Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 3

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 2)

(a) Die Anzahl s_q der q-Sylowgruppen ist $1 \mod q$ und teilt $|G|/q = p$, ist also entweder 1 oder p. Wegen $p < q$ ist $p \not\equiv 1 \mod q$, also gibt es nur eine q-Sylowgruppe Q. Da alle zu ihr konjugierten ebenfalls q-Sylowgruppen sind, ist sie ein Normalteiler.

Ebenso gilt $s_p | q$ und $s_p \equiv 1 \mod p$. Da $q \not\equiv 1 \mod p$, gibt es auch nur eine p-Sylowgruppe P, die damit ebenfalls ein Normalteiler ist.

Da die nichttrivialen Elemente von P Ordnung p, die von Q aber Ordnung q haben, ist $P \cap Q = \{e\}$. Folglich ist G das semidirekte Produkt von P und Q. Da es keinen nichttrivialen Homomorphismus von Q nach $\mathrm{Aut}(P)$ gibt (letztere hat Ordnung $p - 1 < q$), handelt es sich sogar um ein direktes Produkt. G ist also direktes Produkt zweier zyklischer Gruppen mit teilerfremder Ordnung und damit selbst zyklisch.

(b) In diesem Fall ist also $q-1 = |\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_q)|$ ein Vielfaches von p. Außerdem ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_q) \cong (\mathbb{Z}_q)^\times$ zyklisch. Somit gibt es einen nichttrivialen Homomorphismus $\tau : \mathbb{Z}_p \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_q)$ und ein nichtabelsches semidirektes Produkt $\mathbb{Z}_q \rtimes_\tau \mathbb{Z}_p$.

Aufgabe 2 (Frühjahr 2002, Thema 2, Aufgabe 2)

(a) Die Ordnung eines Elements von S_p ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der disjunkten Zykeln, deren Komposition es ist. Es hat also Ordnung p genau dann, wenn es von der Form $(n_1 n_2 \dots n_p)$ ist, wobei $\{n_1, n_2, \dots, n_p\} = \{1, 2, \dots, p\}$ in irgendeiner Reihenfolge ist. Da eine zyklische Vertauschung der n_i das gleiche Element bezeichnet, können wir ohne Einschränkung $n_1 = 1$ setzen. Jede Reihenfolge der $n_2, \dots, n_p$ definiert dann ein anderes Element, das heißt, es gibt $(p-1)!$ Elemente der Ordnung p.

(b) $[G : N_{S_p}(P)]$ ist genau die Anzahl der p-Sylowgruppen. Jedes Element der Ordnung p erzeugt eine, und jede p-Sylowgruppe hat $p - 1$ Erzeuger. Also gibt es $\frac{(p-1)!}{p-1} = (p-2)!$ p-Sylowgruppen und damit ist $|N_{S_p}(P)| = \frac{p!}{(p-2)!} = p(p-1)$.

Aufgabe 3 (Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 1)

(a) $2007 = 223 \cdot 3^2$, also teilt die Anzahl s_{223} der 223-Sylowgruppen 3^2, das heißt, $s_{223} \in \{1, 3, 9\}$. Außerdem ist $s_{223} \equiv 1 \mod 223$, das heißt, 223 teilt $s_{223} - 1$. Daher muss $s_{223} = 1$ sein und die 223-Sylowgruppe normal.

(b) Da 223 prim ist, ist N zyklisch, also abelsch. Daher ist die Konjugation von N mit einem Element von N trivial und somit liegt N im Kern des durch die Konjugationsoperation definierten Homomorphismus $G \to \mathrm{Aut}(N)$. Nach dem Homomorphiesatz wird also ein Homomorphismus $G/N \to S(N)$, also eine Operation von G/N auf N induziert. Nun ist aber $\mathrm{Aut}(N) \cong \mathbb{Z}_{222}$ und $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$. Also hat $\mathrm{Aut}(N)$ keine Untergruppe der Ordnung 9, das heißt, auch diese Abbildung kann nicht injektiv sein. Der Kern K/N hat also mindestens Ordnung 3. Daher hat er eine Untergruppe H/N der Ordnung 3.

(c) Ist $K/N = G/N$, so ist G das direkte Produkt von N und einer 3-Sylowgruppe der Ordnung 9, und damit abelsch. In diesem Fall ist die Aussage also nach dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen trivial.

Andernfalls ist $K/N = H/N$ und somit H ein Normalteiler. Da H das direkte Produkt seiner 3-Sylowgruppe und seiner 223-Sylowgruppe N ist, ist H abelsch.

Aufgabe 4 **(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 5)**

Ein Element der Ordnung 6 von A_n muss aus Zykeln bestehen, so dass 6 das kleinste gemeinsame Vielfache der Zykellängen ist, und – weil es gerade sein muss – so dass die Anzahl der geraden Zykeln gerade ist. Es muss also mindestens ein 3- und zwei 2-Zykel enthalten. Dies ist erst ab A_7 möglich.

A_5 enthält die Untergruppe $\langle (12)(45), (23)(45) \rangle$, die 6 Elemente hat, da die Abbildung $\sigma \mapsto \sigma \restriction \{1, 2, 3\}$ ein Isomorphismus nach S_3 ist. A_4 jedoch hat keine Untergruppe der Ordnung 6: Eine solche Untergruppe $H \subset A_4$ müsste ein Element der Ordnung 2 und eines der Ordnung 3 enthalten, also von der Form $H = \langle (abc), (ab)(cd) \rangle$ sein. Dann wäre aber auch $(ac)(bd) = (abc)^{-1}(ab)(cd)(abc) \in H$ und somit die ganze kleinsche Vierergruppe. Diese hat aber 4 Elemente und 4 ist kein Teiler von 6, im Widerspruch zur Annahme.

Aufgabe 5 **(Herbst 2006, Thema 1, Aufgabe 4)**

(a) $231 = 3 \cdot 77 = 3 \cdot 7 \cdot 11$. Sei s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen. Dann ist jeweils $s_p \equiv 1 \mod p$ und $s_p | (231/p)$. Daraus folgt $s_3 \in \{1, 7\}$, $s_7 = 1$ und $s_{11} = 1$. Wäre $s_3 = 1$, so wären alle Sylowgruppen Normalteiler und damit wäre G ihre direkte Summe. Die Sylowgruppen sind aber isomorph zu $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_{11}$, also abelsch. Folglich wäre für $s_3 = 1$ auch G abelsch, was ausgeschlossen wurde. Es gilt also $s_3 = 7$. Damit sind genau für $p = 3$ die p-Sylowgruppen keine Normalteiler.

(b) Da S sieben Konjugierte (inklusive S) hat, ist $[G : N_G(S)] = 7$ und $N_G(S)$ hat 33 Elemente. $N_G(S)$ hat eine 11-Sylowuntergruppe und diese ist dann genau die (eindeutig bestimmte) 11-Sylowuntergruppe H von G. Es ist also $N_G(S) = SH$ ein semidirektes Produkt des Normalteilers $H \cong \mathbb{Z}_{11}$ mit $S \cong \mathbb{Z}_3$. Da S in $N_G(S)$ ein Normalteiler ist, ist $N_G(S)$ sogar das direkte Produkt von S und H, hat also Isomorphietyp $\mathbb{Z}_{33}$.

(c) Sei nun noch P die 7-Sylowgruppe. Da P ein Normalteiler ist und $SH = N_G(S)$, ist G das semidirekte Produkt von $N_G(S) \cong \mathbb{Z}_{33}$ und $P \cong \mathbb{Z}_7$ (wir identifizieren nun diese Gruppen jeweils) mit einem nichttrivialen Homomorphismus $\tau : N_G(S) \to \mathrm{Aut}(P) \cong \mathbb{Z}_6$. Dessen Bild muss eine Mächtigkeit haben, die 33 und 6 teilt, also 3. Daher muss $\tau(\bar{1})(\bar{x}) = \bar{2}x$ oder $\tau(\bar{1})(x) = \bar{4}x$ sein (welche der beiden Varianten wir wählen, spielt für den Isomorphietyp offenbar keine Rolle), da $\bar{2}$ und $\bar{4}$ die einzigen Elemente von $\mathbb{Z}_7^\times$ mit Ordnung 3 sind, und es ist $G = \mathbb{Z}_7 \rtimes_\tau \mathbb{Z}_{33}$.