Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 4

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 1)

Wegen

$$0^2 \equiv 0,\ 1^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 0,\ 3^2 \equiv 1 \mod 4$$

sind alle Quadratzahlen $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \mod 4$. Summen zweier Quadratzahlen können also nur $\equiv 0$, $\equiv 1$ oder $\equiv 2 \mod 4$ sein. Folglich ist eine Summe zweier Quadratzahlen nie von der Gestalt $4n + 3$.

Aufgabe 2 (Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 2)

Falls n prim ist, ist n mit jeder Zahl $m < n$ teilerfremd, also auch mit $(n-1)!$. Sei nun $n = k \cdot m$ mit $k, m < n$.

Falls k und m verschieden sind, kommen beide als Faktoren in $(n-1)!$ vor, also teilt n die Zahl $(n-1)!$.

Sei nun $n = p^2$ und p prim (andernfalls hat n eine Darstellung $m \cdot k$ wie oben). Ist $p > 2$, so sind p und $2p$ Faktoren in $(n-1)!$, also ist $2p^2$ und somit auch $n = p^2$ ein Teiler von $(n-1)!$.

Übrig bleibt der Fall $n = 4$. Hier ist n kein Teiler von $(n-1)! = 6$.

n ist also genau dann Teiler von $(n-1)!$, wenn n weder prim noch 4 ist.

Aufgabe 3 (Frühjahr 2005, Thema 2, Aufgabe 3)

Sei $\mathfrak{a}$ ein Ideal von $R \times S$ und seien I und J die Projektionen von $\mathfrak{a}$ auf die erste bzw. zweite Komponente. Es ist zu zeigen, dass I und J Ideale sind und dass $\mathfrak{a} = I \times J$ ist.

Nach Definition ist $\mathfrak{a} \subseteq I \times J$. Sei $(r, s) \in I \times J$. Da I die Projektion von $\mathfrak{a}$ ist, gibt es ein $s' \in S$ mit $(r, s') \in \mathfrak{a}$. Ebenso gibt es ein $r' \in R$ mit $(r', s) \in \mathfrak{a}$. Also ist auch:

$$(r, s) = (1, 0) \cdot (r, s') + (0, 1) \cdot (r', s) \in \mathfrak{a}$$

Dies zeigt $\mathfrak{a} \supseteq I \times J$ und damit $\mathfrak{a} = I \times J$.

Wegen $(0, 0) \in \mathfrak{a}$ ist $0 \in I$. Ist $r, r' \in I$, so ist $(r, 0), (r', 0) \in \mathfrak{a}$, also auch $(r - r', 0) \in \mathfrak{a}$ und somit wiederum $r - r' \in I$, also ist I eine additive Untergruppe von R. Ist nun $\alpha \in R$, so ist $(\alpha, 0) \in R \times S$, also auch $(\alpha r, 0) = (\alpha, 0) \cdot (r, 0) \in \mathfrak{a}$ und somit $\alpha r \in I$. Damit ist gezeigt, dass I ein linksseitiges Ideal ist. Analog zeigt man, dass es ein rechtsseitiges Ideal ist und dass J ein links- und rechtsseitiges Ideal ist.

Aufgabe 4 **(Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 2)**

(a) Offenbar ist $\sim$ reflexiv (wähle $\alpha = \beta = 1$) und symmetrisch (vertausche α und β). Um die Transitivität zu zeigen, sei nun $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} \sim \mathfrak{c}$, das heißt, es gebe $\alpha, \beta, \beta', \gamma \in R \setminus \{0\}$ mit

$$\alpha \cdot \mathfrak{a} = \beta \cdot \mathfrak{b} \quad \text{und} \quad \beta' \cdot \mathfrak{b} = \gamma \cdot \mathfrak{c}$$

Dann ist $\alpha\beta' \cdot \mathfrak{a} = \beta\gamma \cdot \mathfrak{c}$, also $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{c}$, denn da R ein Integritätsring ist, ist $\alpha\beta' \neq 0 \neq \beta\gamma$.

Sei nun $\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_2$, mit Faktoren $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in R \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\alpha_1\alpha_2 \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = \alpha_1 \cdot \mathfrak{a}_1 \cdot \alpha_2 \cdot \mathfrak{a}_2 = \beta_1 \cdot \mathfrak{b}_1 \cdot \beta_2 \cdot \mathfrak{b}_2 = \beta_1\beta_2 \cdot \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2,$$

was die Relation $\mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2$ bezeugt.

(b) Sei $\alpha \cdot \mathfrak{a} = \beta \cdot \mathfrak{b}$ wie in der Definition. Dann ist $f : \mathfrak{a} \to \alpha \cdot \mathfrak{a}$ mit $f(x) = \alpha \cdot x$ ein surjektiver R-Modulhomomorphismus. Ist $f(x) = 0$, so ist $\alpha \cdot x = 0$, also, da R Integritätsring ist, $x = 0$. Damit ist gezeigt, dass f auch injektiv ist, also ein R-Modulisomorphismus. Ebenso zeigt man, dass $\mathfrak{b}$ isomorph zu $\beta \cdot \mathfrak{b} = \alpha \cdot \mathfrak{a}$ ist. Somit sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ auch isomorph zueinander.

Sei nun umgekehrt $f : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ ein R-Modulisomorphismus. Sei $x \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$. Wir zeigen, dass $f(x) \cdot \mathfrak{a} = x \cdot \mathfrak{b}$ ist, also $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ gilt.

Sei zunächst $f(x) \cdot y \in f(x) \cdot \mathfrak{a}$. Dann ist $f(x) \cdot y = f(xy) = xf(y) \in x \cdot \mathfrak{b}$. Sei nun umgekehrt $x \cdot z \in x \cdot \mathfrak{b}$. Dann ist z von der Form $z = f(y)$ für ein $y \in \mathfrak{a}$ und es gilt $x \cdot z = x \cdot f(y) = f(xy) = f(x) \cdot y \in f(x) \cdot \mathfrak{a}$. Damit ist gezeigt, dass $f(x) \cdot \mathfrak{a} = x \cdot \mathfrak{b}$.