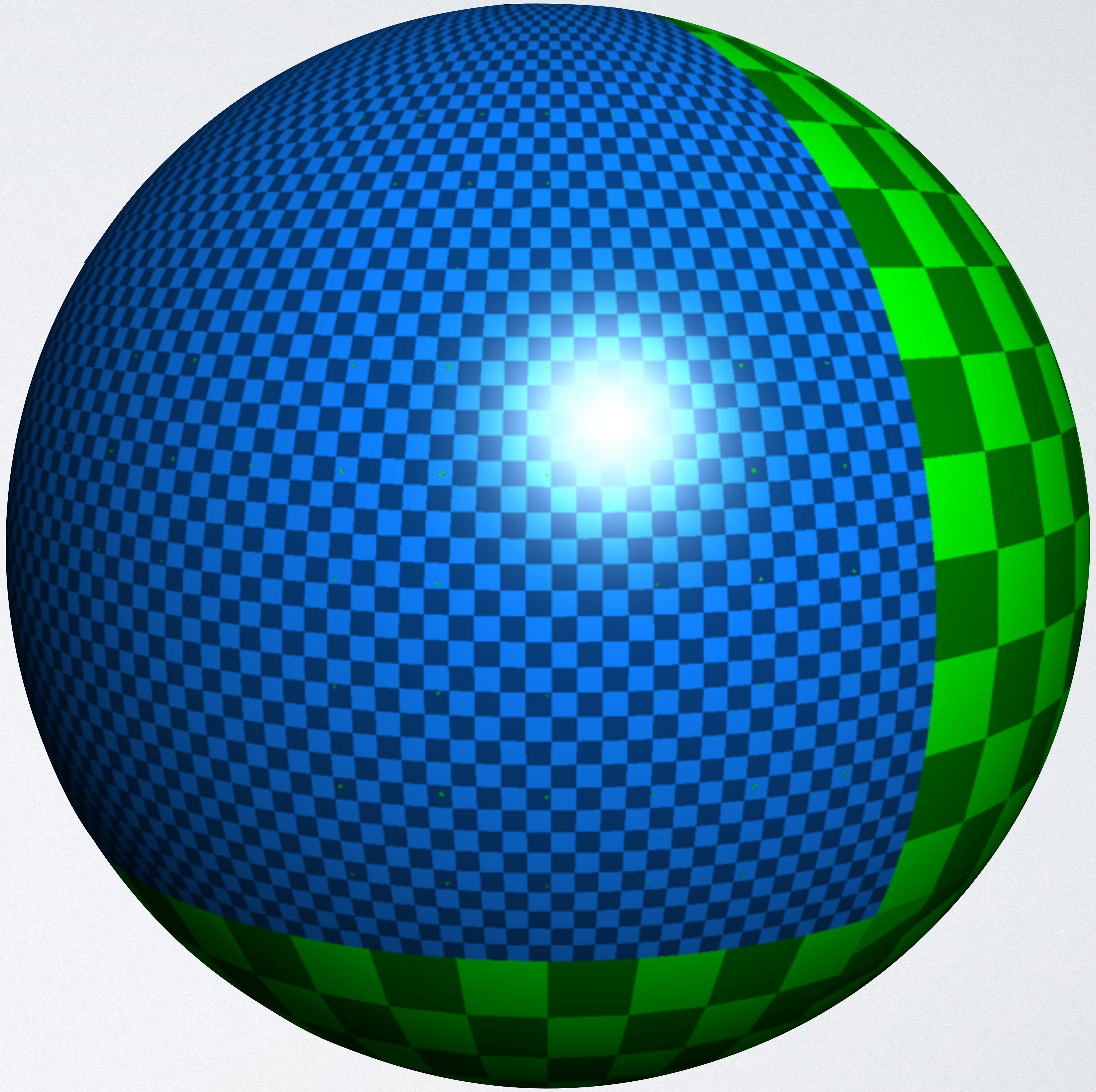
- Dann ist die Fläche schon die Sphäre!



DIE "RUNDE" SPHÄRE

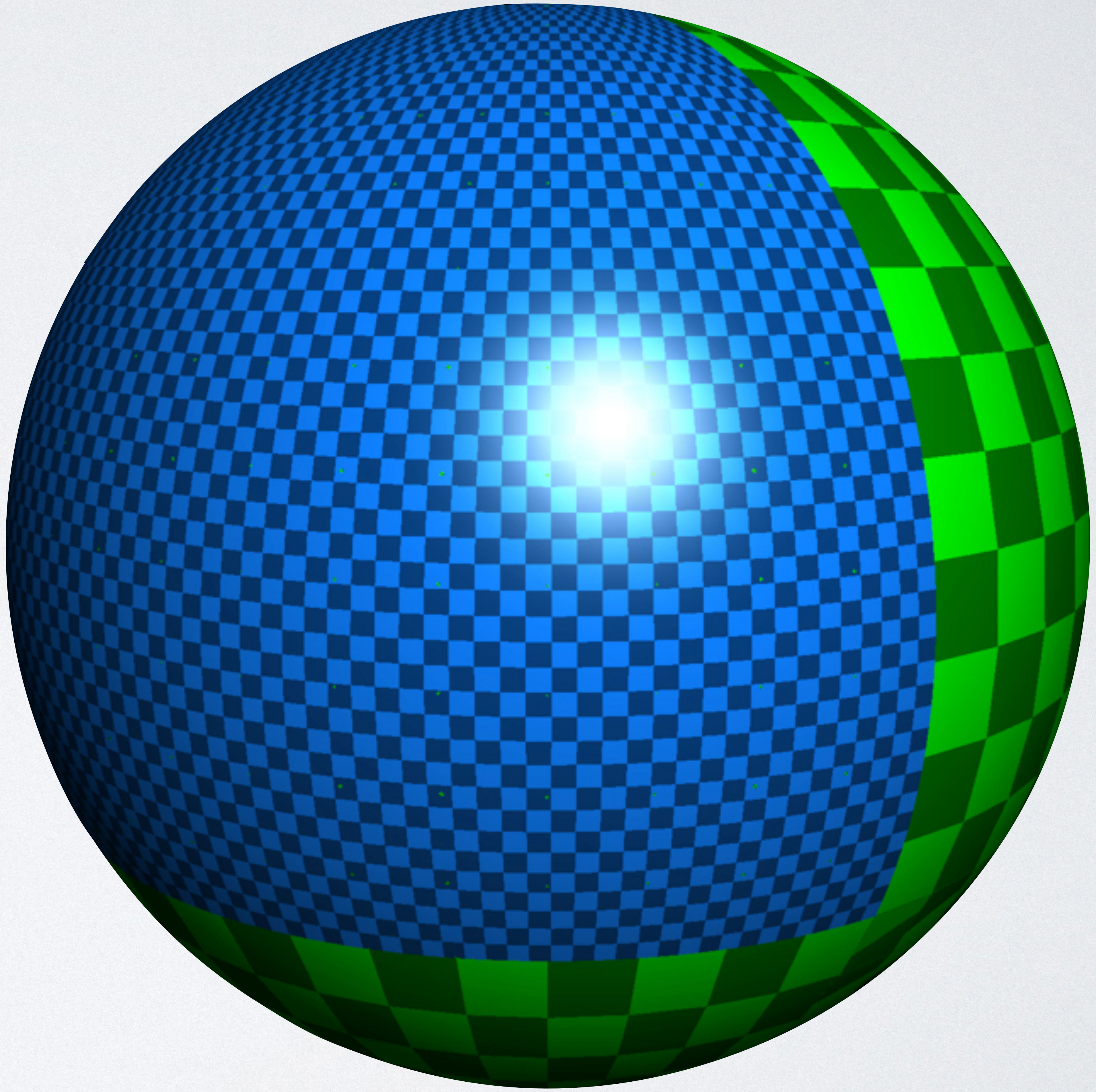
- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist

- Dann ist die Fläche schon die Sphäre!



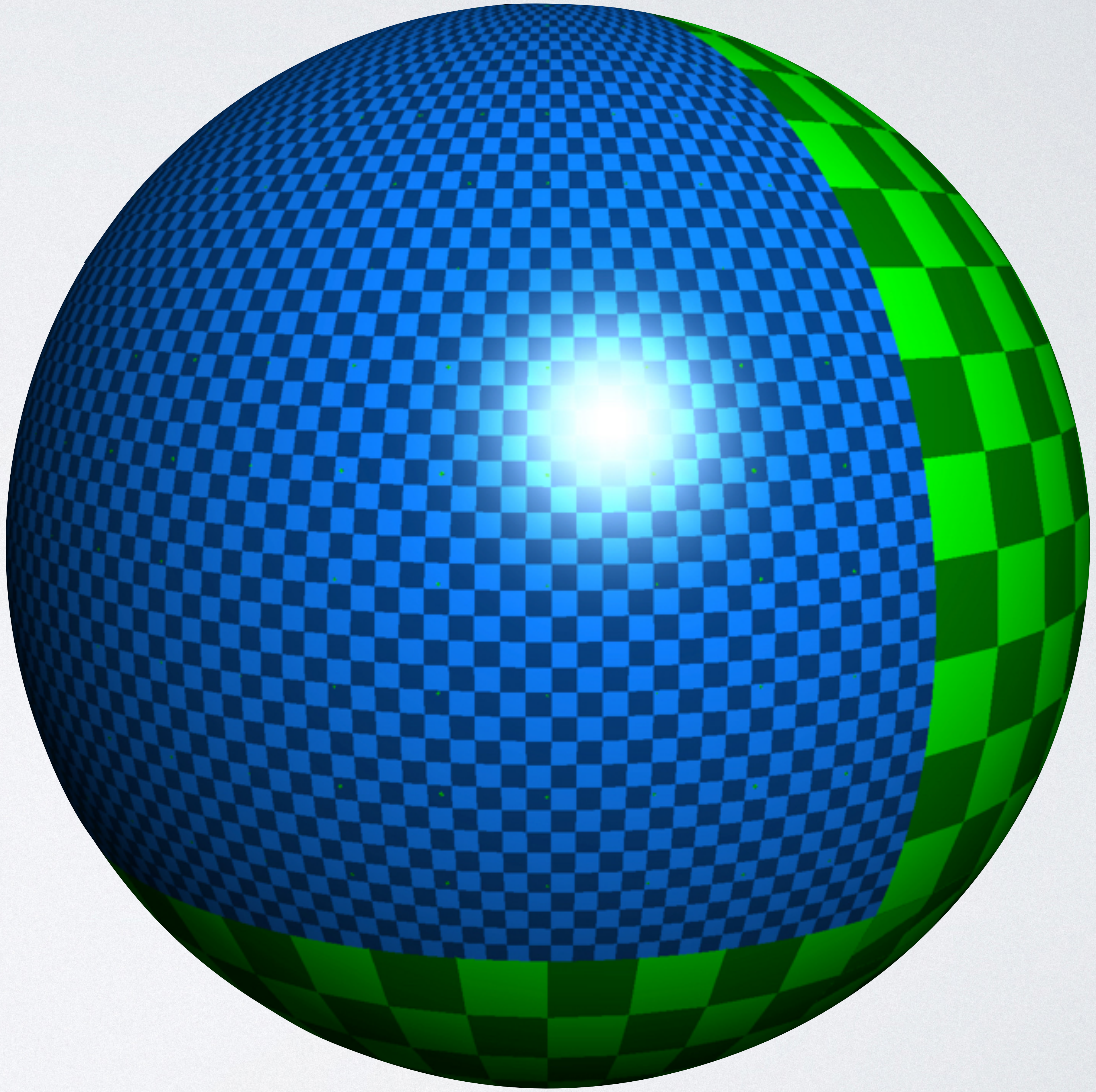
DIE “RUNDE” SPHÄRE

- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist
- Dann ist die Fläche schon die Sphäre!
- Und dasselbe klappt in Dimension 3!



DIE "RUNDE" SPHÄRE

- Angenommen, wir haben eine Fläche und wissen, dass jede Umgebung eines Punkts ein rundes Sphärenstück ist
- Dann ist die Fläche schon die Sphäre!
- Und dasselbe klappt in Dimension 3!
- (Schwierigkeit: Ende Master Mathematik)



EINE NEUE STRATEGIE

EINE NEUE STRATEGIE

- Um Poincaré zu beweisen, müssten wir “nur” eine runde Geometrie auf unserer mysteriösen Mannigfaltigkeit finden

EINE NEUE STRATEGIE

- Um Poincaré zu beweisen, müssten wir "nur" eine runde Geometrie auf unserer mysteriösen Mannigfaltigkeit finden
- Beginne also mit irgend einer Geometrie auf unserer Mannigfaltigkeit

EINE NEUE STRATEGIE

- Um Poincaré zu beweisen, müssten wir "nur" eine runde Geometrie auf unserer mysteriösen Mannigfaltigkeit finden

- Beginne also mit irgend einer Geometrie auf unserer Mannigfaltigkeit

- Jetzt definiere einen Fluss auf dem Raum aller Geometrie, der versucht die Krümmung überall gleichzuverteilen

EINE NEUE STRATEGIE

- Um Poincaré zu beweisen, müssten wir "nur" eine runde Geometrie auf unserer mysteriösen Mannigfaltigkeit finden
- Beginne also mit irgend einer Geometrie auf unserer Mannigfaltigkeit
- Jetzt definiere einen Fluss auf dem Raum aller Geometrie, der versucht die Krümmung überall gleichzuverteilen
- Grobe Analogie: Wärmeausbreitung

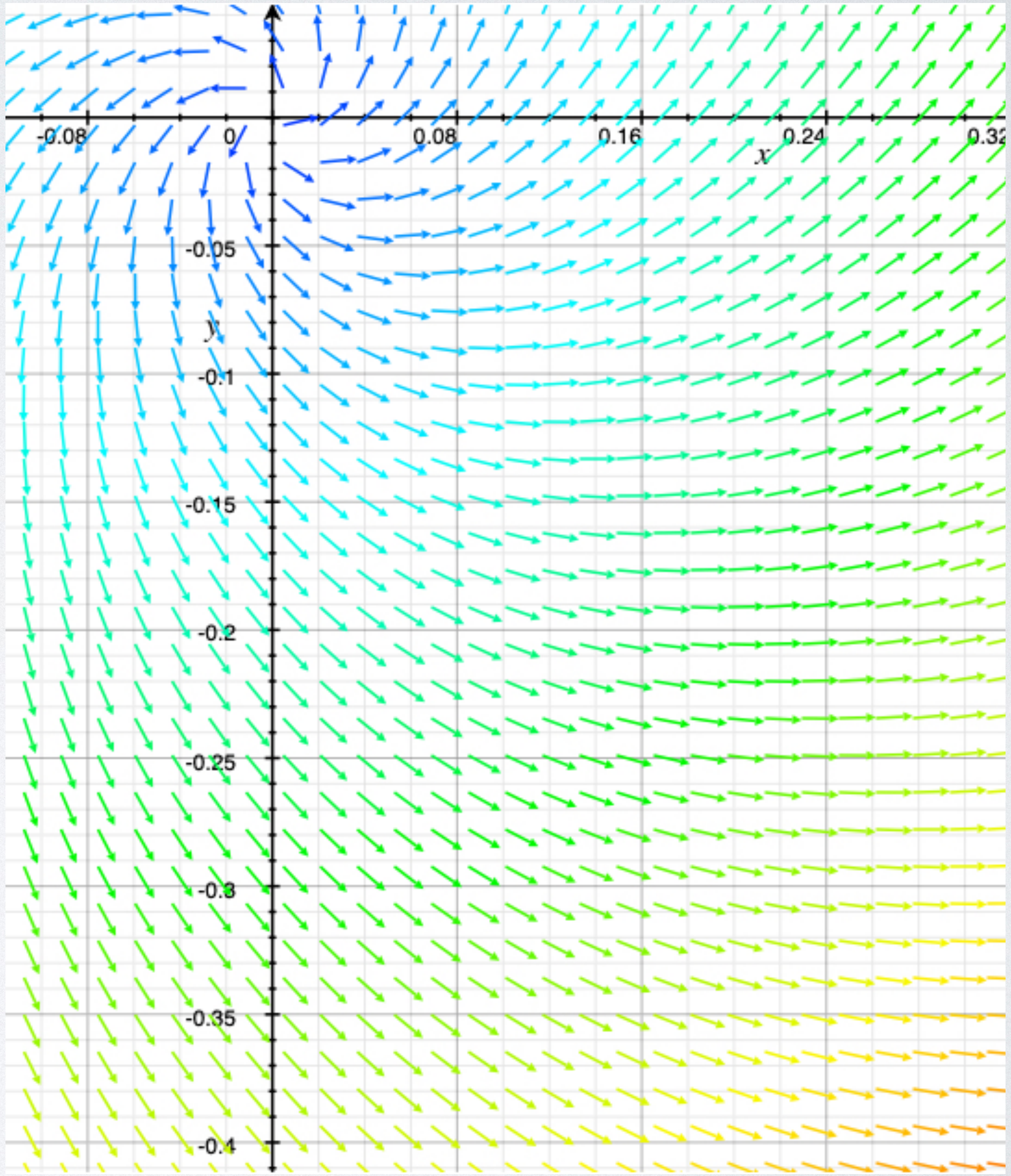
FLÜSSE?

FLÜSSE?

- Ein Fluss ist ein dynamisches System, bei dem man die Bewegungsrichtung an jedem Punkt vorgibt

FLÜSSE?

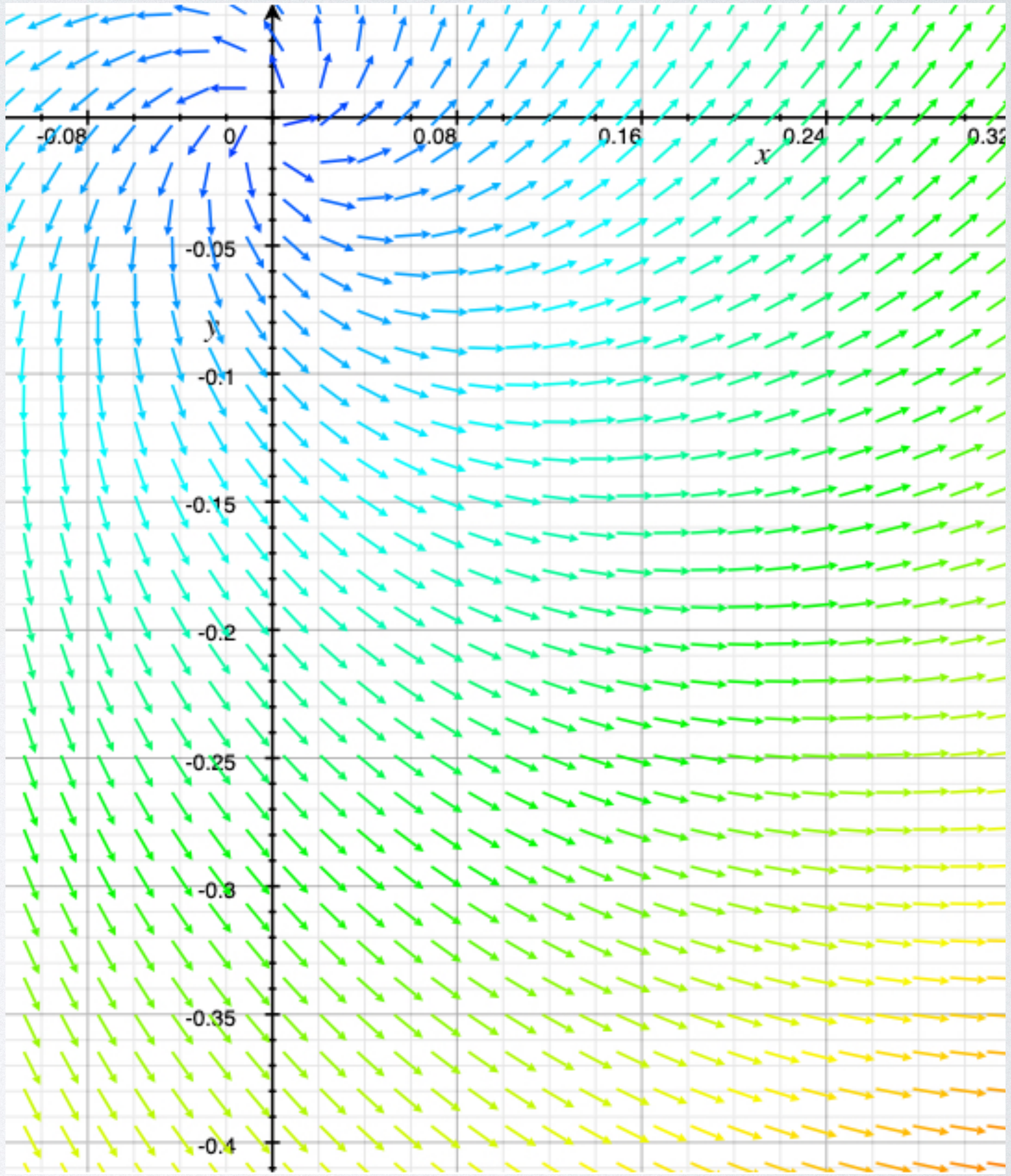
- Ein Fluss ist ein dynamisches System, bei dem man die Bewegungsrichtung an jedem Punkt vorgibt



FLÜSSE?

- Ein Fluss ist ein dynamisches System, bei dem man die Bewegungsrichtung an jedem Punkt vorgibt

- Analogie: treibende Blätter auf einen Fluss

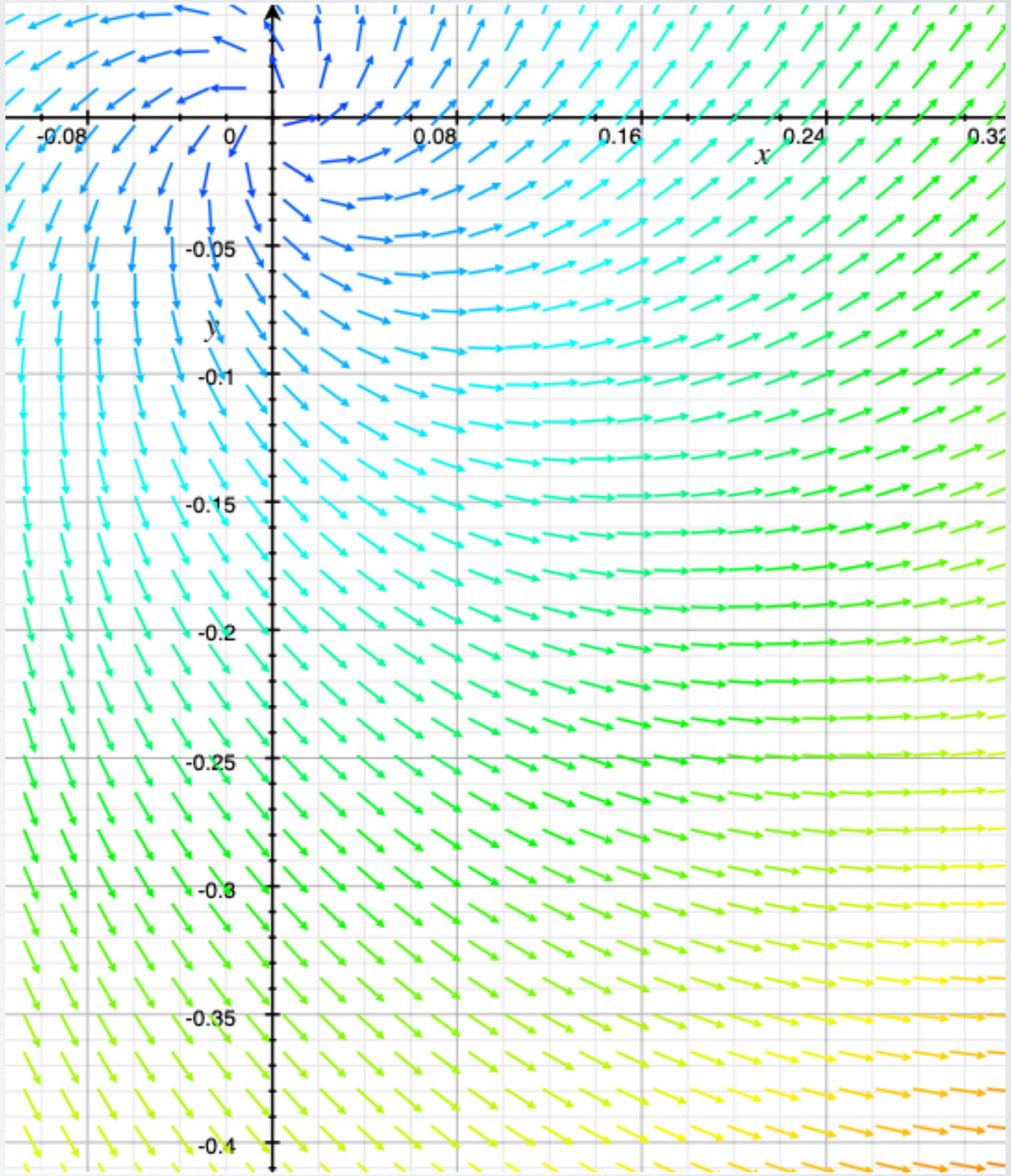


FLÜSSE?

- Ein Fluss ist ein dynamisches System, bei dem man die Bewegungsrichtung an jedem Punkt vorgibt

- Analogie: treibende Blätter auf einen Fluss

- Man kann das "integrieren"

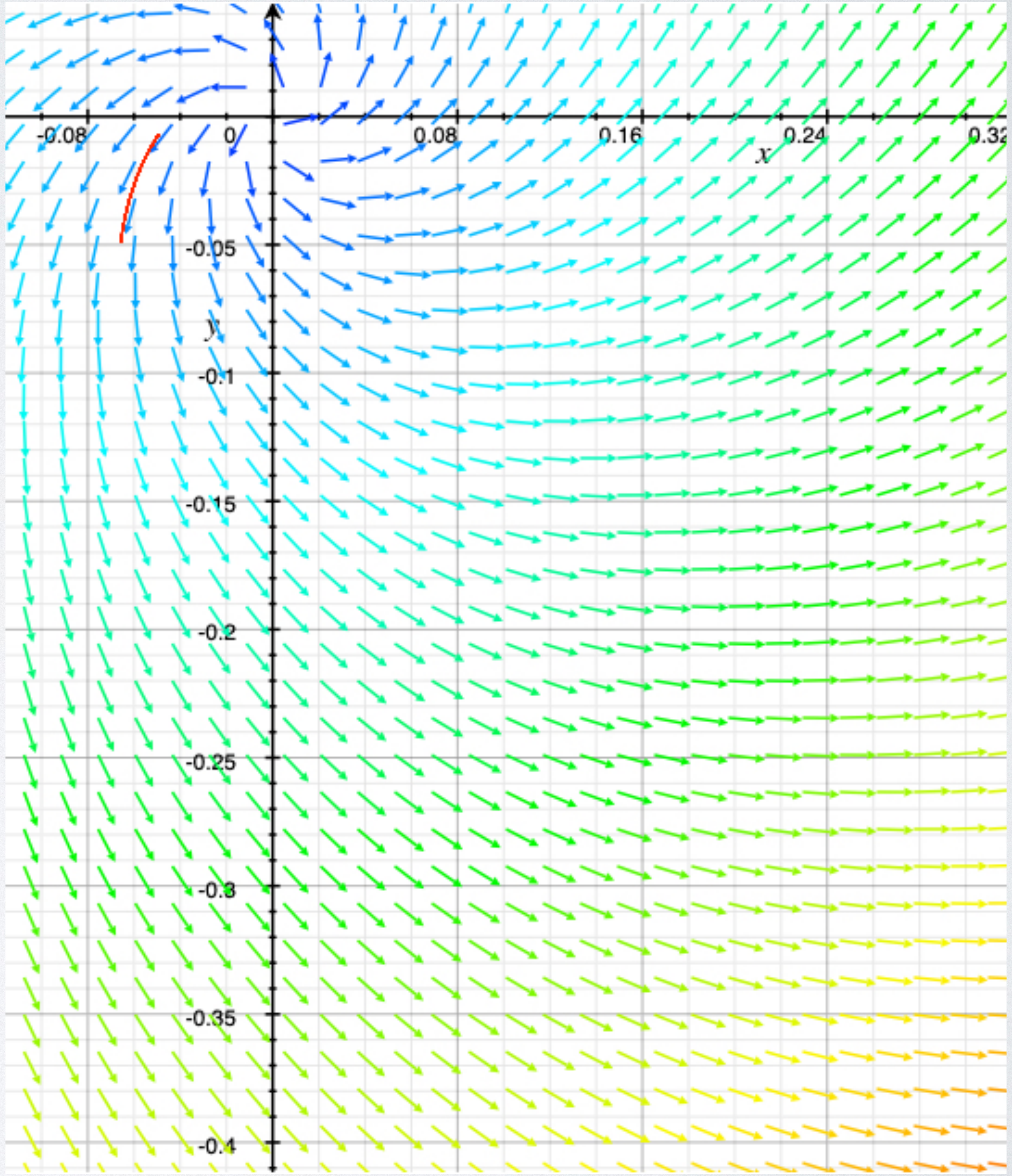


FLÜSSE?

- Ein Fluss ist ein dynamisches System, bei dem man die Bewegungsrichtung an jedem Punkt vorgibt

- Analogie: treibende Blätter auf einen Fluss

- Man kann das "integrieren"

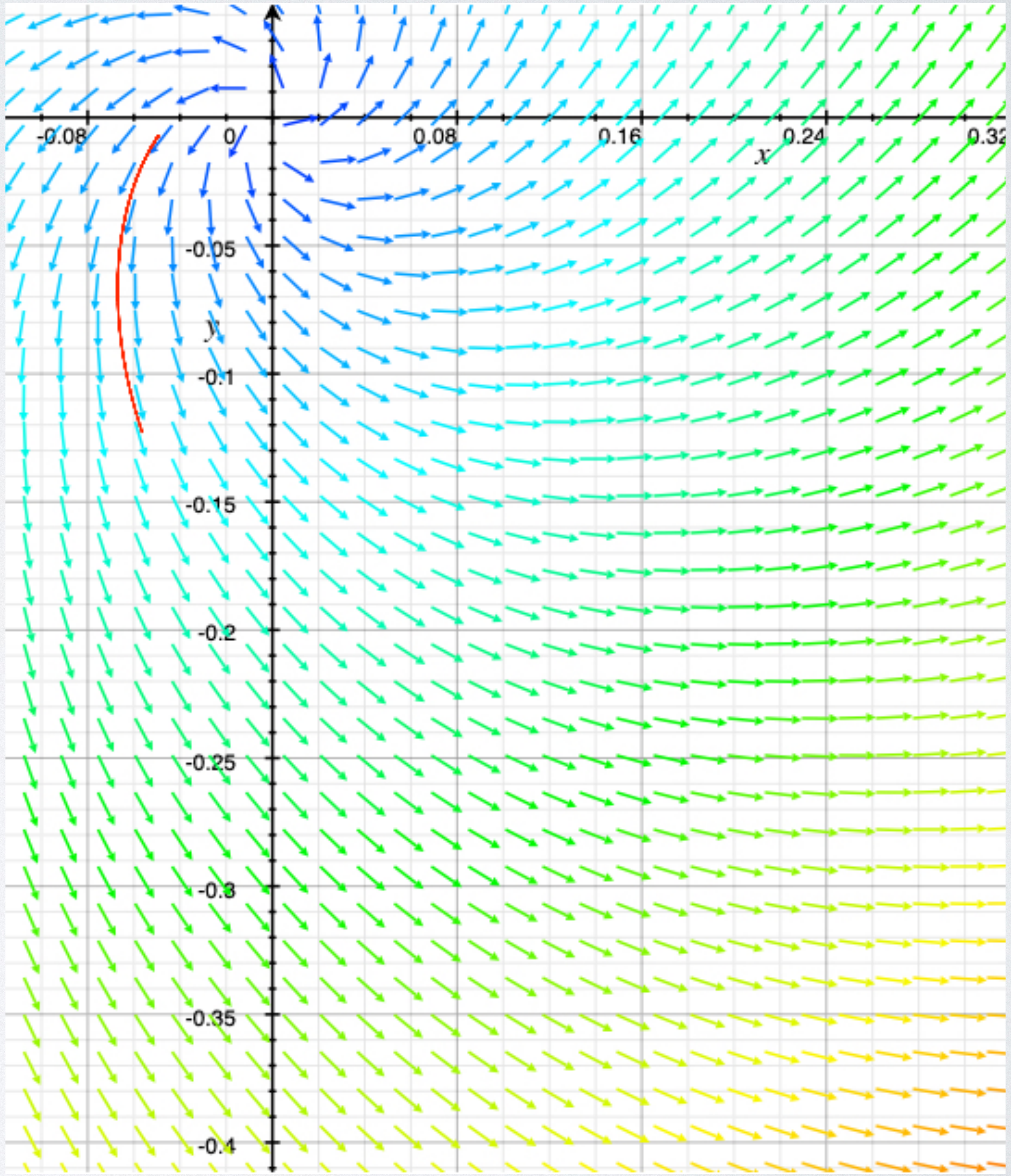


FLÜSSE?

- Ein Fluss ist ein dynamisches System, bei dem man die Bewegungsrichtung an jedem Punkt vorgibt

- Analogie: treibende Blätter auf einen Fluss

- Man kann das "integrieren"

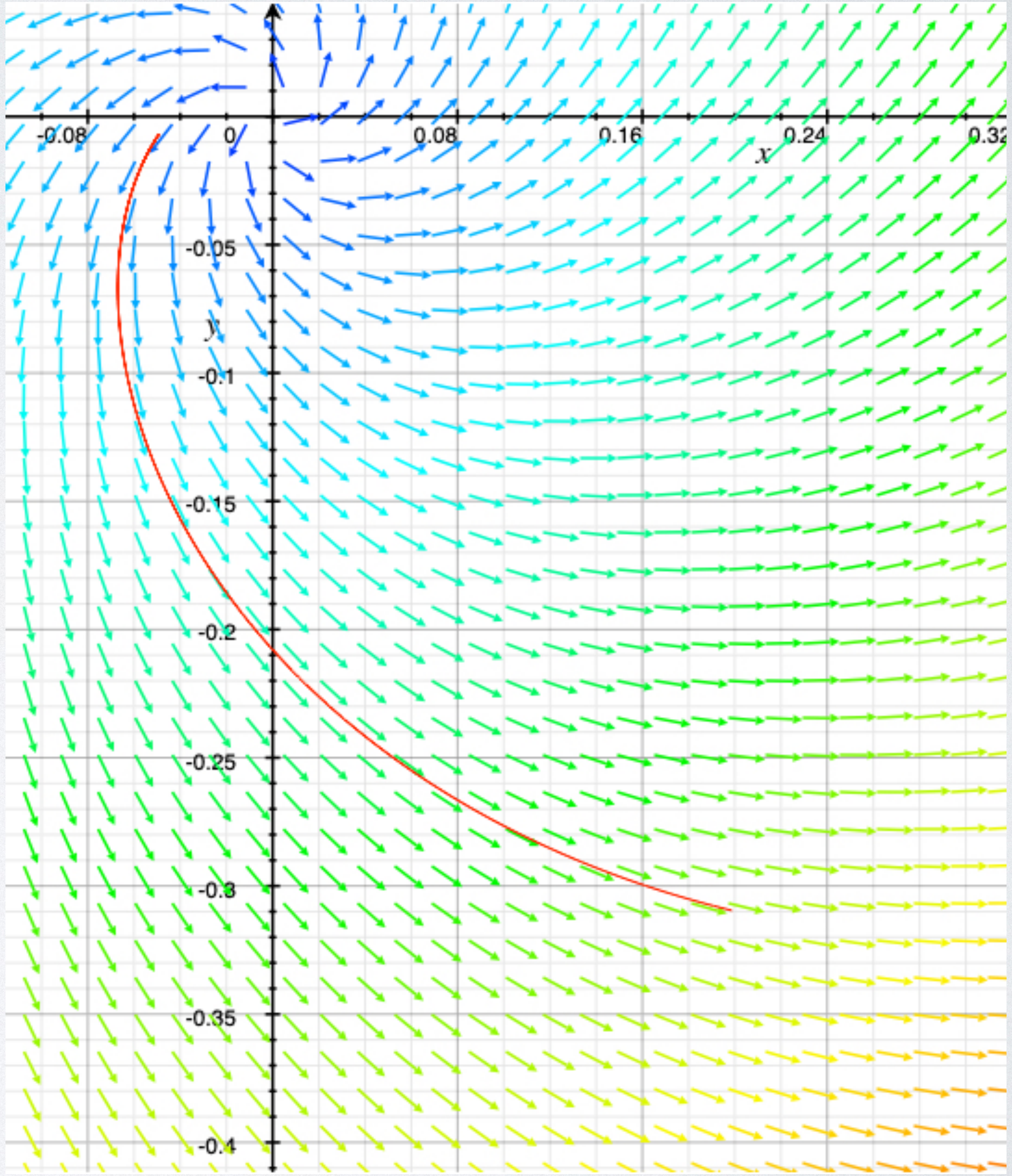


FLÜSSE?

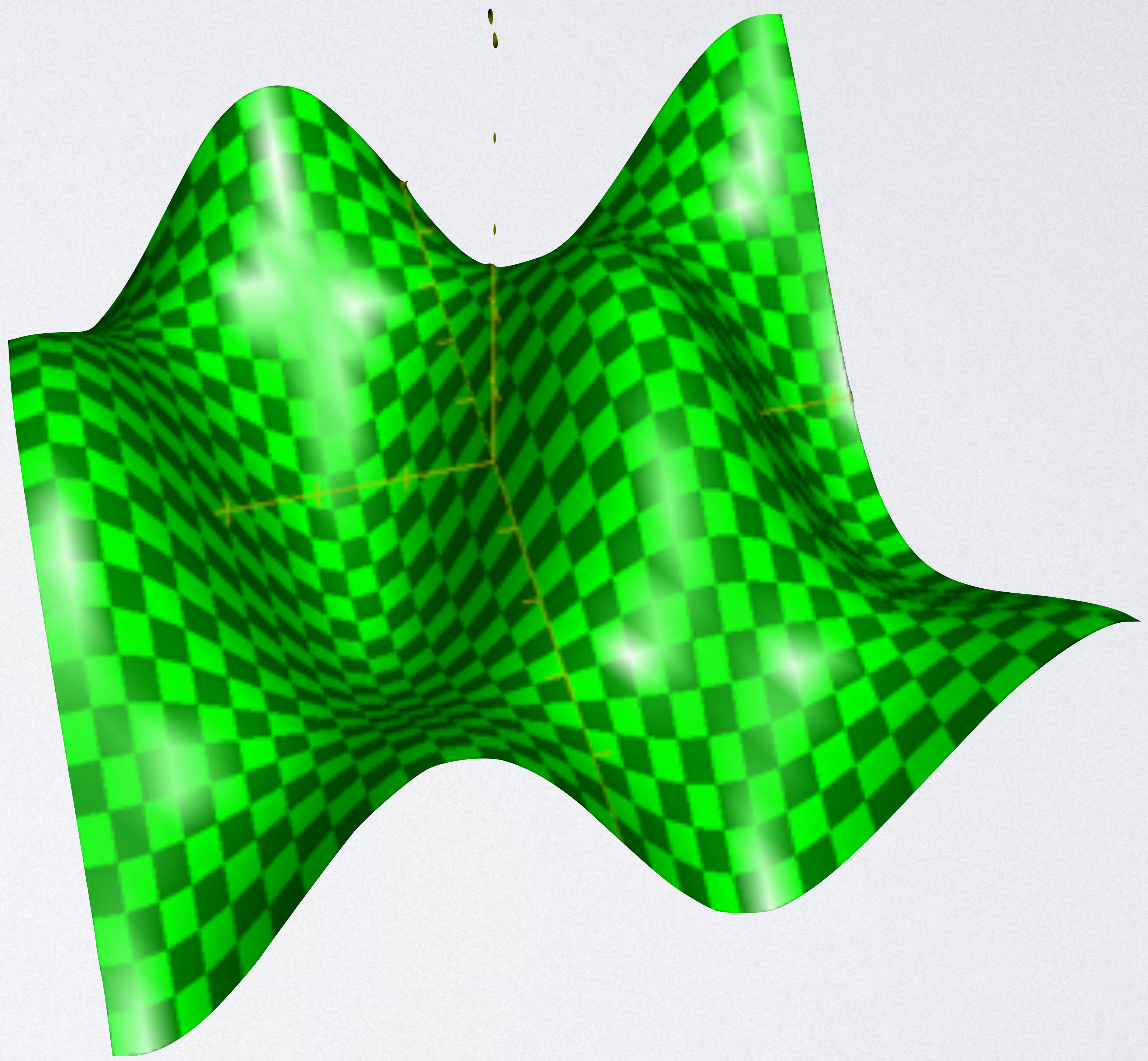
- Ein Fluss ist ein dynamisches System, bei dem man die Bewegungsrichtung an jedem Punkt vorgibt

- Analogie: treibende Blätter auf einen Fluss

- Man kann das "integrieren"

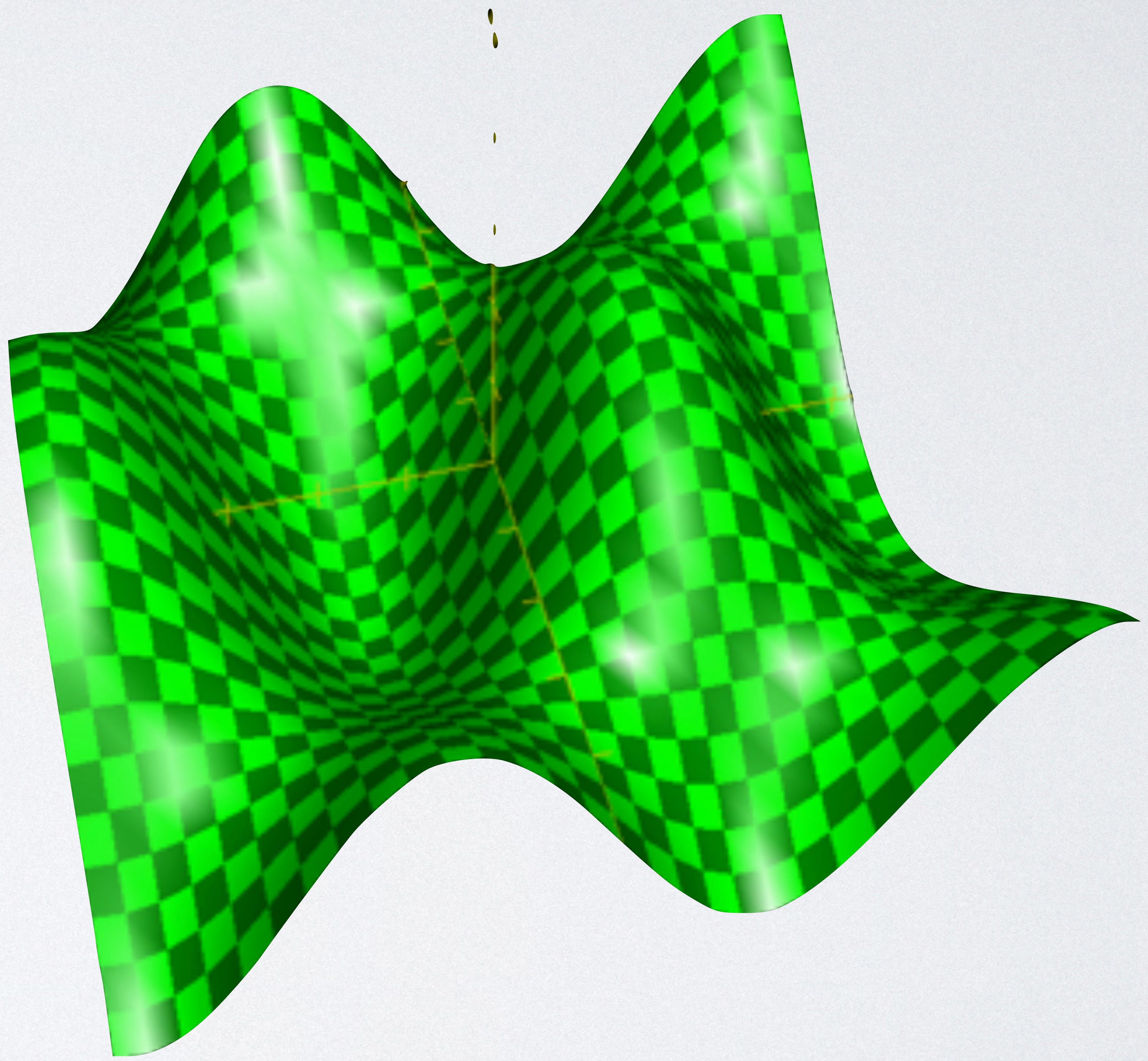


GRADIENTENFLUSS



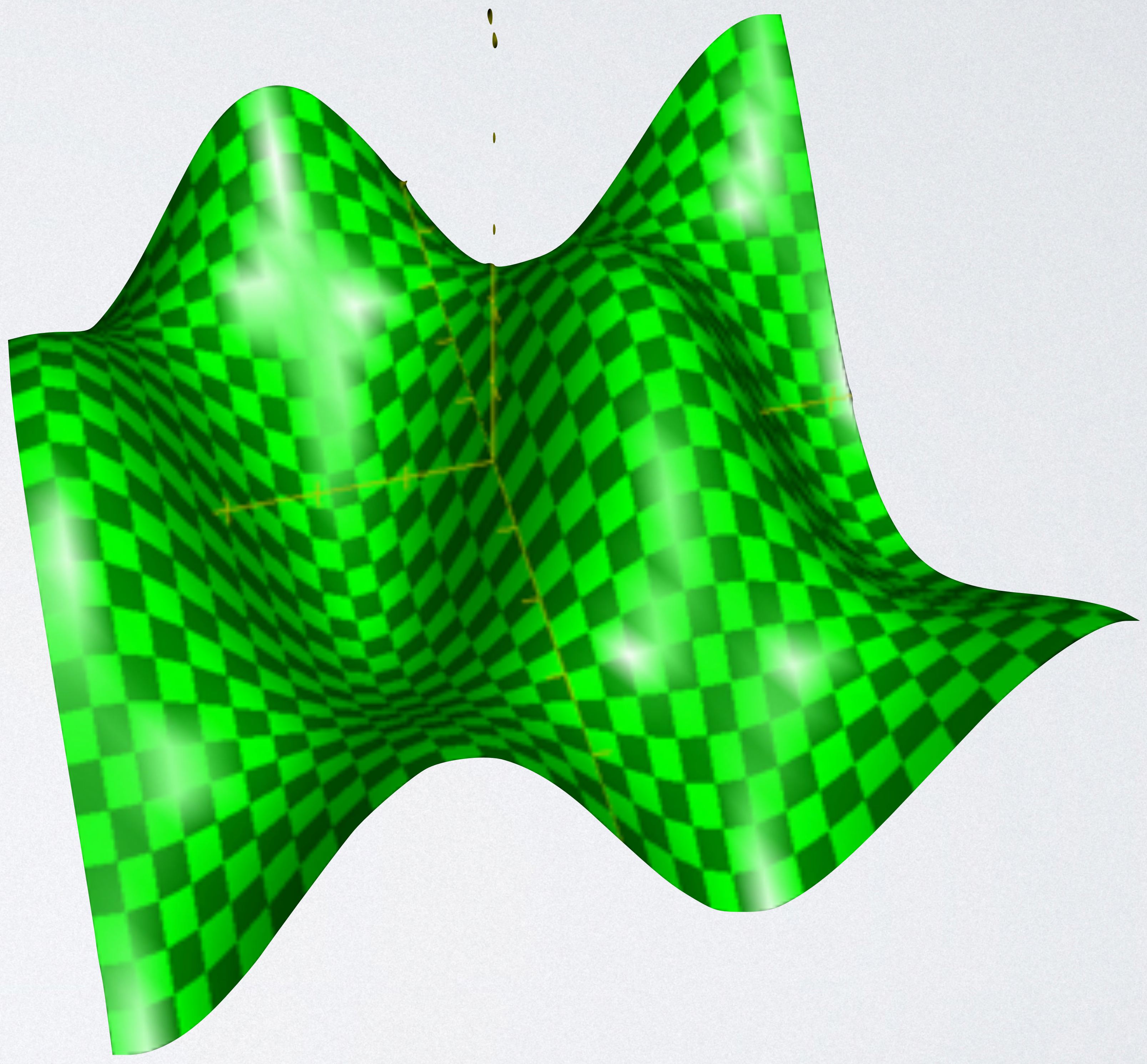
GRADIENTENFLUSS

- Beispiel: angenommen, wir haben eine Landschaft…



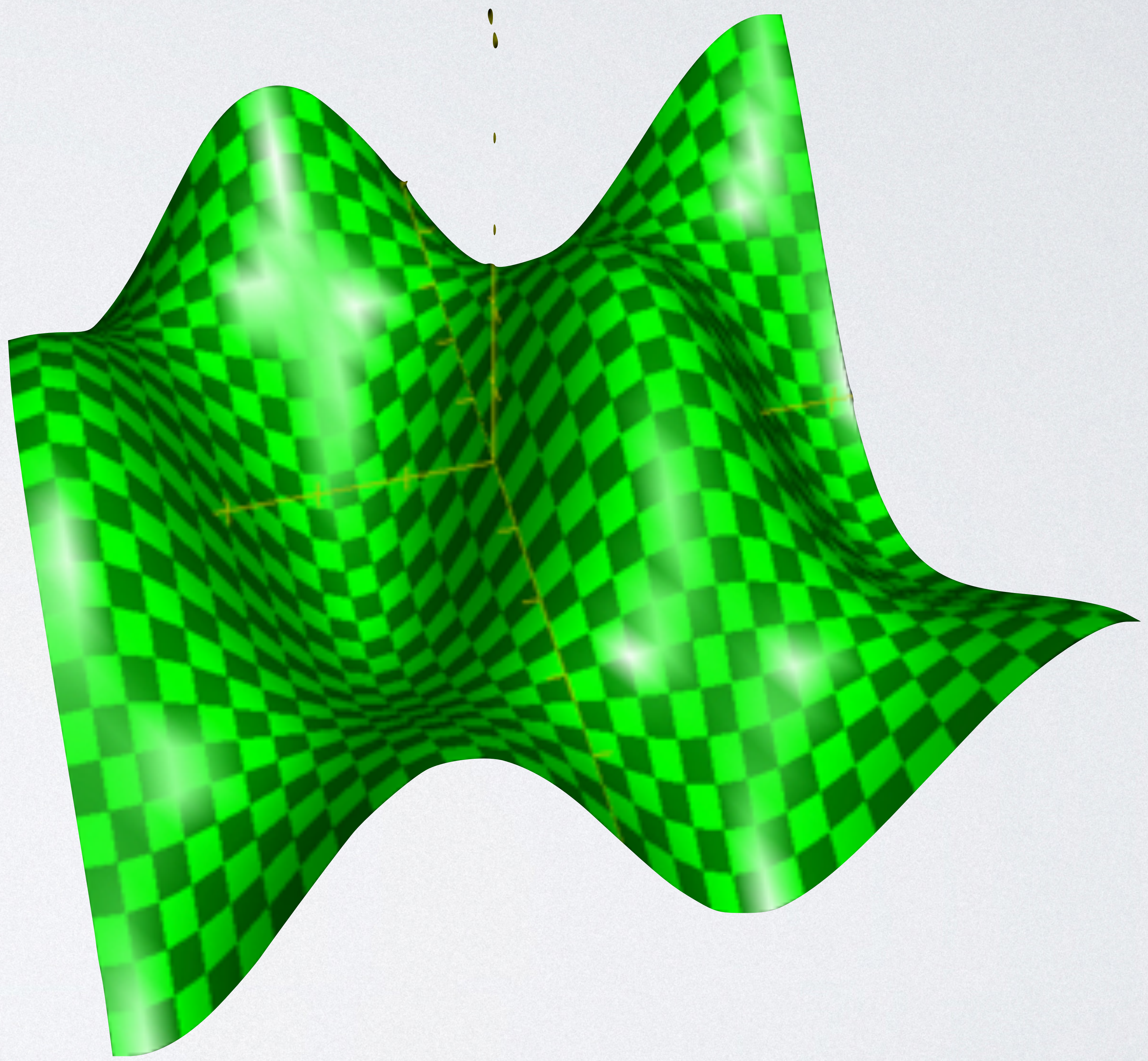
GRADIENTENFLUSS

- Beispiel: angenommen, wir haben eine Landschaft…
- …und wollen an den tiefsten Punkt



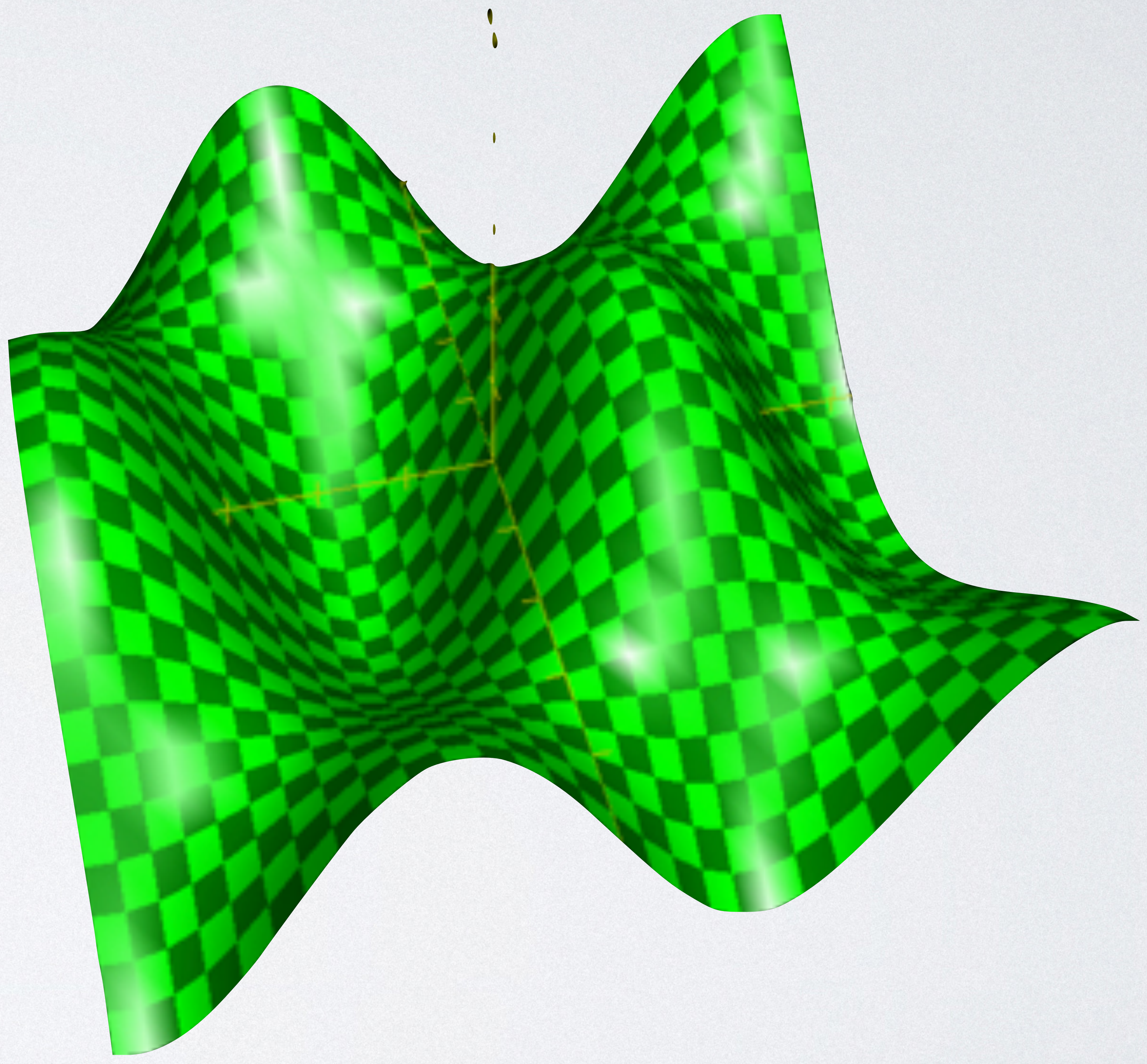
GRADIENTENFLUSS

- Beispiel: angenommen, wir haben eine Landschaft…
- …und wollen an den tiefsten Punkt
- Auch ohne die globale Topographie zu kennen, kann man lokal einfach immer nach unten gehen



GRADIENTENFLUSS

- Beispiel: angenommen, wir haben eine Landschaft…
- …und wollen an den tiefsten Punkt
- Auch ohne die globale Topographie zu kennen, kann man lokal einfach immer nach unten gehen
- Das klappt, außer es gibt "lokale Täler"…



RICCI-FLUSS

RICCI-FLUSS

- Hamilton definiert in den 1980ern einen solchen Fluss auf dem Raum aller Geometrien auf einer Mannigfaltigkeit.

RICCI-FLUSS

- Hamilton definiert in den 1980ern einen solchen Fluss auf dem Raum aller Geometrien auf einer Mannigfaltigkeit.
- Ähnlich wie der Wärmefluss versucht dieser, die Krümmung überall gleich zu verteilen

RICCI-FLUSS, HOFFNUNGSVOLL

RICCI-FLUSS, HOFFNUNGSVOLL

- In Dimension 2 funktioniert die Strategie: wenn wir mit einer typologischen Sphäre anfangen

RICCI-FLUSS, HOFFNUNGSVOLL

- In Dimension 2 funktioniert die Strategie: wenn wir mit einer typologischen Sphäre anfangen

- ist die durchschnittliche Krümmung positiv

RICCI-FLUSS, HOFFNUNGSVOLL

- In Dimension 2 funktioniert die Strategie: wenn wir mit einer typologischen Sphäre anfangen
- ist die durchschnittliche Krümmung positiv
- und der Ricci-Fluss verteilt die Krümmung gleichmäßig, bis man eine runde Schäre hat

RICCI-FLUSS, HOFFNUNGSVOLL

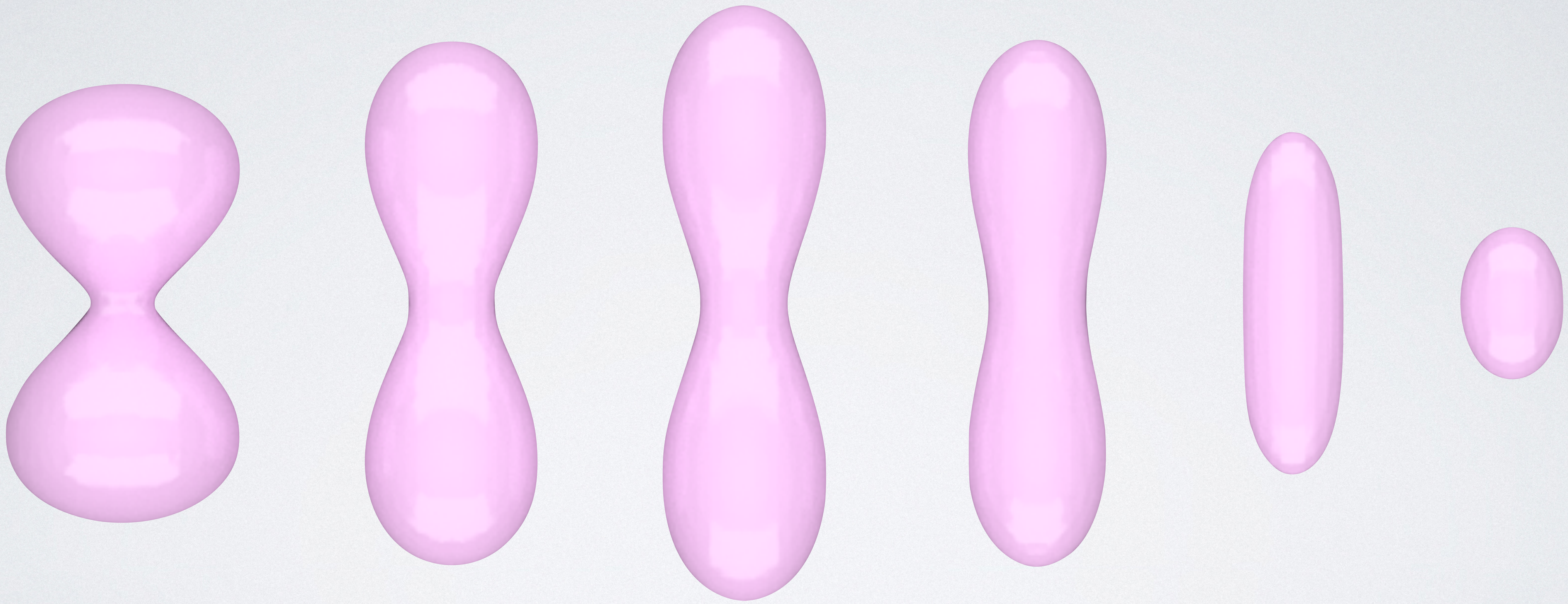


Bild: Diaaeldin Taha (HEGL)

RICCI-FLUSS, REALISTISCH

RICCI-FLUSS, REALISTISCH

- In Dimension 3 ist das alles viel schwieriger…

RICCI-FLUSS, REALISTISCH

- In Dimension 3 ist das alles viel schwieriger…
- In endlicher Zeit “explodiert” die Krümmung

RICCI-FLUSS, REALISTISCH

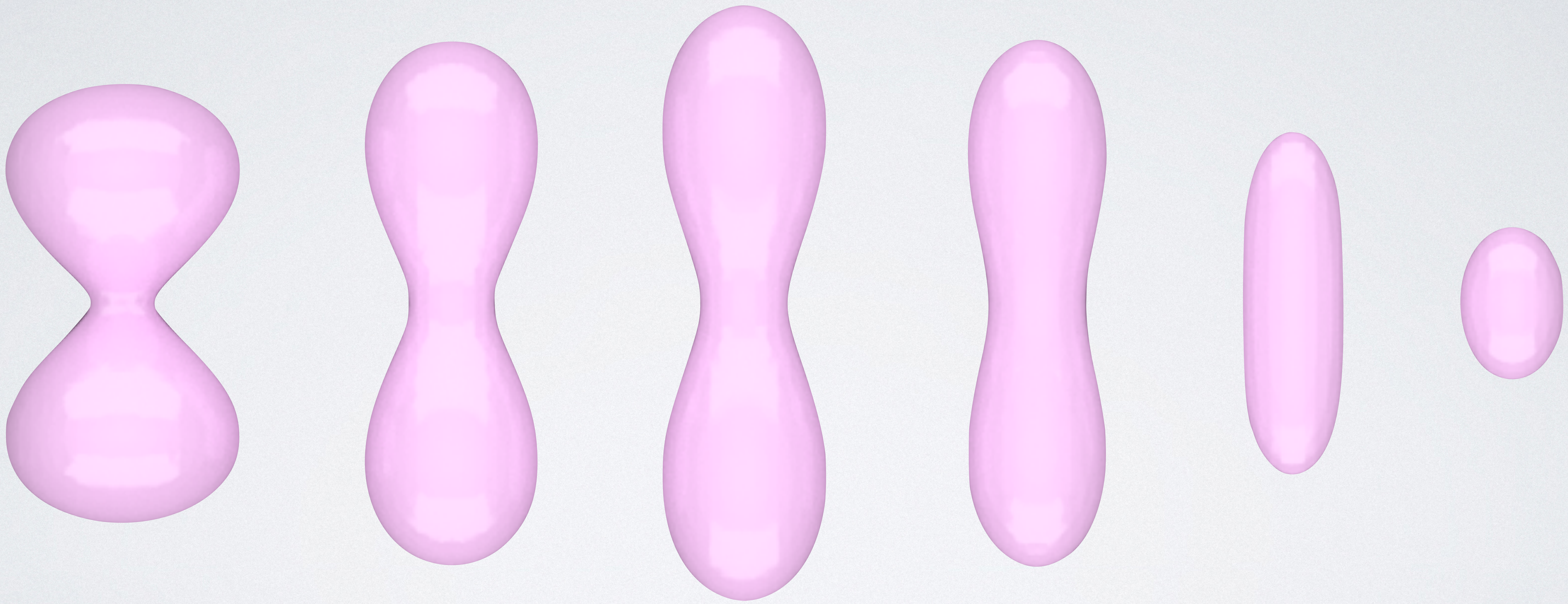


Bild: Diaaeldin Taha (HEGL)

RICCI-FLUSS, REPARIERT

RICCI-FLUSS, REPARIERT

- Hamilton schlägt daher “Ricci-Fluss mit Chirurgie” vor (um 1990-2000)

RICCI-FLUSS, REPARIERT

- Hamilton schlägt daher "Ricci-Fluss mit Chirurgie" vor (um 1990-2000)
- Chirurgie heißt: wenn Probleme entstehen, "schneidet man diese heraus"; und startet dann den Fluss auf den Teilen neu

RICCI-FLUSS, REPARIERT

- Hamilton schlägt daher "Ricci-Fluss mit Chirurgie" vor (um 1990-2000)
- Chirurgie heißt: wenn Probleme entstehen, "schneidet man diese heraus"; und startet dann den Fluss auf den Teilen neu
- Dieses Programm scheint aber hoffnungslos schwierig…

UND JETZT?

(Geometrie und Topologie nach Perelman)

LÖSUNG DER POINCARÉ-VERMUTUNG

LÖSUNG DER POINCARÉ-VERMUTUNG

- 2002, 2003: Perelman veröffentlicht preprints im Internet, die eine Lösung enthalten (aber sehr, sehr schwer lesbar sind…)

LÖSUNG DER POINCARÉ-VERMUTUNG

- 2002, 2003: Perelman veröffentlicht preprints im Internet, die eine Lösung enthalten (aber sehr, sehr schwer lesbar sind…)
- In den folgenden Jahren wird der Beweis von vielen Mathematikern lesbar gemacht, und ausgearbeitet

LÖSUNG DER POINCARÉ-VERMUTUNG

- 2002, 2003: Perelman veröffentlicht preprints im Internet, die eine Lösung enthalten (aber sehr, sehr schwer lesbar sind…)
- In den folgenden Jahren wird der Beweis von vielen Mathematikern lesbar gemacht, und ausgearbeitet
- Perelman wird sowohl der Clay-Preis, wie auch die Fields-Medaille verliehen…

LÖSUNG DER POINCARÉ-VERMUTUNG

- 2002, 2003: Perelman veröffentlicht preprints im Internet, die eine Lösung enthalten (aber sehr, sehr schwer lesbar sind…)
- In den folgenden Jahren wird der Beweis von vielen Mathematikern lesbar gemacht, und ausgearbeitet
- Perelman wird sowohl der Clay-Preis, wie auch die Fields-Medaille verliehen…
- …aber er lehnt beides ab!

NOCH MEHR GEOMETRIE?

NOCH MEHR GEOMETRIE?

- Perelman zeigt sogar noch mehr!

NOCH MEHR GEOMETRIE?

- Perelman zeigt sogar noch mehr!
- Nicht nur Sphären, sondern viel mehr 3-dimensionale Räume tragen eine natürliche Geometrie (Thurston's Geometriesierungsvermutung)

NOCH MEHR GEOMETRIE?

- Perelman zeigt sogar noch mehr!
- Nicht nur Sphären, sondern viel mehr 3-dimensionale Räume tragen eine natürliche Geometrie (Thurston's Geometriesierungsvermutung)
- Das erlaubt das Studium der Topologie dieser Räume mit Hilfe von Geometrie!

Bild: Jeff Weeks (Curved Spaces)