Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 4

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 1)

Beweisen oder widerlegen Sie: Eine natürliche Zahl der Gestalt $4n+3$ mit $n \in \mathbb{N}$ besitzt keine Darstellung als Summe von zwei Quadraten ganzer Zahlen.

Aufgabe 2 (Herbst 2007, Thema 3, Aufgabe 2)

Für welche natürlichen Zahlen $n \geq 2$ ist n ein Teiler von $(n-1)!$?

Aufgabe 3 (Frühjahr 2005, Thema 2, Aufgabe 3)

Seien R und S Ringe (mit 1). Zeigen Sie, dass die (zweiseitigen) Ideale des direkten Produktes $R \times S$ die Form $I \times J$ haben mit Idealen I bzw. J von R bzw. S.

Aufgabe 4 (Frühjahr 2005, Thema 1, Aufgabe 2)

Sei R ein Integritätsring. Für Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ in R definiert man

$$\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es gibt } \alpha, \beta \in R \setminus \{0\} \text{ mit } \alpha \cdot \mathfrak{a} = \beta \cdot \mathfrak{b}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, und es gilt:

$$\mathfrak{a}_1 \sim \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_2 \Rightarrow \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{a}_2 \sim \mathfrak{b}_1 \cdot \mathfrak{b}_2$$

(b) Genau dann gilt $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als R-Moduln isomorph sind.