Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 8

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 **(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 2)**

Betrachten Sie den endlichen Körper $\mathbb{F}_5$ mit fünf Elementen, das Polynom $f(X) = X^3+X+1 \in \mathbb{F}_5[X]$ und den Quotientenring $K = \mathbb{F}_5[X]/(f(X))$. Weiter bezeichne α die Restklasse von X modulo $(f(X))$.

(a) Zeigen Sie, dass K ein Körper mit 125 Elementen und dass $(1, \alpha, \alpha^2)$ eine $\mathbb{F}_5$-Basis von K ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_5)$, die den Frobenius-Automorphismus $F : K \to K$, $x \mapsto x^5$, bezüglich der Basis $(1, \alpha, \alpha^2)$ darstellt.

(c) Bestimmen Sie eine Basis für den Eigenraum von F zum Eigenwert 1.

Aufgabe 2 **(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 1)**

Sei $K = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen, und E sei ein Erweiterungskörper von K mit $|E| = 2^8$ Elementen.
Wie viele über K primitive Elemente besitzt E? (Das sind Elemente $\alpha \in E$ mit $E = K(\alpha)$.)
Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 **(Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 2)**

Sei K wie in Aufgabe 2 und es sei $f = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 \in K[X]$.

(a) Beweisen Sie, dass f irreduzibel in $K[X]$ ist.

(b) Sei (f) das von f erzeugte Ideal in $K[X]$. Es sei E der Erweiterungskörper $E := K[X]/(f)$ von K und es sei x das Element $x := X + (f) \in E$
Bestimmen Sie die Ordnung von x in der multiplikativen Gruppe E^* von E.

Aufgabe 4 **(Herbst 2004, Thema 2, Aufgabe 4)**

Seien p, q verschiedene Primzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ nicht isomorph sind.

(b) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ ist.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ über $\mathbb{Q}$.