Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Lösungsvorschlag zu Übungsblatt 2

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 3)

(a) Wir setzen $G_1 = \langle z^7 \rangle$ und $G_2 = \langle z^9 \rangle$. Da z Ordnung 63 hat, sind z^7 und z^9 ungleich e, die Gruppen also nicht trivial. Weil G abelsch ist, sind G_1 und G_2 sogar Normalteiler. Da 7 und 9 teilerfremd sind, gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$, so dass $1 = 7m + 9n$ (diese liefert etwa der erweiterte euklidische Algorithmus). Dann ist aber $(z^7)^m \cdot (z^9)^n = z^{7m+9n} = z^1 = z$, also ist $z \in \langle z^7, z^9 \rangle$ und somit $G = \langle z^7, z^9 \rangle$. Da G abelsch ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass $G_1 \cap G_2 = \{e\}$ ist. Sei also $x \in G_1 \cap G_2$. Dann gibt es also $k, l \in \mathbb{Z}$, so dass $x = (z^7)^k = (z^9)^l$, das heißt, $x = z^{7k} = z^{9l}$. Da z Ordnung 63 hat, folgt hieraus $63 | (7k - 9l)$. Dann muss aber $7|l$ und $9|k$ gelten, also $63|7k$ und $63|9l$. Daraus folgt $x = z^{7k} = e$, wie gewünscht.

(b) Da $63 | 9 \cdot 49$ ist $(z^{49})^9 = e$, also ist die Ordnung von z^{49} ein Teiler von 9. Da 63 kein Teiler von $3 \cdot 49$ ist, ist $(z^{49})^3 \neq e$, also die Ordnung von z^{49} kein Teiler von 3. Folglich hat das Element genau die Ordnung 9.

Aufgabe 2 (Herbst 2003, Thema 1, Aufgabe 1)

(a) Sei $\mathrm{Abb}(G)$ die Menge aller Abbildungen (nicht notwendigerweise Homomorphismen!) von G nach G und sei $S(G) \subset \mathrm{Abb}(G)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen. Beides sind Gruppen bezüglich der Komposition von Abbildungen $\circ$. Da $|G| = n$, ist $S(G)$ isomorph zu S_n und es genügt zu zeigen, dass G isomorph zu einer Untergruppe von $S(G)$ ist, dass es also einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Abb}(G)$ gibt, dessen Bild eine Teilmengen von $S(G)$ ist. Wir definieren φ wie folgt:

$$\varphi(g)(h) = gh$$

Wegen $\varphi(g_1 g_2)(h) = g_1 g_2 h = \varphi(g_1)(g_2 h) = \varphi(g_1)(\varphi(g_2)(h))$ ist $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$, die Abbildung φ also tatsächlich ein Homomorphismus. Da $\varphi(g) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(gg^{-1}) = \varphi(e) = \mathrm{id}_G$ ist, ist jedes $\varphi(g)$ bijektiv, also in $S(G)$. Es bleibt zu zeigen, dass φ injektiv ist, sei also $\varphi(g) = \mathrm{id}_G$. Dann ist $g = ge = \varphi(g)(e) = e$.

(b) Zunächst stellen wir fest, dass $\varphi(g)$ für $g \neq e$ keinen Fixpunkt hat: Gäbe es ein h mit $gh = \varphi(g)(h) = h$, so folgte $g = e$.

Wir betrachten nun also ohne Einschränkung G als eine Untergruppe von S_n, deren nichttriviale Elemente keine Fixpunkte haben. Dann ist $G \cap A_n$ ein Normalteiler von G, dessen Ordnung 2 teilt. Es ist also nur zu zeigen, dass G nicht Teilmenge von A_n ist.

Da G Ordnung $2u$ hat, gibt es ein Element x der Ordnung 2. Dieses besteht also nur aus disjunkten Transpositionen. Da es keinen Fixpunkt hat, ist es Komposition von genau u solchen Transpositionen, also ist $x \notin A_n$.

Aufgabe 3 **(Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 1)**

(a) Wegen $\mathrm{id}(X_1) = X_1$ ist das neutrale Element in G. Für jedes $\sigma \in G$ mit $\sigma(X_1) = X_1$ gilt $\sigma(X_2) = X_2$, da σ bijektiv ist. Ebenso gilt für $\sigma(X_1) = X_2$ auch $\sigma(X_2) = X_1$. Sind nun $\sigma, \rho \in G$, so ist $(\sigma \circ \rho)(X_1) = \sigma(\rho(X_1))$ entweder $\sigma(X_1)$ oder $\sigma(X_2)$, also ebenfalls X_1 oder X_2. Daher ist $\sigma \circ \rho \in G$. Da G endlich ist, folgt daraus bereits, dass G eine Untergruppe ist.

(b) Ist $\varphi(\sigma) = 1 = \varphi(\rho)$, so ist $\sigma(X_1) = X_1$ und $\rho(X_1) = X_1$, also auch $\sigma \circ \rho(X_1) = X_1$ und somit $\varphi(\sigma \circ \rho) = 1 = \varphi(\sigma)\varphi(\rho)$. Analog verifiziert man die anderen drei Fälle. Ist $f : X_1 \to X_2$ bijektiv, so hat die durch $\sigma(x) = f(x)$ für $x \in X_1$ und $\sigma(x) = f^{-1}(x)$ für $x \in X_2$ definierte Abbildung die Eigenschaft $\varphi(\sigma) = -1$, also ist φ surjektiv.

$\mathrm{Ker}(\varphi)$ besteht aus genau denjenigen $\sigma \in G$, für die $\sigma(X_1) = X_1$ und $\sigma(X_2) = X_2$ ist. In diesem Fall sind dann $\sigma \restriction X_1 : X_1 \to X_1$ und $\sigma \restriction X_2 : X_2 \to X_2$ Bijektionen. Wir können also eine Abbildung $h : \mathrm{Ker}(\varphi) \to S_n \times S_n$ definieren durch $h(\sigma) = (\sigma \restriction X_1, \sigma \restriction X_2)$. Da Komposition und Restriktion von Funktionen vertauschen, ist h ein Gruppenhomomorphismus. Ist $h(\sigma) = (\mathrm{id}_{X_1}, \mathrm{id}_{X_2})$, so bildet σ jedes Element von X_1 und X_2 auf sich selbst ab, also ist dann $\sigma = \mathrm{id}_X$. Damit ist gezeigt, dass h injektiv ist. Für die Surjektivität sei schließlich $(\alpha, \beta) \in S_n \times S_n$ beliebig. Dann ist (α, β) das Bild von $\sigma \in G$, wobei σ für $x \in X_1$ definiert ist als $\sigma(x) = \alpha(x)$ und für $x \in X_2$ als $\sigma(x) = \beta(x)$.

(c) Sei $X_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $X_2 = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Offenbar ist $(a_1a_2)(b_1b_2) \in G$. Aber es gilt:

$$(a_1b_1)^{-1}(a_1a_2)(b_1b_2)(a_1b_1) = (a_1a_2b_1)(b_1a_1b_2) = (a_1b_2)(b_1a_2) \notin G$$

Also ist G kein Normalteiler.

(d) Da $G \supset S_n \times S_n \supset S_n \times \{\mathrm{id}\} \supset \{(\mathrm{id}, \mathrm{id})\}$ eine Subnormalreihe ist, deren Faktorgruppen genau S_n und (die sowieso auflösbare) $\mathbb{Z}_2$ sind, ist G genau dann auflösbar, wenn S_n auflösbar ist. Dies ist genau für $n \leq 4$ der Fall.

Aufgabe 4 **(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 3)**

(a) p-Gruppen haben nichttriviales Zentrum und im Zentrum von G gibt es ein Element z der Ordnung p. Dann ist aber $\langle z \rangle$ ein Normalteiler von G und $G/\langle z \rangle$ ist eine Gruppe der Ordnung p^{m-1}. Wir zeigen nun die Behauptung per Induktion nach m:

Sei M eine maximale Untergruppe von G. Falls $z \in M$, so ist $M/\langle z \rangle$ eine maximale Untergruppe von $G/\langle z \rangle$, also ein Normalteiler vom Index p. Dann ist auch sein Urbild $M = M \cdot \langle z \rangle$ ein Normalteiler vom Index p. Sei nun $z \notin M$. Dann ist $G = M \cdot \langle z \rangle$. Da $\langle z \rangle$ ein Normalteiler ist und die Elemente von $\langle z \rangle$ mit denen von M kommutieren, ist M

auch in diesem Fall ein Normalteiler und G das direkte Produkt von M und $\langle z \rangle$. Also ist $|M \cdot \langle z \rangle| = |M| \cdot p$.

Der Induktionsanfang $m = 1$ ist trivial: In diesem Fall hat G genau p Elemente, ist also zyklisch von der Ordnung p. Die einzige echte Untergruppe von G ist dann $\{e\}$.

(b) Es ist zu zeigen, dass für alle $g, h \in G$ gilt: $g^p N = eN$, also $g^p \in N$, sowie $ghN = hgN$, also $ghg^{-1}h^{-1} \in N$.

Sei hierzu M eine maximale Untergruppe. Da G/M die Ordnung p hat, ist $g^p M = eM$, also $g^p \in M$. Außerdem ist G/M abelsch, also gilt $ghg^{-1}h^{-1}M = eM$, das heißt $ghg^{-1}h^{-1} \in M$. Da dies für alle maximalen Untergruppen M gilt, liegen g^p und $ghg^{-1}h^{-1}$ auch im Durchschnitt N.

Aufgabe 5 **(Frühjahr 2001, Thema 1, Aufgabe 2)**

(1) Sei $(G, +)$ torsionsfrei, abelsch und vom Rang 1. Wir wählen ein beliebiges $0 \neq x \in G$ und definieren eine Einbettung (d.h. einen injektiven Gruppenhomomorphismus) $\varphi : G \to \mathbb{Q}$. Hierzu setzen wir natürlich $\varphi(0) = 0$. Sei nun $0 \neq y \in G$. Dann gibt es nach Voraussetzung $a, b \in \mathbb{Z}$, nicht beide 0, so dass $ax + by = 0$, und wir definieren $\varphi(y) = -\frac{a}{b}$ (insbesondere ist also $\varphi(x) = 1$).

Zuerst müssen wir zeigen, dass dies wohldefiniert ist. Angenommen, b wäre 0. Dann ist $ax = 0$, also, da x unendliche Ordnung hat, $a = 0$, im Widerspruch zur Definition. Nun ist noch zu zeigen, dass der Bruch $-\frac{a}{b}$ eindeutig ist. Sei also auch $cx + dy = 0$ eine solche Darstellung. Multiplikation mit d, bzw. b liefert $adx + bdy = 0$ und $bcx + bdy = 0$, also $(ad - bc)x = 0$ und, da x nach Voraussetzung unendliche Ordnung hat, $ad - bc = 0$. Das heißt aber genau $-\frac{a}{b} = -\frac{c}{d}$.

Als nächstes weisen wir nach, dass φ ein Homomorphismus ist. Sei hierzu $y, z \in G$ gegeben, und seien $ax + by = 0$ und $cx + dz = 0$ wieder nichttriviale Darstellungen. Dann sind auch $adx + bdy = 0$ und $bcx + bdz = 0$ solche Darstellungen, also gilt $(ad + bc)x + bd(y + z) = 0$, das heißt, $\varphi(y + z) = -\frac{ad+bc}{bd} = -\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \varphi(y) + \varphi(z)$.

Es bleibt zu zeigen, dass φ injektiv ist. Sei hierzu $\varphi(y) = 0$. Dann gibt es eine Darstellung $ax + by = 0$ mit $a = 0$, es gilt also $by = 0$. Da $b \neq 0$ sein muss, folgt, dass y endlichen Rang hat, also wegen der Torsionsfreiheit $y = 0$.

(2) Sei $(G, +)$ eine torsionsfreie lokal zyklische Gruppe. Wir müssen nach (1) nur zeigen, dass G abelsch und vom Rang 1 ist.

Sei also $x, y \in G$. Dann ist nach Voraussetzung $\langle x, y \rangle$ zyklisch und damit insbesondere abelsch, also gilt $x + y = y + x$. Seien nun x, y nicht beide gleich 0. Sei $\langle z \rangle = \langle x, y \rangle$. Dann gibt es $a, b \in G$, nicht beide 0, so dass $x = -bz$ und $y = az$. Dann ist aber $ax + by = -abz + baz = 0$, also ist G vom Rang 1.

(3) Sei $\langle \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$ eine endlich erzeugte Untergruppe von $\mathbb{Q}$. Dann liegen offenbar alle $\frac{p_i}{q_i}$ in der Gruppe $\langle \frac{1}{q_1 \cdots q_n} \rangle$. Also ist $\langle \frac{p_1}{q_1}, \ldots, \frac{p_n}{q_n} \rangle$ Untergruppe einer zyklischen Gruppe und somit selbst zyklisch.