Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Herbst 2006, Thema 3, Aufgabe 2)

Es seien p und q Primzahlen mit $p < q$.

(a) Zeigen Sie mit den Sylowschen Aussagen, dass im Fall $q \not\equiv 1 \mod p$ jede Gruppe der Ordnung pq zyklisch ist.

(b) Geben Sie im Falle $q \equiv 1 \mod p$ mi Hilfe des semidirekten Produktes eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq an.

Aufgabe 2 (Frühjahr 2002, Thema 2, Aufgabe 2)

Sei p eine Primzahl und sei S_p die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, p\}$.

(a) Man gebe die Anzahl der Elemente der Ordnung p in S_p an.

(b) Sei P eine p-Sylowuntergruppe von S_p. Man gebe die Anzahl der Elemente des Normalisators von P in S_p an.

Aufgabe 3 (Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 1)

Sei G eine Gruppe mit 2007 Elementen. Zeigen Sie:

(a) Die Gruppe G besitzt eine normale 223-Sylow-Untergruppe N.

(b) Die Operation von G auf N durch Konjugation induziert eine Operation der Faktorgruppe G/N auf N und G/N enthält eine Untergruppe H der Ordnung drei, die trivial auf N operiert.

(c) Folgern Sie, dass die Gruppe G einen abelschen Normalteiler der Ordnung 669 enthält.

Aufgabe 4 **(Frühjahr 2007, Thema 1, Aufgabe 5)**

(a) Prüfen Sie jeweils, ob die alternierende Gruppe A_4 ein Element der Ordnung 6 oder eine Untergruppe der Ordnung 6 enthält. (Antwort mit Begründung)

(b) Geben Sie das kleinste n an, so dass A_n eine Untergruppe der Ordnung 6 enthält un ddas kleinste n, so dass A_n ein Element der Ordnung 6 enthält.

Aufgabe 5 **(Herbst 2006, Thema 1, Aufgabe 4)**

Sei G eine *nicht* abelsche Gruppe der Ordnung 231.

(a) Für welche Primzahl p sind die p-Sylowgruppen in G keine Normalteiler?

(b) Sei p die Primzahl aus Teilaufgabe (a) und sei S eine p-Sylowgruppe. Bestimmen Sie den Isomorphietyp des Normalisators $N(S) = \{g \in G \mid gsg^{-1} \in S \text{ für alle } s \in S\}$ von S in G.

(c) Können Sie G mit Hilfe der Teilaufgaben (a) und (b) als semidirektes Produkt zyklischer Gruppen schreiben?