Mathematisches Institut
der Universität München
Andreas Fackler

Sommersemester 2009
Übungsblatt 2

Klausurenkurs Algebra

Aufgabe 1 (Frühjahr 2007, Thema 3, Aufgabe 3)

Es sei $G = \langle z \rangle$ eine multiplikativ geschriebene zyklische Gruppe der Ordnung 63 (mit z als einem erzeugenden Element).

(a) Bestimmen Sie (explizit) zwei nicht triviale Untergruppen G_1 und G_2 von G, so dass G das direkte Produkt von G_1 und G_2 ist.

(b) Bestimmen Sie die Ordnung des Elementes $z^{49} \in G$.

Aufgabe 2 (Herbst 2003, Thema 1, Aufgabe 1)

Sei G eine Gruppe der Ordnung n. Zeigen Sie:

(a) G ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.

(b) Ist $n = 2u$ mit ungeradem u, so hat G einen Normalteiler vom Index 2.

Aufgabe 3 (Herbst 2006, Thema 2, Aufgabe 1)

Sei $X = X_1 \cup X_2$ eine endliche Menge, die disjunkte Vereinigung zweier n-elementiger Mengen X_1 und X_2 ist, ($n \geq 2$). Sei $S(X) \cong S_{2n}$ die Menge aller Permutationen von X (d.h. aller bijektiven Abbildungen $\sigma : X \to X$). Die Untermenge $G \subset S(X)$ sei wie folgt definiert:

$$G := \{\sigma \in S(X) : \sigma(X_1) = X_1 \text{ oder } \sigma(X_1) = X_2\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass G eine Untergruppe von $S(X)$ ist.

(b) Sei $\varphi : G \to \{\pm 1\}$ definiert durch

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(X_1) = X_1 \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass φ ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus ist und $\operatorname{Ker}(\varphi)$ isomorph zu $S_n \times S_n$ ist.

(c) Ist G ein Normalteiler von $S(X)$?

(d) Für welche n ist die Gruppe G auflösbar?

Aufgabe 4 **(Frühjahr 2006, Thema 1, Aufgabe 3)**

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^m > 1$, mit $m \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl.

(a) Man zeige, dass jede maximale Untergruppe von G ein Normalteiler vom Index p ist.

(b) Sei N der Schnitt der maximalen Untergruppen von G. Man zeige, dass G/N abelsch ist und Exponent p hat. (Der Exponent einer endlichen Gruppe ist das kleinste gemeinsame Vielfache der Elementordnungen.)

Aufgabe 5 **(Frühjahr 2001, Thema 1, Aufgabe 2)**

Eine Gruppe heißt *torsionsfrei*, wenn nur das neutrale Element endliche Ordnung besitzt. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe $\neq 0$ heißt *vom Rang* 1, wenn es für je zwei Elemente x, y dieser Gruppe ganze Zahlen a, b, nicht beide gleich 0, gibt derart, dass $ax + by = 0$, z. B. ist die additive Gruppe $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen torsionsfrei vom Rang 1. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Torsionsfreie abelsche Gruppen vom Rang 1 lassen sich in $\mathbb{Q}$ einbetten.

(2) Torsionsfreie *lokal zyklische Gruppen*, d. h. alle endlich erzeugten Untergruppen sind zyklisch, lassen sich in $\mathbb{Q}$ einbetten.

(3) Jede Untergruppe von $\mathbb{Q}$ ist lokal zyklisch.