Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 7

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 **(Frühjahr 2006, Thema 3, Aufgabe 1)**

Gegeben sei eine natürliche Zahl m. Beweisen Sie:

(a) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m|\varphi(n)$. (φ bezeichnet die Eulersche Phi-Funktion.)

(b) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, die in ihrer Dezimaldarstellung nur aus Nullen und Einsen bestehen und Vielfache von m sind.

Aufgabe 2 **(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 5)**

Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen. Beweisen Sie:
Jede Abbildung $\mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ lässt sich als polynomiale Abbildung $x \mapsto f(x)$ für ein Polynom $f \in \mathbb{F}_q[X]$ vom Grade höchstens $q-1$ darstellen.

Aufgabe 3 **(Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 3)**

Es sei $\Phi_d(X) \in \mathbb{Z}[X]$ das d-e Kreisteilungspolynom. Ferner seien $n \geq 1$ und z ganze Zahlen. Zeigen Sie:
Ist p Primzahl mit $p \nmid n$, so gilt

$$p \mid \Phi_n(z) \Longrightarrow \begin{cases} z^n \equiv 1 \mod p \\ \text{und} \\ z^d \not\equiv 1 \mod p \text{ für alle } d \mid n, 1 \leq d < n \end{cases}$$

Aufgabe 4 **(Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 4)**

Sei p Primzahl, K der Primkörper mit p Elementen und m eine natürliche Zahl. Zeigen Sie:
Jedes Kreisteilungspolynom $\Phi_m \in K[X]$ mit $p \nmid m$ ist Produkt von irreduziblen Polynomen gleichen Grades k, wobei k der kleinste Teiler von $\varphi(m)$ ist, so dass $m \mid p^k - 1$.