Prof. H.-J. Schneider
Mathematisches Institut
Universität München

WS 08/09

Hopfalgebren und Quantengruppen

Blatt 1, 20. Oktober

Sei R ein Ring. Die Kategorie der R-Linksmoduln bzw. R-Rechtsmoduln wird mit ${}_R\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{M}_R$ bezeichnet.

1. Seien $X \in \mathcal{M}_R$ und $I \subset R$ ein (zweiseitiges) Ideal.
   (a) Zeige: $X \otimes_R R/I \cong X/XI$ in $\mathcal{M}_{R/I}$.
   (b) Berechne $\mathbb{Z}/(m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/(n)$.

2. Sei k ein Körper. Statt $\mathrm{Hom}_k, \mathrm{End}_k$ und $\otimes_k$ schreiben wir $\mathrm{Hom}, \mathrm{End}$ und $\otimes$, und $V^* = \mathrm{Hom}(V, k)$ bezeichnet den Dualraum eines k-Vektorraums.
   (a) Zeige: Seien X, Y Vektorräume über k. Sei X oder Y endlichdimensional. Dann ist

   $$\varphi_{X,Y} : X \otimes Y^* \to \mathrm{Hom}(Y, X),\ \varphi_{X,Y}(x \otimes f)(y) = f(y)x,$$

   für alle $x \in X, y \in Y, f \in Y^*$, ein wohldefinierter Isomorphismus von Vektorräumen.
   (b) Sei X ein Vektorraum. Zeige: Die Auswertungsabbildung

   $$e_X : X \otimes X^* \to k,\ e_X(x \otimes f) = f(x),$$

   für alle $x \in X, f \in X^*$ eine wohldefinierte k-lineare Abbildung. Für endlichdimensionales X ist

   $$\mathrm{Tr} : \mathrm{End}(X) \xrightarrow{\varphi_{X,X}^{-1}} X \otimes X^* \xrightarrow{e_X} k$$

   die Spurabbildung der linearen Algebra.
   (c) Seien X, Y endlichdimensionale k-Vektorräume und $F \in \mathrm{End}(X), G \in \mathrm{End}(Y)$. Zeige: $\mathrm{Tr}(F \otimes G) = \mathrm{Tr}(F)\,\mathrm{Tr}(G)$.

3. Ein Funktor $F : {}_R\mathcal{M} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$ heißt *linksexakt*, wenn für jede exakte Folge $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ von R-Linksmoduln die induzierte Folge

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z)$$

exakt ist.

Ein kontravarianter Funktor $G : {}_R\mathcal{M} \to {}_{\mathbb{Z}}\mathcal{M}$ heißt *linksexakt*, wenn für jede exakte Folge $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ die induzierte Folge

$$0 \to G(Z) \xrightarrow{G(g)} G(Y) \xrightarrow{G(f)} G(X)$$

exakt ist.

Ebenso heißt F *rechtsexakt*, wenn für jede exakte Folge

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

von R-Linksmoduln die induzierte Folge

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z) \to 0$$

exakt ist.

Der Funktor F heißt *exakt*, wenn er links- und rechtsexakt ist. Dieselben Definitionen gelten natürlich auch für Rechtsmoduln, und für Funktoren in Modulkategorien statt abelsche Gruppen.

(a) Zeige: Der Hom-Funktor $\mathrm{Hom}_R(M, N), M, N$ R-Linksmoduln, ist in beiden Argumenten linksexakt.

(b) Seien U, V, W abelsche Gruppen und $\alpha : U \to V, \beta : V \to W$ Homomorphismen von abelschen Gruppen.
Zeige: $U \xrightarrow{\alpha} V \xrightarrow{\beta} W \to 0$ ist exakt, falls für jede abelsche Gruppe Z die induzierte Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(W, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\beta,\mathrm{id})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, Z) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha,\mathrm{id})} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(U, Z)$$

exakt ist.

(c) Zeige: Das Tensorprodukt $M \otimes_R N$, M ein R-Rechtsmodul und N ein R-Linksmodul, ist in beiden Argumenten rechtsexakt.

Hinweis: Verwende (b) und die aus der Definition des Tensorprodukts folgende Tatsache, dass der Hom-Funktor rechtsadjungiert zum Tensorprodukt ist.

(d) Zeige: Ist N ein freier R-Linksmodul oder ein direkter Summand eines freien R-Linksmoduls (dann heißt N *projektiv*), so ist der Funktor

$$X \mapsto X \otimes_R N$$

auch linksexakt, also wegen (c) exakt. Insbesondere ist das Tensorprodukt über einem Körper exakt.